

RESUELTOS

Profesor: Rafael Núñez Nogales

1.- De las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ determina cuáles tienen inversa y en los casos en que exista, calcula el determinante de dichas matrices.

Resolución

Como $\det A = -2 \neq 0$, A tiene inversa; Como B no es cuadrada no tiene sentido hablar de su inversa

Como $\det C = 0$, entonces C no tiene inversa; Como $\det D = 1 \neq 0$, D tiene inversa.

2.- Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & a & 2 & a & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$

(a) Determina el rango de A en función del parámetro a.

Resolución

$$\det A = a^2 - 2a - 4a + 3a^2 + 2 = 4a^2 - 6a + 2 = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 3a + 1 = 0;$$

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4}, \quad a = 1 \quad a = \frac{1}{2}$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq \frac{1}{2}$, $\det A \neq 0$ y, por tanto, $\text{rg } A = 3$.

- Si $a = 1$, $\det A = 0$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Como $|1 \ -2 \ 0 \ 1| = 1 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

- Si $a = \frac{1}{2}$, $\det A = 0$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{-3}{2} \end{pmatrix}$. Como $|1 \ -2 \ 0 \ \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

(b) Discute en función de a el sistema, dado en forma matricial $AX = B$.

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & a & 2 & a & -1 & a & -2 \end{pmatrix}$ y

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & a & 2 & 0 & a & -1 & a & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq \frac{1}{2}$, $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

- Si $a = 1$, $\text{rg } A = 2$;

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad f_3 - f_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad f_3 = f_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Como $|1 \ -2 \ 0 \ 1| = 1 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

- Si $a = \frac{1}{2}$, $\text{rg } A = 2$;

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{-3}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad 2f_2 \quad 2f_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

La 1ª y 3ª filas corresponden a las ecuaciones $x - 2y - 3z = 1$, $x - 2y - 3z = 2$, respectivamente, que son ecuaciones contradictorias. Luego, el sistema es incompatible.

(c) Resuelve $AX = B$ en los casos en que sea compatible indeterminado.

Resolución

Para $a = 1$, sabemos que el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, que corresponde al sistema $\{x - 2y - 2z = 1 \quad y + 2z = 0\}$.

De la 2ª ecuación, $y = -2z$; de la 1ª ecuación, $x = 1 + 2y + 2z = 1 - 4z + 2z = 1 - 2z$.

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = 1 - 2k, y = -2k, z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$

3.- Determina la matriz X tal que $AX - 3B = O$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & -7 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Resolución

Sumando $3B$, en los dos miembros, $AX = 3B$. Como $\det A = -6 - 2 + 7 = -1 \neq 0$, existe A^{-1} .

Multiplicamos por A^{-1} , por la izquierda, en los dos miembros: $A^{-1}AX = A^{-1}3B = 3A^{-1}B \Rightarrow X = 3A^{-1}B$

$$X = 3 \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t B = 3 \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 & -2 & -1 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & -2 & 5 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} -4 & 5 & -4 & 13 & -3 \end{pmatrix}$$

4.- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Calcula el determinante de las matrices: $2A$, A^{31} y $(A^{31})^{-1}$.

Resolución

$$\det A = -2 + 2 - 1 = -1. \text{ Entonces, } \det(2A) = 2^3 \cdot \det A = 8 \cdot (-1) = -8$$

$$\det(A^{31}) = [\det A]^{31} = (-1)^{31} = -1 \qquad \det(A^{31})^{-1} = \frac{1}{\det(A^{31})} = \frac{1}{-1} = -1$$

(b) Halla la matriz A^{-1} .

Resolución

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 2 & -1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}^t = - \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 & 2 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & -2 & 3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5.- Resuelve el sistema de ecuaciones, dado en forma matricial, $AX = -AX + B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

Resolución

Sumando AX , en los dos miembros, $AX + AX = B$; $2AX = B$. Como $\det A = 4 - 2 - 6 - 1 = -5 \neq 0$, existe A^{-1} . Multiplicamos por A^{-1} , por la izquierda, en los dos miembros:

$$A^{-1}2AX = A^{-1}B \Rightarrow 2X = A^{-1}B. \text{ Multiplicando por } \frac{1}{2} \text{ en los dos miembros, } X = \frac{1}{2} A^{-1}B.$$

$$X = \frac{1}{2} \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t B = \frac{1}{2} \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 3 & 7 & -4 & 2 & -2 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 7 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

6.- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda & 1 & \lambda & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$

(a) Determina para qué valores del parámetro λ la matriz A no tiene inversa.

Resolución

$$\det A = 1 + \lambda^2 - \lambda^2 - \lambda^2 = 1 - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ó } \lambda = -1.$$

Luego, para $\lambda = 1$ ó $\lambda = -1$ la matriz A no tiene inversa.

(b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $\lambda = -2$.

Resolución

Para $\lambda = -2$ sabemos que A tiene inversa. Además, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\det A = 1 - (-2)^2 = -3 \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}^t = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & \frac{-4}{3} & \frac{-2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

7.- (prueba ordinaria) Sea

$A = \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x & \cos x & 0 & \cos x & \sin x & 0 & \sin x & +\cos x & \cos x & \sin x & -\cos x & \cos x & 1 \end{pmatrix}$ ¿Para qué valores de x existe la

matriz inversa de A? Calcula dicha matriz inversa.

Resolución

Desarrollando por la última columna, $\det A = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \neq 0$.

Luego, para cualquier valor de x existe la matriz inversa de A.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \cos x & \sin x \cos x & \cos x \\ -\cos^2 x & -\sin^2 x & -\sin x \cos x & \cos x \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \cos x & \sin x \cos x & \cos x \\ -\cos^2 x & -\sin^2 x & -\sin x \cos x & \cos x \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \cos x & 0 & -\cos x \sin x \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

8.- (prueba ordinaria) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ -4 & -5 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(a) Siendo I la matriz identidad 3 x 3 y O la matriz nula 3 x 3, prueba que $A^3 + I = O$,

Resolución

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ -4 & -5 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ -4 & -5 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ -4 & -5 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I. \text{ Como } A^3 = -I, \text{ entonces } A^3 + I = O$$

(b) Calcula A^{10} .

Resolución $A^{10} = A^9 \cdot A = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -IA = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 & -1 & 4 & 5 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

9.- (prueba extraordinaria) Determina a, b y c sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix}$ verifica $A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ y $\text{rango}(A) = 2$.

Resolución

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2a & +7 & 2b & +3c & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 7 = 9 \\ 2b + 3c = 2 \end{cases}$$

Como $\text{rg } A = 2$ el determinante de A debe anularse, $-3ac + b - 2 + a + 6b - c = 0$; $a + 7b - c - 3ac = 2$

Puesto que $a = 1$, queda $1 + 7b - c - 3c = 2$; $7b - 4c = 1$. Nos queda el sistema,

$$\begin{cases} 2b + 3c = 5 \\ 7b - 4c = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b + 3c = 5 \\ 7b - 4c = 1 \end{cases} \cdot 4 \cdot 3 \quad \begin{cases} 8b + 12c = 20 \\ 21b - 12c = 3 \end{cases} \text{ Sumando las ecuaciones, } 29b = 23; b = \frac{23}{29}$$

$$\begin{cases} 2b + 3c = 5 \\ 7b - 4c = 1 \end{cases} \cdot 7 \cdot (-2) \quad \begin{cases} 14b + 21c = 35 \\ -14b + 8c = -2 \end{cases} \text{ Sumando las ecuaciones, } 29c = 33; c = \frac{33}{29}$$

Conclusión: $a = 1, b = \frac{23}{29}$ y $c = \frac{33}{29}$

10.- (prueba extraordinaria)

(a) Clasifica el siguiente sistema según los valores del parámetro m

$$\begin{cases} 2x + my = 0 \\ x + mz = m \\ x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 & 0 & m & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 0 & 1 & 0 & m & m & 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det A = m^2 - 2m - 3m = m^2 - 5m = m(m - 5) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ó } m = 5$$

- Si $m \neq 0$; $m \neq 5$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

– Si $m = 0$, $\det A = 0$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Como $|1 \ 0 \ 1 \ 1| = 1 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

$A^* = (2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 3 \ 1)f_1 = 2f_2 \quad (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 3 \ 1)$. Como $|1 \ 0 \ 1 \ 1| = 1 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$.

Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

– Si $m = 5$, la matriz del sistema es

$$A^* = (2 \ 5 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 5 \ 5 \ 1 \ 1 \ 3 \ 1)f_1 - 2f_3 \quad f_2 - f_3 \quad (0 \ 3 \ -6 \ -2 \ 0 \ -1 \ 2 \ 4 \ 1 \ 1 \ 3 \ 1)f_1 + 3f_2 \quad (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 2 \ 4 \ 1 \ 1 \ 3 \ 1).$$

La 1ª fila corresponde a la ecuación $0 = 10$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

(b) Resuelve el sistema anterior para $m = 6$.

Resolución

Para $m = 6$, sabemos que el sistema es compatible determinado y $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 6 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a usar la regla de Cramer para resolverlo:

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & 6 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A_y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 6 & 6 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A_z = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A_x = 36 - 108 = -72$$

$$\det A_y = 36 - 12 = 24.$$

$$\det A_z = 36 - 12 - 6 = 18$$

$$\det A = 6(6 - 5) = 6$$

$$\text{La solución es } x = \frac{A_x}{\det A} = \frac{-72}{6} = -12 \quad y = \frac{A_y}{\det A} = \frac{24}{6} = 4 \quad z = \frac{A_z}{\det A} = \frac{18}{6} = 3$$

OTROS DEL 2001 (COU I)

1.- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & 5 & 2 & \lambda & 7 & -\lambda & 4 & -6 \end{pmatrix}$

(a) Determina los valores de λ para los que A no posee inversa.

Resolución

$$\det A = 0 \Leftrightarrow -72 + 80 + 14\lambda - 2\lambda^2 - 56 + 8\lambda + 60 - 24\lambda = -2\lambda^2 - 2\lambda + 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2}, \quad \lambda = 2 \quad \lambda = -3. \text{ Luego, para } \lambda = 2 \text{ ó } \lambda = -3 \text{ la matriz } A \text{ no tiene inversa.}$$

(b) Para $\lambda = 2$ resuelve si es posible, $A(x \ y \ z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 12 \end{pmatrix}$

Resolución

Para $\lambda = 2$, $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & 5 & 2 & 2 & 5 & 4 & -6 \end{pmatrix}$. La ecuación del enunciado da lugar al sistema

$$\begin{cases} 6x + 2y + 4z = 1 \\ 5x + 2y + 2z = -1 \\ 5x + 4y - 6z = 12 \end{cases}$$

La matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & 1 & 5 & 2 & 2 & -1 & 5 & 4 & -6 & 12 \end{pmatrix} 5f_1 - 6f_3 \quad f_2 - f_3 \quad (0 \ -14 \ 56 \ -67 \ 0 \ -28 \ -13 \ 5 \ 4 \ -6 \ 0) f_1$$

La 1ª fila corresponde a la ecuación $0 = 24$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible.

Por tanto, no se puede resolver la ecuación del enunciado, porque es incompatible.

(c) Para $\lambda = -3$ resuelve, si es posible, $A(x \ y \ z) = (1 \ -1 \ 12)$.

Resolución

Para $\lambda = -3$, $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & 5 & 2 & -3 & 10 & 4 & -6 \end{pmatrix}$. La ecuación del enunciado da lugar al sistema $\begin{cases} 6x + 2y + 4z = 1 \\ 5x + 2y - 3z = -1 \\ 10x + 4y - 6z = 12 \end{cases}$

La matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & 1 & 5 & 2 & -3 & -1 & 10 & 4 & -6 & 12 \\ f_3 & -2f_2 & (6 & 2 & 4 & 1 & 5 & 2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 14) \end{pmatrix}$$

La 3ª fila corresponde a la ecuación $0 = 14$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible. Por tanto, tampoco se puede resolver la ecuación del enunciado, porque es incompatible.

2.- Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - 3y + \lambda z = 0 \\ -x + y + z = 1 + \lambda \\ x + (\lambda - 1)y - z = 1 \end{cases}$$

(a) Clasifícalo según los valores del parámetro λ .

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & \lambda & -1 & 1 & 1 & 1 & \lambda - 1 & -1 \end{pmatrix}$ y

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -3 & \lambda & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 + \lambda & 1 & \lambda - 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -2 - 3 - \lambda^2 + \lambda - \lambda + 3 - 2\lambda + 2 = -\lambda^2 - 2\lambda = \lambda(-\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ó } \lambda = -2$$

– Si $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -2$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

– Si $\lambda = 0$, La matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 + f_3} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La 2ª fila corresponde a la ecuación $0 = 1$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible.

– Si $\lambda = -2$, La matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 - 2f_3} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La 1ª fila corresponde a la ecuación $0 = -4$, que es incompatible. El sistema también es incompatible.

(b) Determina el valor que debe tomar λ para que el sistema tenga una solución con $y = -1$

Resolución

Si en una solución es $y = -1$, sustituyendo

$$\begin{cases} 2x - 3(-1) + \lambda z = 0 \\ -x + (-1) + z = 1 + \lambda \\ x + (\lambda - 1)(-1) - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \lambda z = -3 \\ -x + z = 2 + \lambda \end{cases}$$

Sumando las 2 últimas ecuaciones, $0 = 2 + 2\lambda$. De donde, $\lambda = -1$

3.-

(a) Enuncia el Teorema de Rouché-Frobenius.

Resolución

Sean A la matriz de coeficientes y A' la matriz ampliada de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Si r y r' son el rango de A y A' , respectivamente:

– El sistema es compatible si los rangos coinciden $r = r'$. Además, si $r = n$, el sistema es compatible determinado; es decir, tiene solución única.

Si $r = r'$, pero $r < n$, el sistema es compatible indeterminado; es decir, tiene una infinidad de soluciones.

– El sistema es incompatible si los rangos son distintos, $r \neq r'$, es decir, el sistema no tiene solución.

(b) Determina los valores de a para los que toda solución del sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ también lo sea del sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 2y + 8z = -2 \\ x - y + az = -2 \end{cases}$.

Resolución

La matriz del primer sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $f_1 - f_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, que corresponde al sistema $\begin{cases} y - 2z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$.

De la 1ª ecuación, $y = 1 + 2z$; de la 2ª ecuación, $x = -y - z = -1 - 2z - z = -1 - 3z$.

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\begin{cases} x = -1 - 3k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \end{cases}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Como deben ser soluciones del 2º sistema, sustituyendo,

$\begin{cases} 2(-1 - 3k) + 3(1 + 2k) = 1 \\ 4(-1 - 3k) + 2(1 + 2k) + 8k = -2 \\ -1 - 3k - (1 + 2k) + ak = -2 \end{cases}$, para todo $k \in \mathbb{R}$. Luego, debe ser $a = 5$.

4.-

(a) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y sea A^t su matriz traspuesta, calcula $2A - A^t$ y $(A^2)^{-1}$.

Resolución

$$2A - A^t = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

RESUELTOS

Profesor: Rafael Núñez Nogales

Por otra parte, $B = A^2 = AA = (1 \ 0 \ 2 \ 1 \ - \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0)(1 \ 0 \ 2 \ 1 \ - \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0) = (3 \ 2 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ - \ 1 \ 3)$

$\det B = 18 + 4 - 2 - 8 + 3 - 6 = 9 \neq 0$. Luego, existe $(A^2)^{-1} = B^{-1}$

$$(A^2)^{-1} = B^{-1} = \frac{1}{\det B} (\text{adj } B)^t = \frac{1}{9} (7 \ - \ 1 \ - \ 5 \ - \ 8 \ 5 \ 7 \ - \ 2 \ - \ 1 \ 4)^t = \frac{1}{9} (7 \ - \ 8 \ - \ 2 \ - \ 1 \ 5 \ - \ 1 \ - \ 1 \ 4 \ 7 \ 2 \ 1 \ 5 \ 8 \ 1 \ 7)$$

(b) Sabiendo que $|a \ b \ c \ d \ e \ f \ g \ h \ i| = 2$, calcula $|3a \ 3b \ 3c \ g \ h \ i \ d \ e \ f|$.

Resolución

$$|3a \ 3b \ 3c \ g \ h \ i \ d \ e \ f| \quad (1) \Rightarrow 3|a \ b \ c \ g \ h \ i \ d \ e \ f| \quad (2) \Rightarrow 3\{-|a \ b \ c \ d \ e \ f \ g \ h \ i|\} = 3 \cdot (-2) = -6$$

(1) Sacamos el factor 3 de la 1ª fila

(2) Cambiamos de orden 2ª y 3ª filas y el determinante cambia de signo