

الاختبار الثاني في مادة الرياضيات
على الطالب أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

نعتبر المتتاليتين (x_n) و (y_n) حدودهما أعداد طبيعية ، معرفتان بـ :

$$x_n = 2^{n+1} + 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(2) \text{ أ - أحسب } p \gcd(x_8, x_9) \text{ ثم } p \gcd(x_{2012}, x_{2013})$$

- ما القول عن العددين x_8 و x_9 وكذلك عن العددين x_{2012} و x_{2013} ؟

ب - هل العددين x_n و x_{n+1} أوليين فيما بينهما من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ؟

$$(3) \text{ أ - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, \quad 2x_n - y_n = 5$$

ب - عبر عن y_n بدلالة n .

ج - أدرس حسب قيم P ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^P على 5 .

$$d_n = p \gcd(x_n, y_n), \quad n \text{ عدد طبيعي}$$

برهن أن $d_n = 1$ أو $d_n = 5$ ثم استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها

$$p \gcd(x_n, y_n) = 1$$

التمرين الثاني: (06 نقاط)

الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O, i, j, k)

(1) بين أن مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق :

$$(x + 2y - z + 2)^2 + (3x + y + 2z - 1)^2 = 0$$

هي مستقيم (D) يطلب تعيين شعاع توجيه له.

(2) أ) بين أن مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق :

$$(x + 2y - z + 2)^2 - (3x + y + 2z - 1)^2 = 0$$

هي اتحاد مستويين (P) و (Q) يطلب إعطاء معادلتين ديكارتيتين لهما.

ب) تحقق من أن $(P) \cap (Q) = (D)$

(3) نرفق بكل عدد حقيقي m المستوي (P_m) المعرف بالمعادلة الديكارتية

$$(1 + 3m)x + (2 + m)y + (2m - 1)z + 2 - m = 0$$

أ) بين أن (P_m) يحوي (D) .

(ب) هل أن كل مستوي يحوي (D) هو المستوي (P_m) ؟ برر

الصفحة 4 / 1

التمرين الثالث: (09 نقاط)

الجزء الأول: نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$h(x) = x + (x-2) \ln x \quad \text{و} \quad g(x) = x - 1 - \ln x$$

1. أ) احسب $g'(x)$ من أجل x من المجال $]0; +\infty[$ ثم ادرس تغيرات g .

2. أ) استنتج أن $g(x) \geq 0$ لكل x من المجال $]0; +\infty[$

ب) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ ، $h(x) = 1 + g(x) + (x-1) \ln x$

3. بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ ، $(x-1) \ln x \geq 0$

4. استنتج إشارة $h(x)$ على $]0; +\infty[$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2$

و ليكن C_f المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس.

1. أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ فسر النتيجة هندسياً.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $f'(x) = \frac{h(x)}{x}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3. أ) عين معادلة ديكراتية للمستقيم Δ مماس للمنحني C_f في النقطة $A(1;1)$.

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $f(x) - x = (\ln x - 1)g(x)$

ج) ادرس إشارة $f(x) - x$ ثم استنتج الوضعية النسبية للمنحني C_f و المستقيم Δ .

4. أنشئ Δ و C_f . (يقبل أن C_f يقبل نقطة انعطاف فاصلتها محصورة بين 1 و 5).

الجزء الثالث: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_0 = \sqrt{e}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل طبيعي n ، $1 < u_n < e$

2. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

3. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

الصفحة 2/4

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (5.5 نقطة)

n عدد طبيعي غير معدوم ؛ نعتبر الأعداد :

$$c_n = 2 \times 10^n + 1, \quad b_n = 2 \times 10^n - 1, \quad a_n = 4 \times 10^n - 1$$

1- أ- احسب a_1, b_1, c_1 و a_2, b_2, c_2 ثم a_3, b_3, c_3 .

ب - كم رقما تحتوي الكتابة العشرية للأعداد a_n و c_n .

ت - بين أن : a_n و c_n يقبلان القسمة على 3.

ث- بين أن b_3 أولي.

2- أ - أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $b_n \times c_n = a_{2n}$:

ب- استنتج التحليل إلى جداء عوامل أولية للعدد a_6 .

3- أ- بين أن : $p \gcd(b_n; c_n) = p \gcd(c_n; 2)$

ب - استنتج أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما.

4 - نعتبر المعادلة (E) : $b_3 x + c_3 y = 1$ للأعداد الصحيحة xx و yy .

أ -- برر لماذا (E) تقبل على الأقل حلا.

ب باستعمال خوارزمية إقليدس للأعداد b_3 و c_3 أوجد حلا خاصا للمعادلة (E).

ت- حل المعادلة (E).

التمرين الثاني: (5.5 نقطة)

الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O, i, j, k)

نعتبر النقط $A(-1; 0; 2)$ ، $B(3; 2; -4)$ ، $C(1; -4; 2)$ و $D(5; -2; 4)$

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$$

نعرف النقط J ، I و كما يلي : I منتصف [K] . AB منتصف [CD] و

- (1) عين احداثيات النقط J ، I و K ثم تحقق أن هذه النقط ليست على استقامة واحدة .
- (2) تحقق أن $n(8;9;5)$ شعاع ناظمي للمستوي (IJK) ثم أكتب معادلة ديكارتية لـ (IJK) .
- (3) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AD) ثم تحقق أن (IJK) و (AD) يتقاطعان في نقطة L حيث $\frac{\overrightarrow{AL}}{AL} = \frac{1}{4} \frac{\overrightarrow{AD}}{AD}$
- (4) لتكن النقطة G مرجح الجملة $\{(A;3), (B;3), (C;1), (D;1)\}$
- أ) عين مرجح الجملة $\{(A;3), (D;1)\}$ ثم مرجح الجملة $\{(B;3), (C;1)\}$
- ب) باستعمال النقطة G ، بين أن المستقيمين (JL) و (IK) متقاطعان.
- ت) يمكن اعتبار G مرجح للجملة $\{(A,3), (B,3), (C,1), (D,1)\}$ بطريقتين مختلفتين).
- ث) استنتج أن النقط K ، J ، I و L من نفس المستوي

الصفحة 3/4

التمرين الثالث: (09 نقاط)
الجزء الأول:

g الدالة العددية المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = (1-x)e^x + 1$

- 1- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و ادرس تغيرات الدالة g
- 2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1, 27; 1.28[$
- 3- استنتج إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني:

f دالة معرفة على المجال $[1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = e^x - \ln(x-1)$

(C) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1cm$ و $\|\vec{j}\| = 0.5cm$

1- اثبت أنه من اجل كل عدد حقيقي من $[1; +\infty[$ أن : $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x-1)}$

2- بين أن : $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha-1}$ ثم أعط حصر لـ $f(\alpha)$..

3- بين من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; +\infty[$ أن: $f(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - \frac{x-1}{x} \times \frac{\ln(x-1)}{x-1} \right)$

- استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

4- أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. فسر بيانيا النتيجة.

5- شكل جدول تغيرات الدالة f و ارسم المنحنى (C) .

