

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Одеська політехніка»
Інститут комп'ютерних систем
Кафедра прикладної математики та інформаційних технологій

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ**
з дисципліни «ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»
для здобувачів першого(бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальністю ФЗ Комп'ютерні науки
освітньо-професійна програми «Програмування ігрових систем»

Одеса – 2025

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Одеська політехніка»
Інститут комп'ютерних систем
Кафедра прикладної математики та інформаційних технологій

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ**
з дисципліни «ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»
для здобувачів першого(бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальністю ФЗ Комп'ютерні науки
освітньо-професійна програми «Програмування ігрових систем»

Затверджено на засіданні
кафедри ПМІТ
Протокол № 1 від 29.08.2025 р.

Одеса – 2025

Методичні вказівки до практичних робіт по курсу „Дискретна математика” для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю F3 Комп’ютерні науки. Освітньо-професійні програми «Програмування ігрових систем» / Укладачі: Н.А.Гуляєва. - Одеса: Національний університет «Одеська політехніка», 2025. – 73 с.

Укладач: Гуляєва Н.А., ст.викладач

Пропоновані методичні вказівки призначені для студентів технічних спеціальностей. Їх мета в доступній та стислій формі ознайомити студентів методами для розв’язку задач з використання методів дискретної математики. Викладений матеріал ілюструється прикладами розв’язання задач. Наведено список рекомендованої літератури.

Призначається для студентів денної форми навчання.

Вступ

Курс «Дискретна математика» викладається студентам спеціальності F3 Комп'ютерні науки освітня програма «Програмування ігрових систем» другому навчальному семестрі. Робоча навчальна програма з дисципліни передбачає наприкінці семестру складання екзамену.

Данні методичні рекомендації призначено для підготовки студентів до практичних занять з дисципліни «Дискретна математика», поглиблення теоретичних та практичних навичок.

Загальні положення

Відповідно до навчальної програми з дисципліни «Дискретна математика» передбачається п'ятнадцять практичних занять (30 годин). Кожне практичне заняття містить мету, перелік основних понять та категорій, якими має володіти студент після роботи на відповідному занятті.

Мета практичних занять – придбання студентами практичних навиків самостійної роботи при розв'язку задач. На практичних заняттях студенти закріплюють знання, які одержують на лекціях, при роботі з посібниками або методичними матеріалами, придбають навички у розв'язанні конкретних задач.

Проведення кожного практичного заняття починається з короткого опитування з теорії, що привчає до систематичного вивчення матеріалу курсу за конспектами лекцій або навальними посібниками. Для більш ефективного засвоєння матеріалу курсу, надбання навичок розв'язання задач та здійснювання поточного контролю за навчанням, на кожному практичному занятті надається відповідно до поточної теми теоретичне завдання і задачі.

ЗМІСТ

Практичне заняття №1.	«Основні поняття теорії множин. Операції над множинами».	5
Практичне заняття №2.	«Діаграми Ейлера-Венна. Декартовий добуток множин».	7
Практичне заняття №4.	«Задачі пов'язані з поняттям комбінаторики»	15
Практичне заняття №5.	«Задачі на побудову таблиці істинності»	19
Практичне заняття №6	«Нормальні форми представлення логічних функцій ДНФ та КНФ»	22
Практичне заняття №8.	«Неорієнтовані графи»	27
Практичне заняття №9.	«Орієнтовані графи»	31
Практичне заняття №10.	«Ізоморфізм графів. Ступень вершин графа»	34
Практичне заняття №11.	«Підрахунок кількості компонент зв'язності у неорієнтованому графі. »	38
Практичне заняття №12.	«Задачі на знаходження діаметру, радіуса та центів графа»	40
Практичне заняття №13.	«Задачі на визначення наявності ейлірових та гамільтонових циклів в графах»	42
Практичне заняття №14-15.	«Дерева. Побудова мінімального дерева методом Краскала»	43
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ		47
Список літератури		73

Практичне заняття №1. «Основні поняття теорії множин. Операції над множинами».

Мета заняття: Отримати розуміння з поняттями теорії множин та проведення операцій над ними

Теоретичні відомості.

Множина — це сукупність об'єктів, званих елементами множини, тобто множина повністю визначається своїми елементами .

Множини позначаються великими латинськими літерами. Елементи множини записуються у фігурних дужках: $A = \{a, b, c\}$. Елементи якої-небудь множини самі можуть бути множинами.

Способи опису множин

1. Вербальний (словесний) за допомогою опису характеристичних властивостей, які повинні мати елементи множин.

2. Список (перелік) усіх елементів у фігурних дужках.

- $\{1, 2, 3, \dots\}$;
- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
- $\{0, 1\}$;
- $\{2, 4, \dots\}$.

3. Предикатний (висловлювальний, породжувальний) за допомогою предиката, тобто множина задається у вигляді $\{x \mid P(x)\}$, де $P(x)$ набуває значення «істина» для елементів множини. Приклади предикатів:

- $\{1, 2, 3, 4, \dots\} = \{x \mid x \text{ — натуральне число}\}$;
- $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 9\} = \{x \mid x \text{ — цифра десяткової системи}\}$;
- $\{0, 1\} = \{x \mid x \text{ — цифра двійкової системи}\}$;
- $\{2, 4, 6, \dots\} = \{x \mid x \text{ — парне число}\} = \{x \mid \exists n \in \mathbb{N} (x = 2n)\}$

4. Аналітичний. (За допомогою формули)

Розглянемо операції над множинами

Об'єднанням множини A і B називається множина, що складається з усіх тих і лише тих елементів, які належать хоча б одній з множин A або B .

Позначається $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}$ (називається сумою або об'єднанням)

Таким чином, за наведеним означенням $x \in A \cup B$ тоді і лише тоді, коли x є елементом хоча б однієї з множин A або B .

Наприклад: $\{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Перетин множин A і B (позначається через $A \cap B$ і читається як «перетин A і B ») є множина всіх предметів, які є елементами обох множин A і B , тобто $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}$. Таким чином, за визначенням, $x \in A \cap B$ тоді і тільки тоді, коли x є одночасно елементом множини A і елементом множини B .

Наприклад: $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 4\} = \{1, 3\}$.

Запереченням множини A називають множину $\bar{A}$ (не A), елементами якої є всі елементи простору, за виключенням елементів множини A . Таким чином, за визначенням $\bar{A} = \{x: x \notin A\}$

Різницею множин A і B або відносним доповненням множини B до A називається множина, що складається з усіх тих і лише тих елементів, які належать A і не належать B . Визначається лише для двох множин.

Різниця множин A і B позначається як $A \setminus B$, або $A - B$, що відповідає умові $\{a, a \in A \text{ і } a \notin B\}$, яка визначає ті елементи множини A , що не є елементами множини B . Саму операцію знаходження різниці двох множин називають відніманням множин.

Нехай $A = \{1, 3, 4, 5\}$, а $B = \{1, 2, 3\}$. Тоді $A - B = \{4, 5\}$

Симетричною різницею множин A і B називається множина $A \oplus B$, яка складається з елементів множини A або множини B , за виключенням елементів, які належать A і B одночасно

$$A \oplus B = \{x: x \in A \text{ або } x \in B \text{ та } x \notin A \cap B\}.$$

Задача. Видаливши з множини A елементи $\{1, 2\}$, $B - \{9, 10\}$, $C - \{11, 13\}$ і $D - \{14, 16\}$, записати множини, одержані після виконання вказаних операцій $A \cap D$, $A \setminus (B \cap D)$, $B \cup D$.

Вважаємо, що:

$$U = A \cup B \cup C \cup D,$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

$$B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\},$$

$$C = \{11, 12, 13, 14, 15, 16\},$$

$$D = \{1, 2, 3, 4, 14, 15, 16\}.$$

Розв'язання. Видаляємо вказані елементи з цих множин.

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

$$B = \{4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13\},$$

$$C = \{12, 14, 15, 16\},$$

$$D = \{1, 2, 3, 4, 15\}.$$

Виконуємо вказані у завданні операції:

а) $A \cap D$ – це операція перетину. Перетином множин A та D називають множину $A \cap D$, яка складається з усіх елементів, що належать A та D одночасно.

$$A \cap D = \{3, 4\}.$$

б) Спочатку виконуємо операцію в дужках. $(B \cap D) = \{4\}$.

$A \setminus (B \cap D)$ – це різниця множин. Різницею множин A і $(B \cap D)$ називається множина $A \setminus (B \cap D)$, що складається з усіх елементів A , які не належать $(B \cap D)$.

$$A \setminus (B \cap D) = \{3, 5, 6, 7, 8\}.$$

в) $B \cup D$ – це операція об'єднання. Об'єднанням множин B та D називається множина $B \cup D$, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній з цих множин, тому

$$B \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 15\}.$$

Завдання для самостійного виконання – задача 1.

Практичне заняття №2. «Діаграми Ейлера-Венна. Декартовий добуток множин».

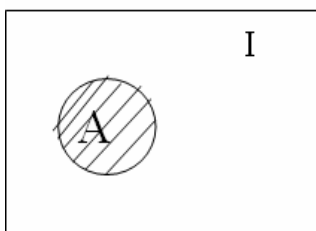
Мета заняття: Придбати навички з побудови декартового добутку множин та діаграм Ейлера-Венна.

Теоретичні відомості.

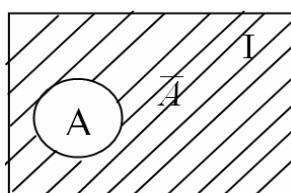
Діаграми Ейлера

Для наочного зображення операцій над множинами досить часто використовують діаграми (круги) Ейлера.

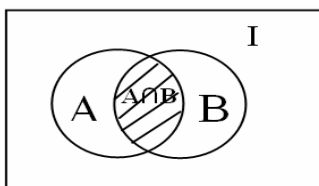
Множина, яка об'єднує всі однотипні множини, має назву *універсальної множини*, або *універсума*. Позначається U або I . Універсум зображають у вигляді області прямокутника, а його підмножини – у вигляді кругів, еліпсів тощо.



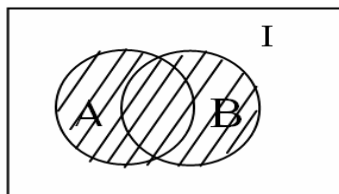
Заперечення (доповнення) множини $\bar{A}$



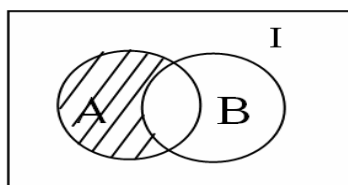
Перетин множин $A \cap B$



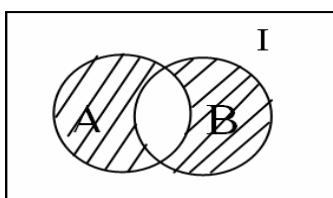
Об'єднання множин $A \cup B$



Різниця множин $A \setminus B$



Симетричною різницею $A \oplus B$

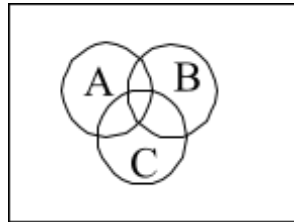


При побудови діаграмми Ейлера існує пріоритет виконання операцій.

Пріоритет виконання операцій встановлюється наступний: заперечення – найвищий, перетин та об'єднання – наступний, однаковий один до одного. Операції різниці та симетричної різниці – не є алгебраїчними, пріоритет не встановлюється.

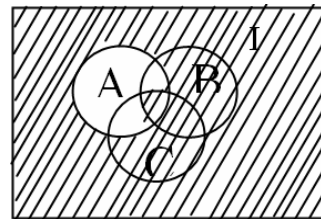
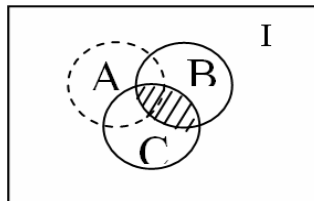
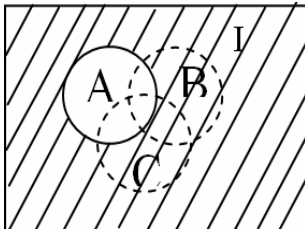
Задача. Виконати операції над трьома множинами та закреслити результат на діаграмі Ейлера – Венна.

а) $\overline{A \cup B \cap C}$



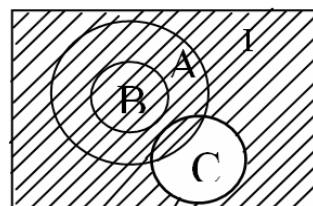
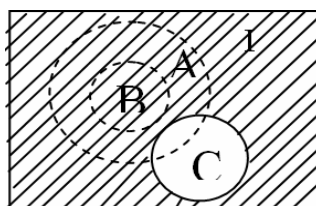
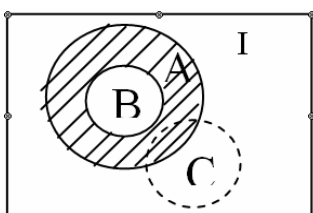
Розв'язання.

Спочатку знайдемо $\overline{A}$. Далі знайдемо $B \cap C$. Отримаємо



б) $(A \oplus B) \cup \overline{C}$

Спочатку знайдемо $A \oplus B$. Далі $\overline{C}$. Отримаємо



Прямий (декартовий) добуток множин

Нехай маємо дві множини: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ та $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$.

Означення. Прямим (декартовим) добутком множин A та B (позначається $A \times B$) називається множина усіх упорядкованих пар $(a_i, b_j), i=\overline{1, n}, j=\overline{1, m}$

таких, що перший елемент належить множині A , а другий – множині B .

Відповідно декартовим добутком трьох множин A, B, C ($C = \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$) називається множина усіх упорядкованих трійок $(a_i, b_j, c_k), i=\overline{1, n}, j=\overline{1, m}, k=\overline{1, p}$ де $a_i \in A, b_j \in B, c_k \in C$, позначається $A \times B \times$

C тощо.

Задача. Дано дві множини: $M = \{a, b, v, z\}$ та $N = \{1, 3, \pi, \sqrt{15}\}$

Записати $M \times N, N \times M, M \times M, N \times N$.

Розв'язання. Згідно з означенням прямого (декартового) добутку маємо

$$M \times N = \{ (a, 1), (a, 3), (a, \pi), (a, \sqrt{15}), (b, 1), (b, 3), (b, \pi), (b, \sqrt{15}), (v, 1), (v, 3),$$

$$(v, \pi), (v, \sqrt{15}), (z, 1), (z, 3), (z, \pi), (z, \sqrt{15}) \}$$

$$N \times M = \{ (1, a), (1, b), (1, v), (1, z), (3, a), (3, b), (3, v), (3, z), (\pi, a), (\pi, b), (\pi, v), (\pi, z),$$

$$(\sqrt{15}, a), (\sqrt{15}, b), (\sqrt{15}, v), (\sqrt{15}, z) \}$$

$$M \times M = \{ (a, a), (a, b), (a, v), (a, z), (b, a), (b, b), (b, v), (b, z), (v, a), (v, b), (v, v), (v, z), (z, a),$$

$$(z, b), (z, v), (z, z) \}$$

$$N \times N = \{ (1, 1), (1, 3), (1, \pi), (1, \sqrt{15}), (3, 1), (3, 3), (3, \pi), (3, \sqrt{15}), (\pi, 1), (\pi, 3), (\pi, \pi),$$

$$(\pi, \sqrt{15}), (\sqrt{15}, 1), (\sqrt{15}, 3), (\sqrt{15}, \pi), (\sqrt{15}, \sqrt{15}) \}$$

Завдання для самостійного виконання – задача 2.

Практичне заняття №3. «Побудова відношень. Бінарні відношення. Композиції відношень »

Мета заняття: Оволодіти основними правилами побудови бінарних відношень та відображень та операцій над ними

Теоретичні відомості.

Відповідністю називається будь який зв'язок між елементами однієї множини або елементами різних множин. Поняття відповідності – найбільш загальне поняття, на якому базуються поняття функції, відображення тощо.

Для того щоб задати відповідність G між елементами множин X та Y необхідно вказати, які елементи $y \in Y$ відповідають елементам $x \in X$, тобто вказати пари (x, y) .

Відношення є частинним випадком відповідності, але заданої не на різних множинах, а на одній множині X . Між елементами цієї множини можуть існувати певні логічні зв'язки, тобто елементи знаходяться в певних відношеннях один з одним. Той факт, що елемент $x_i \in X$ знаходиться у відношенні R з елементом $x_j \in X$ записується так: $x_i R x_j$, або $(x_i, x_j) \in R$.

Таке відношення називається бінарним. Таким чином, бінарне відношення, яке задано на множині X , є підмножиною декартового добутку $X \times X$ $R \subseteq X \times X$.

Способи задання відношень

Відношення можна задавати або перерахуванням пар елементів, які йому належать, або таблицею (матрицею), або графом.

Приклад 1. Відношення R – "бути менше", яке задано на множині

$$A = \{1, 3, 4, 8, 9\}.$$

Його можна задати:

1. Перерахуванням пар:

$$R = \{(1, 3), (1, 4), (1, 8), (1, 9), (3, 4), (3, 8), (3, 9), (4, 8), (4, 9), (8, 9)\}$$

2. Таблицею: якщо пара $(a_i, a_j) \in R$, то на перетині i -го рядка та j -го стовпця стоїть одиниця, якщо $(a_i, a_j) \notin R$ – то 0.

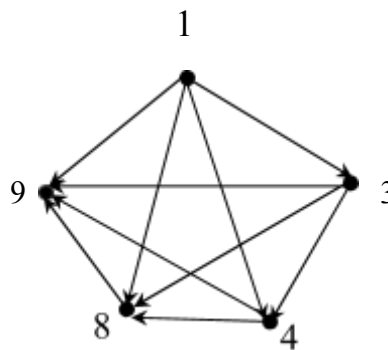
В нашому прикладі маємо:

R	1	3	4	8	9
1	0	1	1	1	1
3	0	0	1	1	1
4	0	0	0	1	1
8	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0

Або $R =$

0	1	1	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1
0	0	0	0	0

3. Граф. Елементи позначаються точками (вершинами), а зв'язок між ними – дугами (ребрами), причому дуга має напрямок – від першого елемента пари до другого.



Операції над відношеннями

Оскільки відношення є множиною, то над відношеннями виконуються всі ті операції, що й над множинами: об'єднання, перетин, різниця, симетрична різниця, доповнення (до $X \times X$). Крім того, існують операції інверсії та композиції.

1. *Інверсія* – будується на основі поняття *інверсії пари*, тобто інверсія пари (x_i, x_j) є пара (x_j, x_i) . Інверсія відношення R є відношення R^{-1} , яке утворене інверсією пар. R^{-1} ще називають *оберненим* відношенням

до R . Для відношення R (приклад 1) R^{-1} є:

$$R^{-1} = \{(3, 1), (4, 1), (8, 1), (9, 1), (4, 3), (8, 3), (9, 3), (8, 4), (9, 4), (9, 8)\}.$$

2. Нехай на множині X задано відношення R та P . Нехай $(a_i, a_j) \in R$, а $(a_j, a_k) \in P$.

Композицією цих двох пар є пара (a_i, a_k) . Композицією відношень R та P називається відношення $Q = R \circ P$, яке утворено композицією пар.

Наприклад, нехай на множині $A = \{1, 3, 4, 8, 9\}$ задано відношення R – «бути менше» (приклад 1) та P – «ділитись без залишку», тобто

$$P = \{(9, 1), (8, 1), (4, 1), (3, 1), (9, 3), (8, 4), (1, 1), (3, 3), (4, 4), (8, 8), (9, 9)\}.$$

Тоді $R \circ P = Q = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (1, 8), (1, 9), (3, 1), (3, 4), (3, 8), (3, 3), (3, 9), (4, 1), (4, 4), (4, 8), (4, 3), (4, 9), (8, 1), (8, 3), (8, 9)\}.$

Задача. На множині $A = \{2, 5, 7, 8\}$ задано відношення R_1 – «бути порівнянними за модулем 2» та R_2 – «бути більше». Записати R_1 та R_2 перерахуванням пар, графами. Визначити: які мають властивості R_1 та R_2 і до яких видів належать. Виконати операції $R_1 \oplus R_2$, $R_1 \setminus R_2$, $R_1 \circ R_2$ та подати у вигляді графів та перерахування пар.

Розв'язання.

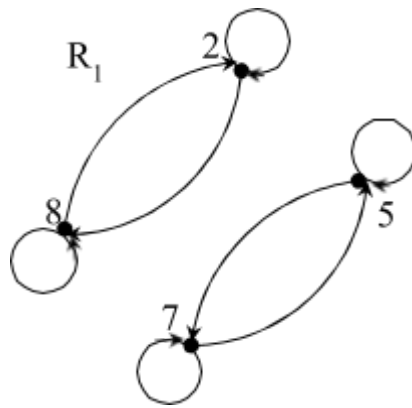
Довідка. Числа a і b порівнянні за модулем $m > 0$, якщо різниця $a - b$ ділиться на m без залишку.

Запишемо R_1 :

$$R_1 = \{(2, 8), (2, 2), (8, 2), (8, 8), (5, 7), (7, 5), (5, 5), (7, 7)\}$$

$R_1 =$

1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1



Властивості: рефлексивність, симетричність, транзитивність .

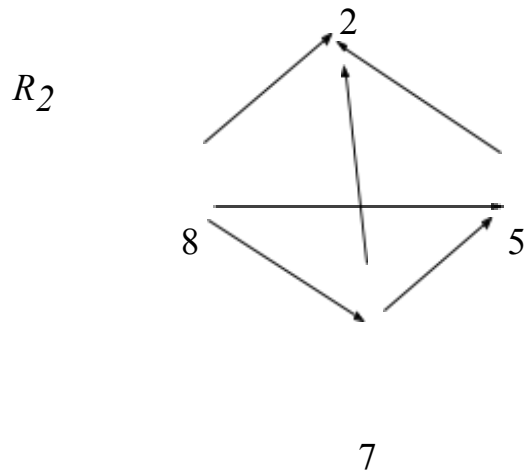
Вид - екви валентність

Запишемо R_2

$$R_2 = \{(5,2), (7,2), (8,2), (7,5), (8,5), (8,7)\}$$

$R_2 =$

0	0	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0
1	1	1	0



Властивості: антирефлексивність, антисиметричність, транзитивність.

Вид – строгий порядок.

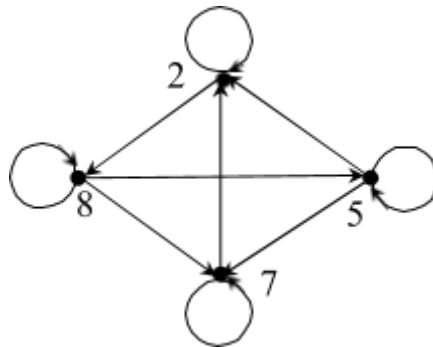
Виконаєм операції

$$R_1 \oplus R_2 = (R_1 \cup R_2) \setminus (R_1 \cap R_2) = \{(2,8), (2,2), (8,8), (5,7), (5,5), (7,7), (5,2), (7,2), (8,5), (8,7)\}$$

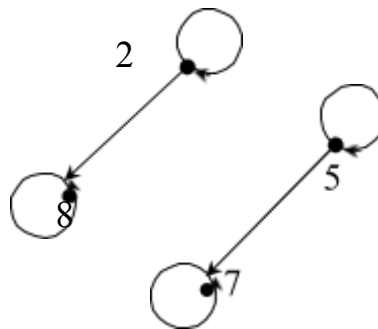
Так як

$$R_1 \cup R_2 = \{(2,8), (2,2), (8,2), (8,8), (5,7), (7,5), (5,5), (7,7), (5,2), (7,2), (8,5), (8,7)\}$$

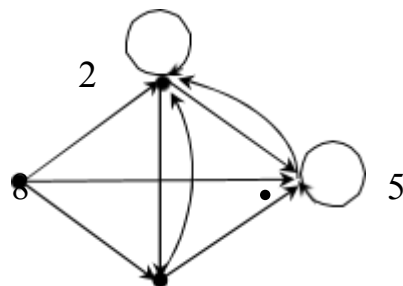
$$R_1 \cap R_2 = \{(8,2), (7,5)\}$$



$$R_1 \setminus R_2 = \{(2,8), (2,2), (8,8), (5,7), (5,5), (7,7)\}$$



$$R_1 \circ R_2 = \{(2,2), (2,5), (2,7), (8,2), (8,7), (8,5), (5,2), (5,5), (7,2), (7,5)\}$$



Завдання для самостійного виконання – задача 3.

Практичне заняття №4. «Задачі пов'язані з поняттям комбінаторики»

Мета заняття: Вміти застосовувати поняття комбінаторики при розв'язку задач

Теоретичні відомості

Підмножина з m елементів на множині X , що складається з n елементів, називається (n, m) -вибіркою, де m - обсяг цієї вибірки.

Якщо (n, m) -вибірка розглядається з урахуванням порядку елементів в ній, то вона називається (n, m) -розміщенням і позначається A_n^m

Якщо $m = n$, то таке (n, n) -розміщення називається P_n -перестановкою.

Якщо порядок елементів у вибірці (n, m) не має значення, то вона називається (n, m) -сполученням і позначається C_n^m

І перестановки, і сполучення і розміщення можуть бути з повтореннями і без повторень.

Розглянемо формули обчислення перестановок, розміщень та сполучень

За визначенням *перестановками* називають комбінації, що складаються з одних і тих же n різних елементів і відрізняються лише порядком їхнього розташування. Число всіх можливих перестановок

$$P_n = n!, \text{ де } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Зауважимо, що за визначенням $0! = 1$.

Розміщенням називають комбінації, складені з n різних елементів по m елементів, що лежать у проміжку від 1 до n , які відрізняються або складом елементів, або їх порядком. Число впорядкованих m -елементних підмножин множини X , яка містить n елементів, дорівнює

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Сполученням з n елементів по m - це невпорядкований набір (множина) з m різних чисел, що належать множині X . Таким чином, сполученням називають комбінації, складені з n різних елементів по m елементів, які відрізняються хоч би одним елементом.

Число невпорядкованих m -елементних підмножин множини X , яка містить n елементів, дорівнює

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Кількість перестановок із повтореннями. Кількість перестановок елементів n , з яких n_1 відноситься до типу 1, n_2 відноситься до типу 2 і т.д., аж до n_r елементів типу r , дорівнює

$$P_n = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!}$$

Приклад 1. У слові МІФІ змінюють місцями літери. Чому дорівнює кількість всіх можливих різних слів?

Рішення.

Дві літери в слові збігаються, отже, число всіх різних перестановок у 2! менше можливих, тобто дорівнює

$$P_4 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2!} = 12$$

Приклад 2. Чому дорівнює кількість всіх можливих різних слів, складених із трьох різних літер множини $\{A, B, C, D, E\}$?

Рішення.

Всі літери в слові не збігаються, отже, число всіх різних розміщень

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

Приклад 3. У слові НІЯУ обирають дві літери. Скільки способами це можна зробити?

Рішення.

Так як порядок букв у даному випадку не має значення, то результат визначається за формулою для числа сполучень

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6$$

Приклад 4. Визначити, скільки існує різних способів вибору (порядок не має значення) 3 томів із 5-томних зборів творів

Рішення.

Результат визначається за формулою для числа сполучень

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

Правила суми та добутку

Розглянемо кінцеву множину X , що складається з n елементів. Тоді кажуть, що об'єкт x із X може бути обраний $|X| = n$ способами. Нехай $X_1, X_2, \dots, X_k$ - попарно не перетинаючі множини, тобто $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Тоді виконується рівність

$$\left| \bigcup_{i=1}^k X_i \right| = \sum_{i=1}^k |X_i|$$

Такий вибір об'єктів називається несумісними подіями

Теорема 1. Правило суми

Якщо деякий об'єкт x може бути обраний із сукупності об'єктів m способами, а інший об'єкт y може бути обраний n способами, то вибрати або x , або y можна $m + n$ способами.

Якщо об'єкт x із X може бути вибраний n способами, а об'єкт y може бути обраний m способами, то впорядкована пара $\langle x, y \rangle$ (коли вибирається як об'єкт x , і об'єкт y) може бути обрана nm способами.

Узагальнюючи на k об'єктів, отримуємо, що вибір упорядкованої за послідовністю $\langle X_1, X_2, \dots, X_k \rangle$ може бути здійснений $n_1 n_2 \dots n_k$ способами.

Теорема 2. Правило добутку

Якщо об'єкт x можна вибрати із сукупності об'єктів m способами і після кожного такого вибору об'єкт y можна вибрати n способами, то пара об'єктів (x, y) у зазначеному порядку може бути обрана mn способами.

Розглянемо кілька задач.

Приклад 5. Скільки способами можна в групі з 20 студентів вибрати старосту та його заступника?

Рішення.

У разі ми вибираємо пару $\langle x, y \rangle$ без повторень. Старосту можна вибрати 20 способами, а його заступника $20 - 1 = 19$ способами. За правилом добутку $20 \cdot 19 = 380$ способів.

Приклад 6. В урні знаходиться 12 куль. Три з них червоні, п'ять білі, решта – сині. Ми вибираємо з урни дві різнокольорові кулі. Скільки способами це можна зробити?

Рішення.

У разі ми вибираємо пару $\langle x, y \rangle$ без повторень. Якщо пара $\langle \text{червоний, синій} \rangle$, то за правилом добутку таких способів

$$3 \cdot 4 = 12.$$

Якщо пара <червоний, білий>, то за правилом добутку таких способів
 $3 \cdot 5 = 15$.

Якщо пара <білий, синій>, то за правилом твору таких способів $5 \cdot 4 = 20$.

У нас виходить три види несумісних подій: або пара
 <червоний, синій>, або <червоний, білий>, або <білий, синій>.

За правилом суми отримуємо $12 + 15 + 20 = 47$ різних способів вибору.

Приклад 7. Скільки існує чотирицифрових чисел, які діляться на 5?

Рішення.

У даному випадку ми вибираємо четвірку $\langle x, y, z, w \rangle$ з повтореннями, причому останній елемент w — або 0, або 5 за правилом ділимості, а перший x не може бути 0, інакше число не чотиризначне.

За правилом добутку отримуємо $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 1800$.

Приклад 8. Скільки чотирьохзначних чисел, що не перевищують 2000, можна скласти з непарних цифр?

Рішення.

Перший розряд числа може бути лише 1, решта — содержат будь-яку з цифр 1,3,5,7,9. Отримуємо, використовуючи правило добутку:

$$A = 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

Приклад 9. Розв'язати рівняння $C_x^1 + 6 \cdot C_x^2 + 6 \cdot C_x^3 = 9x^2 - 14x$

Рішення. Згідно з визначенням кількості сполучень запишемо:

$$x + 6 \cdot \frac{x!}{2!(x-2)!} + 6 \cdot \frac{x!}{3!(x-3)!} = 9x^2 - 14x$$

$$x + \frac{6(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x-2)(x-1) \cdot x)}{1 \cdot 2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x-2))} + \frac{6 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x-3)(x-2)(x-1)x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x-3))} = 9x^2 - 14x$$

$$x + 3 \cdot (x-1) \cdot x + (x-2)(x-1) \cdot x = 9x^2 - 14x$$

$$\text{після скорочень } x \cdot (x^2 - 9x + 14) = 0$$

$$\text{Розв'язав отримаємо } x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 7$$

Корені $x_1 = 0, x_2 = 2$ не можуть бути розв'язками рівняння, тому розв'язок $x_3 = 7$.

Завдання для самостійного виконання – задача 4.

Практичне заняття №5. «Задачі на побудову таблиці істинності»

Мета заняття: Отримати досвід побудову таблиці істинності за допомогою булевої алгебри

Логічною називають функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, задану на множині логічних змінних $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ і яка набуває значення 0 або 1. Логічні функції можна задати формулами або таблицями, які мають назву таблиць істинності. Область визначення логічної функції – це множина наборів, на яких вона є визначеною.

Приклад.

Область визначеності –
набори (0, 0, 0), (0, 0, 1),
(1, 0, 0), (0, 1, 1),
(1, 1, 1)

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	-
1	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	-
1	1	0	-
1	1	1	1

Основні елементарні логічні функції

1. *Інверсія* (ні, заперечення, $\neg$, доповнення). Інверсія $f(x) = \bar{x}$ –

логічна функція

однієї змінної, яка

задається таблицею істинності:

Легко

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

побачити, що $\bar{\bar{x}} = x$

2. *Кон'юнкція*

(I , логічний добуток).

Кон'юнкція – це бінарна логічна функція,

яка задається виразом:

$$f(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 = x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2 = \min\{x_1, x_2\}$$

Таблиця істинності кон'юнкції має вигляд

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x_1 та x_2 – логічні співмножники

3. Диз'юнкція

(АБО, математичне додавання).

Диз'юнкція – це бінарна логічна функція, яка задається виразом:

$$f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 = \max\{x_1, x_2\}$$

Таблиця істинності має вигляд:

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x_1 та x_2 – логічні доданки

Інверсія, кон'юнкція, диз'юнкція – основні функції (операції) математичної логіки, тому що через них можуть бути визначені інші логічні функції (операції), наприклад, імплікація, еквіваленція, сума за mod2.

а) імплікація (логічне слідування)

$$f(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$$

Таблиця істинності має вигляд:

x_1	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

б) еквіваленція (функція рівнозначності)

$$f(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2} \vee x_1 \wedge x_2$$

Таблиця істинності

x_1	x_2	$x_1 \sim x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

в) сума за $mod 2$ (відокремлюване АБО, строга диз'юнкція, не еквіваленція).

$$f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1 \sim x_2} = \overline{x_1 x_2} \vee \overline{x_1 x_2}$$

Таблиця істинності

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Задача. Для заданої логічної функції побудувати таблицю істинності

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2} \wedge ((x_1 \vee x_3) \wedge (\overline{\overline{x_2} \wedge \overline{x_3}}))$$

Розв'язання Позначимо кожен дію окремою функцією

$$f_1 = x_1 \vee x_3, f_2 = \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}, f_3 = \overline{\overline{x_2} \wedge \overline{x_3}} = \overline{f_2}, f_4 = f_1 \wedge f_3, f_5 = \overline{x_2} \wedge f_4$$

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1	0	1	1	0

Завдання для самостійного виконання – задача 5.

Практичне заняття №6 «Нормальні форми представлення логічних функцій ДНФ та КНФ»

Мета заняття: Придбати навички побудови ДНФ та КНФ.

Теоретичні відомості

Для представлення логічних функцій крім табличного способу використовують і представлення їх у вигляді формул, тобто аналітичного представлення. Слід зазначити, що та сама функція може мати різні аналітичні представлення. Серед різних формул для зручності порівняння їх між собою та однозначного представлення виділяють спеціальні форми:

- диз'юнктивну нормальну форму (ДНФ);
- кон'юнктивну нормальну форму (КНФ).

Для того, щоб побудувати ці форми, нам потрібно буде використовувати наступні закони алгебри Буля:

- 1) ідемпотентність або закон поглинання:

$$(X \wedge X) = X \quad (X \vee X) = X \quad X \wedge (X \vee Y) = X \quad X \vee (X \wedge Y) = X$$

- 2) комутативність:

$$(X \wedge Y) = (Y \wedge X) \quad (X \vee Y) = (Y \vee X)$$

- 3) асоціативність:

$$(X \wedge Y) \wedge Z = X \wedge (Y \wedge Z) \quad (X \vee Y) \vee Z = X \vee (Y \vee Z)$$

- 4) дистрибутивність:

$$(X \wedge Y) \vee Z = (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z) \quad (X \vee Y) \wedge Z = (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$$

- 5) доповнювальність:

$$(X \vee \neg X) = 1 \quad (X \wedge \neg X) = 0 \quad \neg(\neg X) = X$$

- 6) виключення імплікації та еквівалентності:

$$X \leftrightarrow Y = (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X) \quad (X \rightarrow Y) = (\neg X \vee Y)$$

- 7) закони де Моргана:

$$\neg(X \wedge Y) = (\neg X \vee \neg Y) \quad \neg(X \vee Y) = (\neg X \wedge \neg Y)$$

Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ) — це диз'юнкція кон'юнкцій, утворених зі змінних та їх заперечень. ДНФ не містить дужок.

Наприклад, форми $\bar{a}\vee bc$, $abc\vee\bar{b}\bar{c}$, a , $\bar{b}$ — диз'юнктивні нормальні форми, а $d(b\vee c)$ — ні.

Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ) — це кон'юнкція диз'юнкцій, утворених з змінних та їх заперечень.

Наприклад, форми $(\bar{a}\vee b)\wedge c$, $ab(c\vee\bar{b})$, $\bar{c}$, a , $c\vee\bar{b}$ — кон'юнктивні нормальні форми, а $a(bc\vee\bar{c})$ — ні

Теорема 1. Теорема про ДНФ: Будь-яка логічна функція, відмінна від константи 0, може бути зведена до ДНФ.

Для отримання ДНФ необхідно:

- 1) записати булеву функцію через функції $\{\vee, \wedge, \bar{}\}$;
- 2) за допомогою законів де Моргана звільнитися від загальних заперечень та за законом подвійного заперечення зняти подвійні рисочки;
- 3) за допомогою закону дистрибутивності розкрити все дужки та провести поглинання.

Отримана форма задовольняє визначенню ДНФ.

Приклад 1: Побудувати ДНФ та КНФ формули

$$F = (x \rightarrow y) \leftrightarrow (y \rightarrow x)$$

Рішення:

Спочатку за допомогою властивості 6 виключимо еквівалентність

$$((x \rightarrow y) \rightarrow (y \rightarrow x)) \wedge ((y \rightarrow x) \rightarrow (x \rightarrow y))$$

далі, за допомогою цієї ж властивості, замінимо імплікацію диз'юнкцією і запереченням

$$(\neg(\neg x \vee y) \vee (\neg y \vee x)) \wedge (\neg(\neg y \vee x) \vee (\neg x \vee y))$$

а потім використовуючи закони де Моргана внесемо $\neg$ в дужки так, щоб знак заперечення стояв перед простими висловлюваннями

$$((\neg\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg y \vee x)) \wedge ((\neg\neg y \wedge \neg x) \vee (\neg x \vee y))$$

Враховуючи еквівалентність $\neg(\neg X) = X$ і закони дистрибутивності, можемо написати такий ланцюг еквівалентностей

$$((x \wedge \neg y) \vee (\neg y \vee x)) \wedge ((y \wedge \neg x) \vee (\neg x \vee y)) = ((x \vee (\neg y \vee x)) \wedge (\neg y \vee (\neg y \vee x))) \wedge ((y \vee (\neg x \vee y)) \wedge (\neg x \vee (\neg x \vee y))) = (\neg y \vee (x \vee x)) \vee (\neg y \vee \neg y) \vee x)) \wedge ((\neg x \vee (y \vee y)) \wedge (\neg x \vee \neg x) \vee y)) = (\neg y \vee x) \wedge (\neg y \vee x) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee y)$$

Використовуючи закони поглинання, отримаємо

$$(\neg y \vee x) \wedge (\neg x \vee y)$$

Ми побудували КНФ початкової формули. Щоб отримати ДНФ, використаємо ще раз закони дистрибутивності і поглинання:

$$(\neg y \vee x) \wedge (\neg x \vee y) = (\neg y \wedge (\neg x \vee y)) \vee (x \wedge (\neg x \vee y)) = ((\neg y \wedge \neg x) \vee (\neg y \wedge y)) \vee ((x \wedge \neg x) \vee (x \wedge y)) = ((\neg y \wedge \neg x) \vee (x \wedge y))$$

Остання формула є ДНФ формули F

Завдання для самостійного виконання – задача 6.

Практичне заняття №7. «Представлення логічних функцій у вигляді ДДНФ та ДКНФ»

Мета заняття: Придбати навички побудови ДДНФ та ДКНФ.

Теоретичні відомості

Якщо ДНФ функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ від n змінних у кожній своїй кон'юнкції містить всі n змінних чи їх заперечення, то це *досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ)*. Кожна функція має одну-єдину ДДНФ, і вона може бути отримана з таблиці істинності цієї функції шляхом запису через знак логічного складання всіх наборів змінних, на яких ця функція визначена як істинна. Кожен такий набір змінних відповідає кон'юнкції, причому якщо змінна $x_i = 1$, то x_i входить до неї без заперечення, якщо $x_i = 0$, то x_i входить до неї із запереченням $\bar{x}_i$

Побудувати для функції досконали диз'юнктивну нормальну форму можна двома шляхами: за таблицею істинності і за допомогою аналітичного висновку. Аналітичний побудова для ДДНФ складається з чотирьох кроків:

- 1) привести функцію до виду ДНФ;
- 2) кожен кон'юнкцію, що містить менш ніж n змінних, логічно помножити на $1 = x_i \vee \bar{x}_i$
- 3) розкрити дужки з допомогою закону дистрибутивності;
- 4) згідно із законом ідемпотентності прибрати зайве.

Зверніть увагу: для константи 0 немає ДДНФ, так як немає жодного набору змінних, на якому вона була б визначена як істинна.

Теорема 2. Теорема про КНФ. Будь-яка логічна функція, відмінна від константи 1, може бути зведена до КНФ.

Для того, щоб зробити це, необхідно:

- 1) записати булеву функцію у вигляді $\{\vee, \wedge, \overline{}\}$;
- 2) за допомогою законів де Моргана спустити риску заперечення до окремих літер та за законом подвійного заперечення знищити подвійні рисочки;
- 3) за допомогою закону дистрибутивності знищити все диз'юнкції кон'юнкцій та провести поглинання.

Отримана форма задовольняє визначення КНФ.

Якщо КНФ функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ від n змінних у кожній своїй диз'юнкції містить все n змінних чи його заперечення, то це *досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ)*.

Кожна функція має одну єдину ДКНФ, і вона може бути отримана з таблиці істинності цієї функції шляхом запису через знак логічного множення всіх наборів змінних, на яких ця функція визначена як хибна. Кожен такий набір змінних відповідає диз'юнкції, причому якщо змінна $x_i = 1$, то x_i входить до неї із запереченням $\overline{x_i}$, якщо $x_i = 0$, то x_i входить до неї без заперечення x_i .

Аналітичний вивод для ДКНФ складається з чотирьох кроків:

- 1) привести функцію до виду ДНФ;
- 2) усі кон'юнкції через закон дистрибутивності перетворити до виду КНФ
- 3) до кожної диз'юнкції, де менше ніж n змінних, додати

$$x_i \wedge \overline{x_i} = 0$$

- 4) перетворити дужки за допомогою закону дистрибутивності;
- 5) згідно із законом ідемпотентності прибрати зайве.

Зверніть увагу: для константи 1 не існує ДКНФ, так як немає жодного набору змінних, на якому вона була б визначена як помилкова!

Приклад 1. Побудуємо ДДНФ і ДКНФ формули $F = (x \rightarrow y) \leftrightarrow (y \rightarrow x)$.

Рішення: Спочатку побудуємо таблицю істинності цієї формули

x	y	f1= $x \rightarrow y$	f2= $y \rightarrow x$	f1 $\leftrightarrow$ f2
0	0	1	1	1
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0

Для побудови ДДНФ випишемо рядки, для яких $F = 1$ і відповідні їм елементарні кон'юнкції. Рядку (0, 0) буде відповідати елементарна кон'юнкція $(\neg x \wedge \neg y)$, а рядку (1, 1) — $(x \wedge y)$. Отже ДДНФ формули буде

$$(\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y).$$

Для побудови ДКНФ випишемо рядки, для яких $F = 0$, і для кожного такого рядка побудуємо елементарну диз'юнкцію. Потім з'єднаємо отримані одночлени через кон'юнкції і отримаємо потрібну формулу у вигляді КНФ. Отже, формула F набуває значення 0 на векторах (1, 0) і (0, 1), відповідні елементарні диз'юнкції — $(\neg x \vee y)$ і $(x \vee \neg y)$. Таким чином ДКНФ формули F буде

$$(\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)$$

Приклад 2. Побудувати ДДНФ за допомогою аналітичного вивода для функції $F(x, y, z) = (x \rightarrow y) \rightarrow \bar{z}$

Рішення.

Спочатку приведемо функцію до ДНФ

$$(x \rightarrow y) \rightarrow \bar{z} = (\text{п.6}) = \overline{(x \rightarrow y)} \vee \bar{z} = \overline{x \vee \bar{y}} \vee \bar{z} = (\text{п.7}) = \bar{x} \wedge \bar{y} \vee \bar{z} = (x \wedge \bar{y}) \vee \bar{z}$$

Отримали ДНФ. Зараз кожному кон'юнкції, що містить менше ніж n змінних, помножимо (кон'юнкція) на $1 = x_i \vee \bar{x}_i$

$$\begin{aligned} (x \wedge \bar{y}) \vee \bar{z} &= x \wedge \bar{y} \wedge (z \vee \bar{z}) \vee (x \vee \bar{x}) \wedge (y \vee \bar{y}) \wedge \bar{z} = (\text{п.4}) = \\ &= (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) = (\text{для 2 та 5} \\ &\text{множника застосуємо п.1}) = (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee \end{aligned}$$

$$(\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}). \text{ Отримали ДДНФ}$$

Приклад 3. Побудувати ДКНФ за допомогою аналітичного вивода для функції $F(x, y, z) = (x \rightarrow y) \rightarrow \bar{z}$

Рішення.

Спочатку приведемо функцію до ДНФ. По прикладу 3 отримаємо

$$(x \rightarrow y) \rightarrow \bar{z} = (\text{п.6}) = \overline{(x \rightarrow y)} \vee \bar{z} = \overline{x \vee \bar{y}} \vee \bar{z} = (\text{п.7}) = \bar{x} \wedge \bar{y} \vee \bar{z} = x \bar{y} \vee \bar{z}$$

останні дві формули еквівалентні, кон'юнкцію можливо записувати як ($\wedge$) так ($\bullet$). За допомогою п.4 отримаємо КНФ

$$\overline{x}y \vee \overline{z} = (x\vee\overline{z})(\overline{y} \vee \overline{z})$$

Зараз до кожної диз'юнкції, де менше ніж n змінних, додати $x_i \wedge \overline{x_i} = 0$

$$(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) = (\text{п.4}) = (x\vee y\vee\overline{z})(x\vee\overline{y} \vee \overline{z})(x\vee\overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) =$$

$$(\text{для 2 та 3 множника застосуємо п.1}) = (x\vee y\vee\overline{z})(x\vee\overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$$

Отримали ДКНФ

Завдання для самостійного виконання – задача 7.

Практичне заняття №8. «Неорієнтовані графи»

Мета заняття: Розглянути способи представлення неорієнтованих графів.

Теоретичні відомості

Існують два основних види графів - *орієнтовані*, в яких лінії мають направлення від однієї вершини до іншої, і *неорієнтовані*, в яких лінії не мають напрямку.

Визначення. Неорієнтованим графом $G = (V, E)$ називається об'єкт, заданий парю множин (V, E) , де V – множина вершин, $E \subseteq V \times V$ – множина ребер.

Неорієнтований граф задає два відношення між своїми елементами: відношення суміжності і відношення інцидентності.

Матриця суміжності. *Суміжність* - відношення між вершинами: дві вершини називаються суміжними, якщо вони з'єднані ребром. Це відношення - звичайне бінарне відношення на множині V , яке для простого графа може бути задано квадратної бінарною (тобто складається з нулів і одиниць) матрицею суміжності $A(G) = (a_{ij})$, яка визначається наступним чином:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

Відношення суміжності в неорієнтованому графі завжди симетрично, оскільки порядок вершин в парі (v_i, v_j) не важливий. Матриця суміжності порожнього графа заповнена тільки нулями, а матриця суміжності повного графа з петлями - тільки одиницями. Для мультиграфів матриця суміжності

вже не є бінарною: в ній $a_{ij} = k$, де k - число кратних ребер, що з'єднують вершини v_i і v_j .

Матриця інцидентності. *Інцидентність* - це відношення між вершинами і ребрами: ребро інцидентне кожній з вершин, яке воно з'єднує. Воно задається матрицею інцидентності C , в якій рядки позначаються іменами вершин, а стовпці - іменами ребер графа. Матриця інцидентності графа визначається як $(n \times m)$ матриця $C(G) = (c_{ij})$, у якій

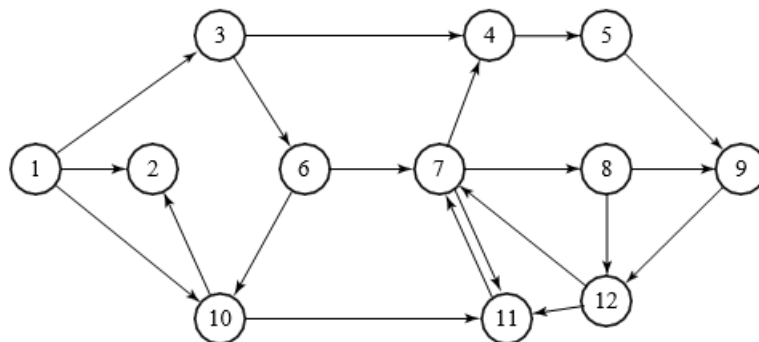
$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{вершина } v_i \text{ інцидентна ребру } e_j \\ 0, & \text{вершина } v_i \text{ не інцидентна ребру } e_j \end{cases}$$

Це прямокутна бінарна матриця, в якій число рядків дорівнює числу вершин графа n , а число стовпців - числу ребер m . Число ребер, інцидентних вершині v_i графа (орграфа, мультиграфа), називається степенем цієї вершини і позначається $\deg(v_i)$. Степінь вершини можна визначити за матрицями інцидентності і суміжності. Степінь вершини v_i дорівнює числу одиниць в i -му рядку матриці інцидентності або матриці суміжності.

Отже, графи і орграфи можуть бути задані трьома способами:

- безпосереднім завданням множин вершин V і дуг E (наприклад, списком);
- матрицею суміжності та матрицею інцидентності (правда, мультиграф матрицею суміжності не може бути заданий однозначно, оскільки ця матриця не містить імен ребер);
- малюнком.

Задача. Дано орієнтований граф, заданий графічним способом



Задати граф : а) за допомогою матриці суміжності

б) за допомогою матриці інцидентності.

Розв'язок. В графі 12 вершин.

А) Побудова матриці суміжності.

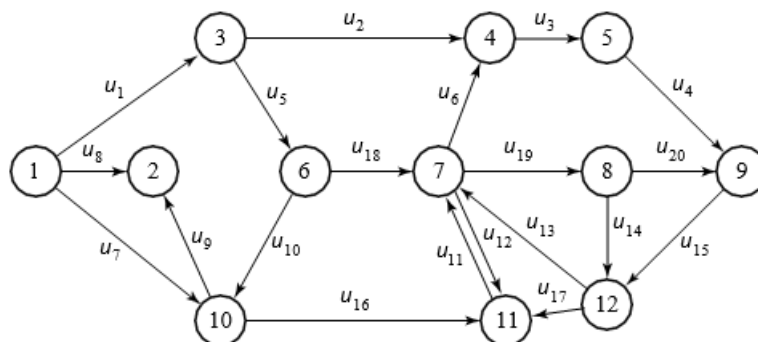
Спочатку збудуємо матрицю розмірності 12×12 , по вертикалі та горизонталі перерахувавши вершини v_i . Розглянемо вершину v_l . Як видно з графічного представлення графа, з v_l виходять дуги, що приходять у вершини v_2, v_3, v_{10} , тому у відповідних комірках рядка v_l ставимо одиниці. Далі розглянемо вершину v_2 за тією ж схемою і т.д.

Продовжуючи цей алгоритм для всіх вершин, отримаємо матрицю суміжності

V	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
v_1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
v_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_3	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
v_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
v_5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
v_7	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
v_8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
v_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
v_{10}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
v_{11}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
v_{12}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0

Б) Побудова матриці інцидентності.

Спочатку потрібно пронумерувати всі дуги вихідного графа.



Можливу нумерацію ребер графа запропоновано на рис. Далі побудуємо матрицю розмірності 20×12 , рядками перерахувавши дуги u_i , а стовпцями — вершини v_j . Розглянемо вершину v_l : вона є початком дуг u_1, u_7 та u_8 , тому у відповідних рядках стовпця v_l проставляємо одиниці. Вершина v_3 є початком дуг u_2 і u_5 і кінцем для дуги u_1 , тому у комірках матриці на перетині

u_2 , u_5 та v_3 проставляємо одиниці, а на перетині u_2 та v_3 — мінус одиниці. Продовжуючи такий розбір стовпців для інших вершин графа, отримуємо матрицю інцидентності., подану в табл.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
u_1	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_2	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
u_3	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
u_4	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0
u_5	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
u_6	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0
u_7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
u_8	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_9	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
u_{10}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0
u_{11}	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0
u_{12}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0
u_{13}	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1
u_{14}	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0
u_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1
u_{16}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0
u_{17}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1
u_{18}	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
u_{19}	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
u_{20}	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0

Завдання для самостійного виконання – задача 8.

Практичне заняття №9. «Орієнтовані графи»

Мета заняття: Розглянути способи представлення орієнтованих графів.

Теоретичні відомості

Існують два основних види графів - *орієнтовані*, в яких лінії мають напрямлення від однієї вершини до іншої, і *неорієнтовані*, в яких лінії не мають напрямку.

Визначення. Орієнтованим графом (орграфом) називається граф $D = (V, E)$, де V – множина вершин, $E \subseteq V \times V$ – множина орієнтованих ребер, або дуг.

У орієнтованих графах ряд понять співпадає з аналогічними для неорієнтованих графів.

Матриці суміжності та інцидентності. Для орграфа його бінарна матриця суміжності A в загальному випадку несиметрична: елемент $a_{ij} = 1$, якщо і тільки якщо є дуга $e = (v_i, v_j)$. Число одиниць в цій матриці дорівнює числу дуг графа. Якщо матриця суміжності орграфа D виявляється симетричною, то це означає, що для кожної дуги (v_i, v_j) в ньому є протилежно спрямована дуга (v_j, v_i) .

Поняття інцидентності для орграфів зберігається, проте в матриці інцидентності C розрізняють початок і кінець дуги. Матрицею інцидентності орграфа D називається $(n \times m)$ матриця $C(D) = (c_{ij})$, у якій

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } v_i \text{ є кінцем дуги } e_j \\ -1, & \text{якщо вершина } v_i \text{ є початком дуги } e_j \end{cases}$$

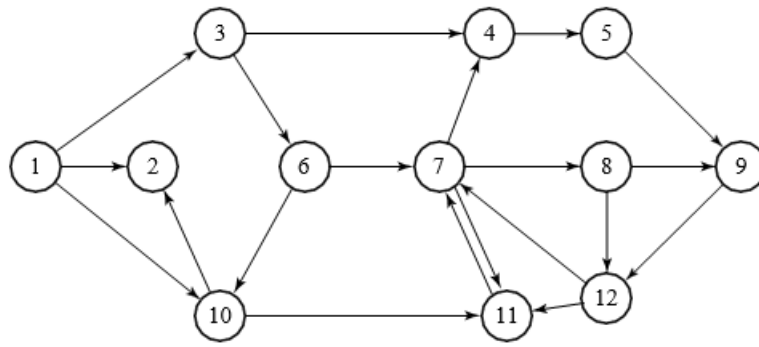
Необхідність враховувати орієнтацію дуг в орграфі призводить до розщеплення поняття "ступінь вершини" на дві частини. *Напівступені заходу* $\deg^+(v_i)$ вершини v_i називається число дуг, що входять в v_i ; *напівступені результату* $\deg^-(v_i)$ - число дуг, що виходять з неї. Напівступені результату v_i дорівнює числу одиниць в i -му рядку матриці суміжності, напівступені заходу v_i - числу одиниць в i -му стовпці матриці суміжності. Напівступені заходу і результату легко визначаються і по матриці інцидентності: сума позитивних одиниць в i -му рядку визначає напівступені заходу вершини v_i , а негативних - виходу. Загальна сума дає ступінь вершини:

$$\deg(v_i) = \deg^+(v_i) + \deg^-(v_i)$$

Отже, графи і орграфи можуть бути задані трьома способами:

- безпосереднім завданням множин вершин V і дуг E (наприклад, списком);
- матрицею суміжності та матрицею інцидентності (правда, мультиграф матрицею суміжності не може бути заданий однозначно, оскільки ця матриця не містить імен ребер);
- малюнком.

Задача. Дано орієнтований граф, заданий графічним способом



Задати граф : а) за допомогою матриці суміжності

б) за допомогою матриці інцидентності.

Розв'язок. В графі 12 вершин.

А) Побудова матриці суміжності.

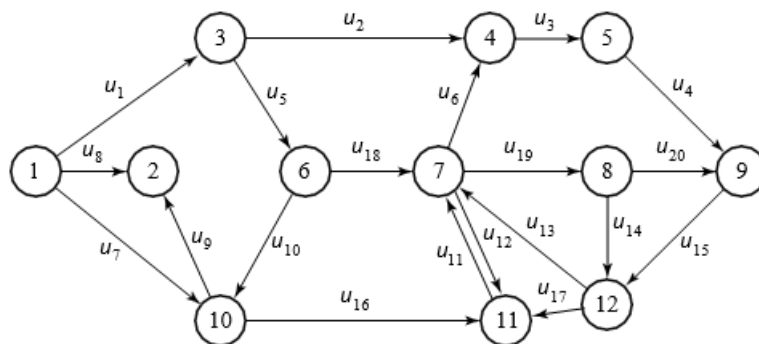
Спочатку збудуємо матрицю розмірності 12×12 , по вертикалі та горизонталі перерахувавши вершини v_i . Розглянемо вершину v_1 . Як видно з графічного представлення графа, з v_1 виходять дуги, що приходять у вершини v_2, v_3, v_{10} , тому у відповідних комірках рядка v_1 ставимо одиниці. Далі розглянемо вершину v_2 за тією ж схемою і т.д.

Продовжуючи цей алгоритм для всіх вершин, отримаємо матрицю суміжності

V	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
v_1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
v_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_3	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
v_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
v_5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
v_7	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
v_8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
v_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
v_{10}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
v_{11}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
v_{12}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0

Б) Побудова матриці інцидентності.

Спочатку потрібно пронумерувати всі дуги вихідного графа.



Можливу нумерацію ребер графа запропоновано на рис. Далі побудуємо матрицю розмірності 20×12 , рядками перерахувавши дуги u_i , а стовпцями — вершини v_j . Розглянемо вершину v_1 : вона є початком дуг u_1 , u_7 та u_8 , тому у відповідних рядках стовпця v_1 проставляємо одиниці. Вершина v_3 є початом дуг u_2 і u_5 і кінцем для дуги u_1 , тому у комірках матриці на перетині u_2 , u_5 та v_3 проставляємо одиниці, а на перетині u_1 та v_3 — мінус одиниці. Продовжуючи такий розбір стовпців для інших вершин графа, отримуємо матрицю інцидентності., подану в табл.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
u_1	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_2	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
u_3	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
u_4	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0
u_5	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
u_6	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0
u_7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
u_8	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_9	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
u_{10}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0
u_{11}	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0
u_{12}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0
u_{13}	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1
u_{14}	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0
u_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1
u_{16}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0
u_{17}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1
u_{18}	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0

u_{19}	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
u_{20}	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0

Завдання для самостійного виконання – задача 8.

Практичне заняття №10. «Ізоморфізм графів. Ступень вершин графа»

Мета заняття: Оволодіти способами визначання ізоморфізму графів та розрахунку ступеня вершин.

Теоретичні відомості

Ізоморфізм графів.

Графи і оргграфи можуть бути задані трьома способами:

- безпосереднім завданням множин вершин V і дуг E (наприклад, списком);
- матрицею суміжності та матрицею інцидентності (правда, мультиграф матрицею суміжності не може бути заданий однозначно, оскільки ця матриця не містить імен ребер);
- малюнком.

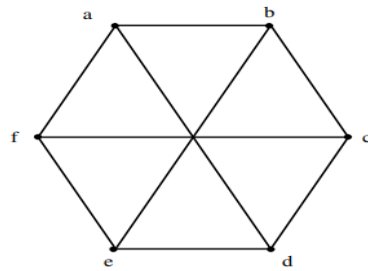
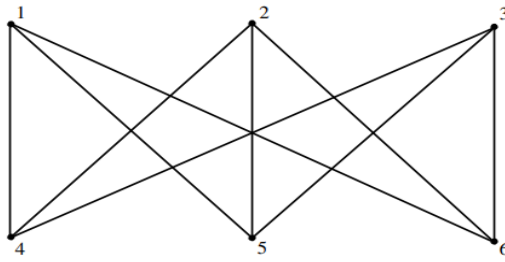
Коли два графа однакові? Для перших двох способів завдання відповідь проста: коли збігаються їх описи - списки вершин і ребер або матриці. Візуально, за малюнком, визначити, чи однакові графи, складніше. Один і той же граф можна зобразити різними малюнками, по різному розташували вершини і надавши ребрам різну геометричну форму і довжину.

Графи, які відрізняються тільки нумерацією вершин (і які, отже, при деякій іншій нумерації можна зробити однаковими), називаються *ізоморфними*. Ізоморфізм графів з невеликим числом вершин іноді можна безпосередньо побачити на малюнку, однак, в загальному випадку проблема встановлення ізоморфізму графів виявляється складною в обчислювальному відношенні задачею.

Визначення. Два простих графа $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ називаються ізоморфними, якщо існує бієкція між множинами вершин:

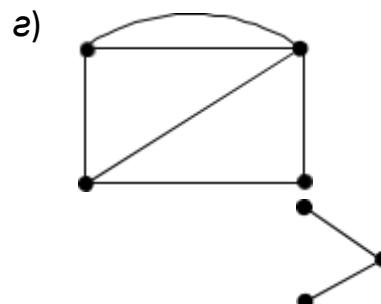
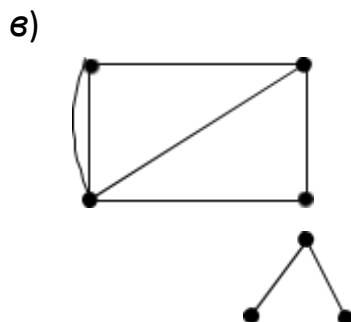
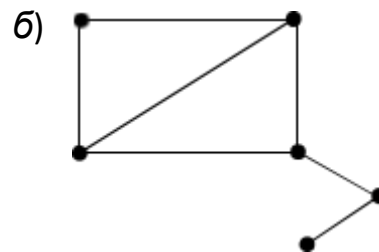
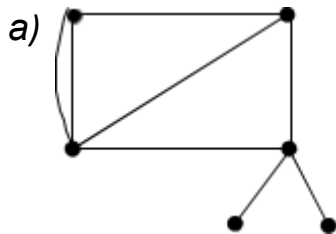
$\varphi : V_1 \leftrightarrow V_2$, така, що вершини $v, v_1 \in V_1$ суміжні $\Leftrightarrow$ вершини $\varphi(v), \varphi(v_1) \in V_2$ суміжні

Приклад: Розглянемо два графи G_1 і G_2 .



Обидва вони є графами степеня 3 і як бачимо картинки суттєво різняться, але насправді ці графи ізоморфні. Ізоморфізм визначає наступна бієкція $\varphi : 1 \rightarrow a, 2 \rightarrow c, 3 \rightarrow e, 4 \rightarrow f, 5 \rightarrow d, 6 \rightarrow b$.

Задача. Які з наведених графів ізоморфні?



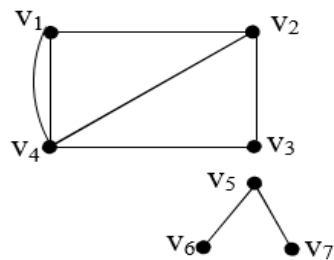
Розв'язок. Ізоморфні графи мають однакову кількість вершин. Тому треба порівнювати графи *a* та *б*, а також *в* та *г*. Але граф *a* має дві висячі вершини, а граф *б* – одну. Тому вони не можуть бути

ізоморфними.

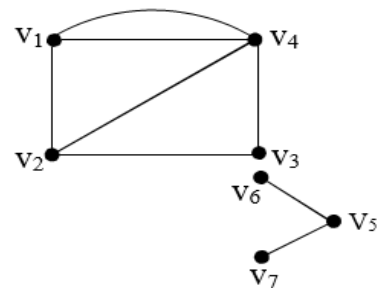
Розглянемо графи ϵ і z . Кількість вершин і кількість ребер у них однакові. Обидва графи мають по дві висячі вершини. Позначимо вершини графів і знайдемо відповідні вершини, враховуючи степені вершин.

Матриці суміжності обох графів мають вигляд:

ϵ)



z)



ϵ

0	1	0	2	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	0

Відповідь: ϵ і z
ізоморфними.

Степень вершин графа.

Число ребер, інцидентних вершині v_i графа (орграфа, мультиграфа), називається ступенем цієї вершини і позначається $\deg(v_i)$. Степень вершини можна визначити за матрицями інцидентності і суміжності. Степень вершини v_i дорівнює числу одиниць в i -му рядку матриці інцидентності або матриці суміжності.

Сума ступенів усіх вершин дорівнює подвоєному числу ребер, оскільки кожне ребро бере участь в степенях двох вершин, тобто вважається в цій сумі два рази.

Вершина, ступінь якої дорівнює 1, називається кінцевою, або висячою. Граф називається однорідним ступені k , якщо ступені всіх його вершин дорівнюють k .

Задача 1. Визначити ступінь кожної вершини графа G , який зображений на рисунку 1.

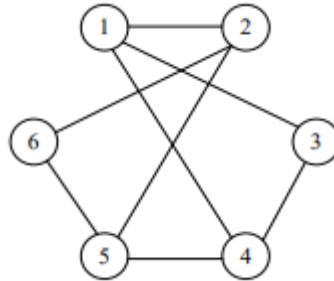


Рисунок 1 – Граф G

Розв'язок.

Ступені вершин визначаються кількістю ребер, які їй інцидентні. Тому:
 $\delta(1) = \deg 1 = 3$; $\delta(2) = \deg 2 = 3$; $\delta(3) = \deg 3 = 2$; $\delta(4) = \deg 4 = 3$; $\delta(5) = \deg 5 = 3$; $\delta(6) = \deg 6 = 2$.

Необхідність враховувати орієнтацію дуг в орграфі призводить до розщеплення поняття "ступінь вершини" на дві частини. *Напівступені заходу* $\deg^+(v_i)$ вершини v_i називається число дуг, що виходять з v_i ; *напівступені результату* $\deg^-(v_i)$ - число дуг, що входять в неї. Напівступені результату v_i дорівнює числу одиниць в i -му рядку матриці суміжності, напівступені заходу v_i - числу одиниць в i -му стовпці матриці суміжності. Напівступені заходу і результату легко визначаються і по матриці інцидентності: сума позитивних одиниць в i -му рядку визначає напівступені заходу вершини v_i , а негативних - виходу. Загальна сума дає ступінь вершини:

$$\deg(v_i) = \deg^+(v_i) + \deg^-(v_i)$$

Задача 2. Для орієнтованого графа G , який зображений на рис. 2., для кожної вершини визначити півступені «виходу і заходу» (додатний ступінь і від'ємний ступінь), ступінь вершини.

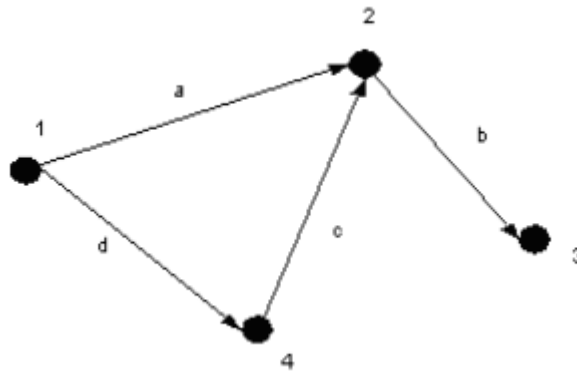


Рисунок 2 – Орієнтований граф G

Розв'язок. Додатний степінь вершини $\deg^+(v_i)$ – число дуг, що починаються у вершині x . Від'ємний степінь вершини $\deg^-(v_i)$ – число дуг, що закінчуються у вершині x . Степінь вершин графа G дорівнює

$$\deg(v_i) = \deg^+(v_i) + \deg^-(v_i)$$

Для графа G додатні степені усіх вершин такі: $\deg^+(1)=2$, $\deg^+(2)=1$, $\deg^+(3)=0$, $\deg^+(4)=1$

Від'ємні степені усіх вершин графа G такі: $\deg^-(1)=0$, $\deg^-(2)=2$, $\deg^-(3)=1$, $\deg^-(4)=1$

Степені вершин графа G :

$$\deg(1) = \deg^+(1) + \deg^-(1) = 2 + 0 = 2$$

$$\deg(2) = \deg^+(2) + \deg^-(2) = 1 + 2 = 3$$

$$\deg(3) = \deg^+(3) + \deg^-(3) = 0 + 1 = 1$$

$$\deg(4) = \deg^+(4) + \deg^-(4) = 1 + 1 = 2$$

Завдання для самостійного виконання – задача 9.

Практичне заняття №11. «Підрахунок кількості компонент зв'язності у неорієнтованому графі. »

Мета заняття: Оволодіти правилами підрахунку кількості компонент зв'язності у графі.

Теоретичні відомості

Кінцева послідовність ребер виду $\{v_0, v_1\}$, $\{v_1, v_2\}$, ..., $\{v_{m-1}, v_m\}$ називається простим незамкненим ланцюгом, якщо всі вершини v_0, v_1, v_2 , ..., v_m різні. Неорієнтований граф G називається зв'язним, якщо для будь-яких двох різних вершин v_1 та v_2 існує простий незамкнений ланцюг з v_1 до v_2 . Будь-який граф можна розбити на зв'язні граfi, що не

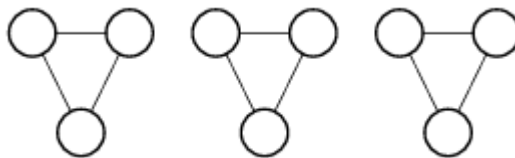
перетинаються, звані компонентами або компонентами зв'язності графа G . У середині кожної компоненти буде виконуватися визначення зв'язності графа. Таким чином, незв'язний граф має більше однієї (дві чи більше) компоненти. Зв'язний граф завжди, за визначенням, складається з однієї компоненти.

Якщо у графі $G = (V, U)$ n вершин і m ребер, тоді в ньому не менше $(n - m)$ зв'язкових компонентів. Якщо при цьому G немає циклів, то граф складається рівно з $(n - m)$ зв'язкових компонентів. З цього випливає, що якщо $m \leq n - 2$, то будь-який граф з n вершинами і m ребрами незв'язний. Очевидно, що зв'язний граф є простим циклом тоді і лише тоді, коли кожна вершина має ступінь 2.

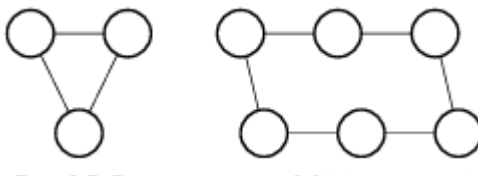
Задача. Скільки може бути компонент зв'язності у регулярного графа на дев'яти вершинах ступеня 2?

Розв'язок: Задачі на визначення числа компонент зв'язності зручно розв'язувати починаючи з оцінки знизу. Спочатку визначимося з кількістю ребер у вихідному графі, воно дорівнює половині сумарного ступеня всіх вершин, тобто, 9. Якщо всі вершини мають ступінь 2, це один простий цикл чи кілька простих циклів. Отримали, що цей граф може бути зв'язаний.

Далі задача вирішується повним перебором можливих варіантів: один цикл, два цикли, три цикли. Більше трьох циклів на дев'яті вершинах збудувати не можна. Найгіршим з точки зору зв'язності є випадок, показаний на рис. 1.



Тепер необхідно визначитися з можливістю побудови графів із числом компонент зв'язності, рівним двом. Приклад такого графа представлено на рис. 2



Необхідно також зауважити, що таких графів може бути декількох, але для доказу можливості побудови графа, що задовольняє заданим характеристикам, достатньо всього одного прикладу, приклад зв'язкового графа, тобто графа з числом компонент зв'язності, рівним одиниці, він є простий цикл на дев'яти вершинах.

Відповідь. Число компонент зв'язності може дорівнювати 3, 2 або 1

Завдання для самостійного виконання – задача 10.

Практичне заняття №12. «Задачі на знаходження діаметру, радіуса та центрів графа»

Мета заняття: Отримати розуміння поняттям діаметру, радіуса та центрів графа.

Теоретичні відомості

Визначення У неорієнтованому графі відстанню $d(v_i, v_j)$ між вершинами v_i і v_j називається мінімальна з довжин простих ланцюгів, що зв'язують ці вершини. Оскільки за визначенням кожна вершина пов'язана сама з собою, то $d(v_i, v_i)=0$.

Відстань $d(v_i, v_j)$ задовольняє аксіомам метрики:

$d(v_i, v_j) \geq 0$, причому $d(v_i, v_j) = 0$, якщо і тільки якщо $v_i = v_j$;

$d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$;

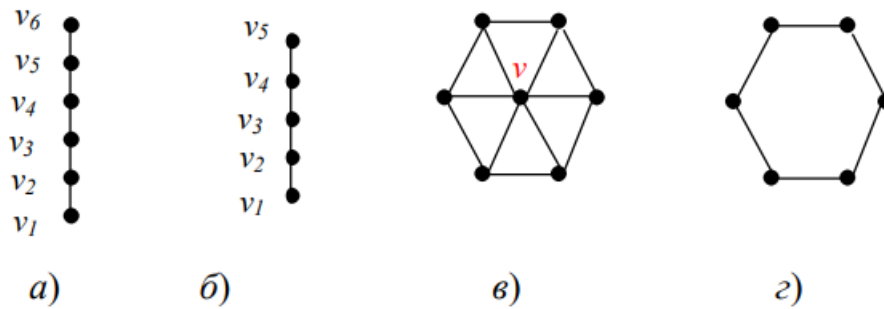
$d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) \geq d(v_i, v_k)$ (нерівність трикутника).

Визначення. Діаметром $d(G)$ графа G називається максимальна з відстаней між його вершинами:

$$d(G) = d(v_i, v_j)$$

Максимальним видаленням від вершини v_i називається величина $r(v_i) = d(v_i, v_j)$. Вершина v називається центром графа G , якщо $r(v)$ мінімально серед інших вершин графа: $r(v) = r(v_i)$. Максимальне видалення $r(v)$ від центру v називається радіусом графа G і позначається $r(G)$. Вершини з максимальним видаленням $r(v)$, що співпадає зі значенням діаметру, називаються периферіями.

Число центрів і співвідношення між радіусом і діаметром в графі можуть бути різними. У повному неорієнтованому графі діаметр і радіус рівні одиниці, і всі вершини – центри, і одночасно периферії. Якщо граф G - простий ланцюг з непарним числом $2n + 1$ вершин, то $n + 1$ -а від початку вершина - єдиний центр, $d(G) = 2n$, $r(G) = n$. Якщо ж граф G - простий ланцюг з парним числом $2n$ вершин, то n -а і $n + 1$ -а від початку вершини - два центри, $d(G) = 2n - 1$, $r(G) = n - 1$. Периферіями в обох випадках будуть перша і остання вершини.



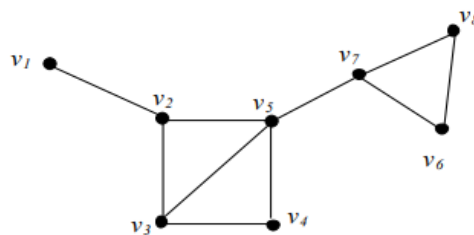
Приклади графів.

Рисунок 1

Приклад.

Діаметр графа на рис.1 а) дорівнює 5, радіус - 3; в графі два центри: вершини v_3, v_4 . Діаметр графа на рис.1 б) дорівнює 4, радіус - 2; вершина v_3 - центр графа. У графі на рис.1 в) топологічно еквівалентній окружності, діаметр $d(G) = 2$, радіус $r(G) = 1$, тобто діаметр, як і в колі, в два рази більше радіуса; вершина v - центр. У графі на рис.1 г) $d(G) = 3$, радіус $r(G) = 3$, і всі вершини - центри.

Задача. Побудуємо матрицю відстаней для графа, що зображено на рисунку



Точки зчленування в неорієнтованому графі.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	$r(v_i)$
v_1	0	1	2	3	2	4	3	4	4
v_2	1	0	1	2	1	3	2	3	3
v_3	2	1	0	1	1	3	2	3	3
v_4	3	2	1	0	1	3	2	3	3
v_5	2	1	1	1	0	2	1	2	2
v_6	4	3	3	3	2	0	1	1	4
v_7	3	2	2	2	1	1	0	1	3
v_8	4	3	3	3	2	1	1	0	4

Знаходимо максимальні віддалення та визначаємо діаметр $d=4$ та радіус графа $r=2$; відповідно центр - v_5 , а периферії - v_1, v_6, v_8 .

Практичне заняття №13. «Задачі на визначення наявності ейлерових та гамільтонових циклів в графах»

Мета заняття: Оволодіти поняттям ейлерових та гамільтонових циклів в графах

Теоретичні відомості

Зв'язний граф G називається ейлеровим, якщо в ньому існує цикл, що містить усі ребра графа рівно по одному разу. Якщо граф G має ейлеровий цикл, то він є зв'язним, а все його вершини – парними. Таким чином, існує дуже простий критерій, що дозволяє визначити, чи є граф ейлеровим. Якщо граф G - зв'язний і всі його вершини мають парний ступінь, то він має ейлерів цикл.

Оцінка мінімальної кількості ребер m^* , видалення яких робить граф ейлеровим, в загальному випадку завжди виробляється на основі особи непарних вершин n^* за формулою

$$m^* \geq \frac{n^*}{2}$$

Важливо відзначити, що не може виникнути ситуації, за якої n^* — число непарне, оскільки сумарний рівень вершин графа завжди парна, а значить, вершин з непарними ступенями завжди парное число. Формула дає саме нижню оцінку.

Граф G називається гамільтоновим, якщо в ньому існує цикл, містить усі вершини графа рівно по одному разу. Відомі два критерію, що дозволяють визначити наявність гамільтонового циклу у графі. Якщо у простому графі з n вершинами, причому $n \geq 3$, виконується умова

$$s(v) \geq \frac{n}{2}$$

для будь-якої вершини v , то граф G є гамільтоновим.

Нехай n – кількість вершин у даному графі. Якщо для будь-якої пари несуміжних вершин (v_i, v_j) виконано нерівність

$$s(v_i) + s(v_j) \geq n,$$

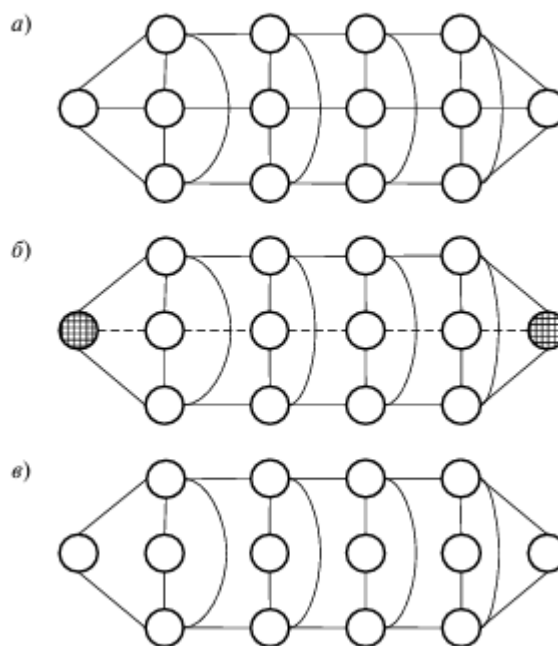
то граф є гамільтоновим.

Нестача обох критеріїв полягає в тому, що навіть якщо жодна з цих умов не виконується, граф може виявитися гамільтоновим

Задача . Визначити, чи є граф (рисунок) ейлеровим, і якщо ні - вказати з достатнім обґрунтуванням, видалення якого мінімальної кількості ребер робить граф ейлеровим.

Розв'язок. Перше, що необхідно зробити, - це перевірити критерій ейле

ровності, а саме парність вершин графа. Як видно із рис. а, у графі з $n = 14$ вершин дві мають непарний ступінь. Зручно для вирішенні задачі на малюнку заштрихувати вершини, які мають непарний ступінь. Оскільки видалення одного ребра може змінити ступінь двох вершин, то, якщо видаляти попарно несуміжні ребра, що з'єднують лише непарні вершини, мінімально можливе кількість таких кандидатів на вилучення буде $2/2 = 1$. Потрібно пробувати знайти попарно несуміжні ребра, що з'єднують саме вершини непарного ступеня. В даному випадку це неможливо, тому, починаючи з правої непарної вершини, видаляємо горизонтальні центральні ребра, поки не дійдемо до лівої непарної вершини рис.в.



Таким чином, хоча вихідний граф мав лише дві вершини непарного ступеня, щоб граф став ейлеровим, необхідно видалити п'ять ребер.

Завдання для самостійного виконання – задача 12.

Практичне заняття №14-15. «Дерева. Побудова мінімального дерева методом Краскала»

Мета заняття: Отримати розуміння поняття дерева та оволодіти алгоритмом побудови мінімального дерева методом Краскала.

Теоретичні відомості

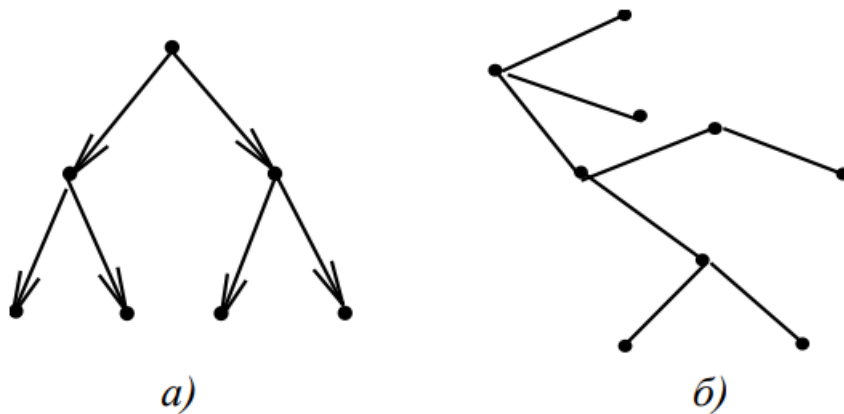
Дерева

Визначення. Зв'язний неорієнтований граф без циклів називається неорієнтованим деревом. Незв'язний граф, що складається з декількох дерев, називається лісом.

Визначення. Зв'язний орграф, що не містить циклів, в якому тільки одна вершина не має входних дуг, а всі інші вершини мають по одній дузі, що входить, називається орієнтованим, або спрямованим деревом.

Визначення. Вершина, яка не має входних дуг, називається коренем дерева. Вершини, які не мають дуг, що виходять, називаються кінцевими, або термінальними, або листям. Проміжні вершини, що лежать між коренем і листям, називаються транзитними.

Орієнтовані дерева часто зображують без стрілок, попередньо обумовивши, що це зростаюче вниз (або вгору) дерево. На рис. 1 а) зображено зростаюче вниз дерево, на рис.6 б) – неорієнтоване дерево



Приклади дерев.

Рис.1

Наступна теорема описує основні властивості дерев.

Теорема

1. У будь-якому дереві є, принаймні, дві кінцеві вершини (вершини ступеня 1).
2. Між будь-якими двома вершинами дерева є рівно один шлях.
3. Число ребер у дереві з n вершинами дорівнює $n - 1$.

З одного неорієнтованого дерева з n вершинами можна отримати рівно n різних орієнтованих дерев, так як вибір різних коренів завжди дає різні ордеревья. Однак різні ордеревья, отримані з одного і того ж дерева, можуть виявитися ізоморфними

Дерева відображають ієрархічні структури, наприклад, за допомогою дерева можна уявити ієрархію службових положень в деякій організації, ієрархію понять деякої предметної області, родинні стосунки (генеалогічне дерево) і т.п.

Алгоритм Краскала

Нехай задано зв'язний зв'язний граф з n вершинами.

Задача: побудувати для цього графа зв'язний підграф, який є деревом з мінімальною сумарною вагою ребер.

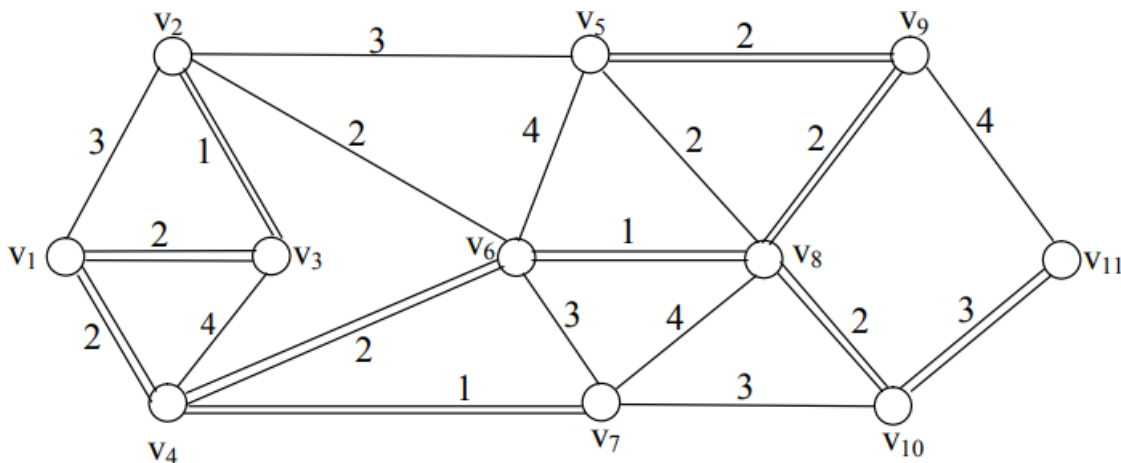
Розв'язок цієї задачі про мінімальне дерево може бути отримано за допомогою алгоритму Краскала.

Алгоритм:

1. Обираємо найкоротше ребро e_1 графа G , потім ребро e_2 , найкоротше з тих, що залишилися.
2. Із ребер, що залишилися, обираємо найкоротше ребро таким чином, щоб воно не утворювало циклу з вибраними раніше ребрами.
3. Продовжуємо цей процес і на k -му кроці він закінчується ($k = n-1$). Залишаємо тільки обрані ребра. Це й є шукане дерево.

Приклад: Побудувати мінімальне дерево для зв'язного графа $G(V,E)$ за алгоритмом Краскала.

Розв'язання.



1. Обираємо найкоротше ребро, наприклад (v_2, v_3) з довжиною 1 і позначаємо іншим кольором або двома рисками.
2. Обираємо найкоротше ребро з тих, що залишилися, наприклад (v_4, v_7) .
3. За таким же принципом обираємо дуги (v_6, v_8) , (v_1, v_3) , (v_1, v_4) , (v_4, v_6) , (v_5, v_9) , (v_8, v_9) , (v_8, v_{10}) , (v_{10}, v_{11}) . При цьому треба уважно дивитись, щоб не утворювалося циклів.

Сумарна довжина ребер дорівнює 18.

Завдання для самостійного виконання – задача 13.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

ЗАДАЧА 1.

Видаливши з множин A , B , C і D вказані елементи,
записати множини, одержані після виконання операцій над множинами,

вказаними у задачі.

Вважаємо, що:

$$U = A \cup B \cup C \cup D,$$

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \},$$

$$B = \{ 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 \},$$

$$C = \{ 11, 12, 13, 14, 15, 16 \},$$

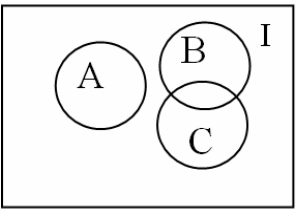
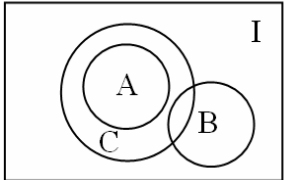
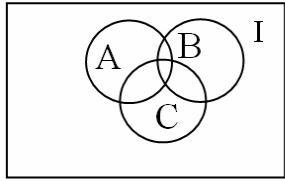
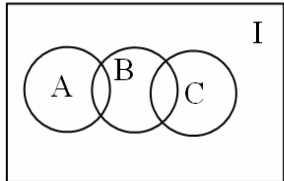
$$D = \{ 1, 2, 3, 4, 14, 15, 16 \}.$$

№	A	B	C	D	Операції
1	3, 6	11, 12, 13	12, 16	3, 15	$\overline{A} \cup B, A \setminus (\overline{B} \cap D), \overline{\overline{A} \cup C}$
2	3, 4	4, 5, 11	14, 16	15, 16	$\overline{B \cup A}, A \cup (D \setminus \overline{C}), \overline{\overline{A \cup C}}$
3	6, 7	10, 11, 12	11, 12, 16	2, 3, 15	$\overline{\overline{B} \cap D}, \overline{B} \setminus (B \cap D), A \cup (A \cap C)$
4	7, 8	10, 11, 12	14, 15	2, 3, 14, 15	$\overline{\overline{A} \setminus D}, \overline{A} \setminus (B \setminus D), A \cup (\overline{A} \cup B)$
5	1, 8	7, 13	12, 13	3, 4, 14	$\overline{A} \cap B, A \cup (B \cap \overline{C}), (A \cap \overline{D}) \cup (B \cap C)$
6	2, 5	4, 6	14, 15, 16	4, 14	$A \cup B, A \setminus (B \cap C), (\overline{A} \cap D) \cup (\overline{B} \cap C)$
7	2, 7	4, 8	11, 12, 13	2, 16	$\overline{A} \cup B, A \setminus (\overline{B} \cap C), (A \cap \overline{D}) \cup (\overline{A} \cap C)$
8	2, 8	4, 9	14, 16	3, 15	$A \cup \overline{B}, A \setminus (B \setminus C), (B \cap \overline{C}) \cap (C \cap \overline{D})$
9	4, 5	4, 10	11, 12	4, 14	$\overline{A} \cup \overline{B}, \overline{A} \setminus (B \setminus C), (A \cap \overline{B}) \cup (C \cap \overline{D})$
10	4, 7	4, 11	13, 14	14, 15	$A \cap \overline{C}, A \setminus (\overline{B} \cup \overline{C}), (A \cap B) \cup (\overline{B} \cap \overline{D})$
11	4, 8	4, 12	14, 15, 16	14, 16	$\overline{A} \cap C, \overline{A} \cup (\overline{B} \setminus \overline{C}), (B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{D})$
12	5, 6	1, 13	11, 12, 13	1, 2, 4	$A \cup C, A \setminus (\overline{B} \cap C), (\overline{C} \cap B) \cup (D \cap A)$
13	5, 7	5, 6, 7	14, 15, 16	1, 4, 14	$A \cap C, D \cup (\overline{C} \setminus B), (B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})$
14	5, 8	4, 5, 6, 7	12, 13	2, 4, 15	$\overline{B} \cap C, D \cup (A \setminus \overline{B}), (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{C} \cap D)$
15	6, 8	4, 5, 6, 7, 8	15, 16	3, 14, 16	$B \cap \overline{C}, B \cup (\overline{C} \setminus D), (A \setminus B) \cup (\overline{C} \cap D)$
16	7, 8	5, 6, 9	13, 14	2, 14	$\overline{B} \cap C, B \cup (\overline{A} \setminus D), (\overline{B} \setminus A) \cup (C \cap D)$

17	1, 3	10, 11	14, 15	2, 3, 4	$\bar{B} \cap \bar{C}, A \cup (\bar{B} \setminus C), (\bar{B} \setminus A) \cup (\bar{C} \cap D)$
18	2, 5	10, 11, 12	11, 12	14, 15	$A \cap \bar{D}, \bar{A} \cup (\bar{B} \cap \bar{D}), (C \setminus \bar{A}) \cup (D \cap B)$
19	3, 6	11, 12, 13	12, 16	3, 15	$\bar{A} \cap D, C \cap (\bar{B} \setminus A), (C \cap \bar{A}) \cap (D \cup \bar{B})$
20	4, 7	6, 11	11, 15	1, 2, 4	$\bar{A} \cap \bar{D}, C \cap (B \setminus \bar{A}), (C \setminus \bar{A}) \cup (\bar{D} \cup A)$
21	5, 8	7, 12	13, 16	2, 3, 4	$\bar{A} \cup D, D \setminus (A \setminus \bar{B}), (A \setminus C) \cup (\bar{A} \setminus C)$
22	1, 2	5, 11, 12	13, 15	14, 15, 16	$\bar{A} \cup \bar{D}, D \setminus (\bar{C} \setminus \bar{D}), (B \setminus D) \cup (D \setminus \bar{B})$
23	3, 4	4, 5, 11	14, 16	15, 16	$B \cap D, \bar{D} \cup (B \cup \bar{C}), (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
24	2, 6	4, 12	12, 15	14, 15, 16	$\bar{B} \cap D, D \cup (B \setminus C), (A \setminus B) \cap (\bar{B} \setminus A)$
25	3, 6	10, 11	12, 16	1, 2, 3, 4	$B \cap \bar{D}, A \setminus (B \cup \bar{D}), (\bar{A} \setminus C) \cap (\bar{C} \setminus A)$
26	5, 6	8, 10	11, 15	4, 14	$B \cup D, (A \setminus \bar{B}) \cap \bar{C}, (C \setminus A) \cup \bar{B}$
27	5, 7	9, 10, 12	11, 16	3, 4, 14	$B \cup \bar{D}, \bar{A} \setminus C \setminus D, (D \setminus \bar{B}) \cap C$
28	6, 7	10, 11, 12	11, 12, 16	2, 3, 15	$\bar{B} \cup \bar{D}, C \setminus \bar{A} \setminus \bar{D}, (\bar{C} \setminus B) \cap D$
29	2, 8	11, 12, 13	11, 12, 13	1, 2, 3, 14	$C \cap D, C \cup (\bar{A} \setminus D), (A \cup \bar{B}) \setminus C$
30	7, 8	10, 11, 12	14, 15	2, 3, 14, 16	$\bar{A} \cap \bar{D}, (\bar{C} \setminus D) \cap A, (\bar{A} \cup B) \setminus C$

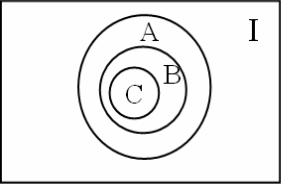
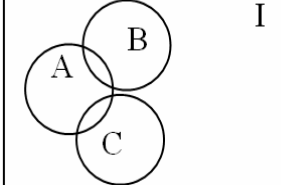
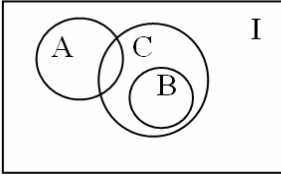
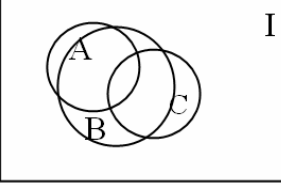
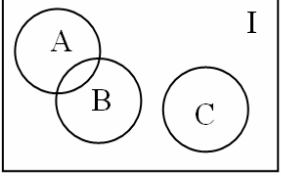
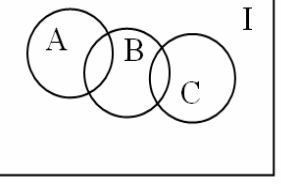
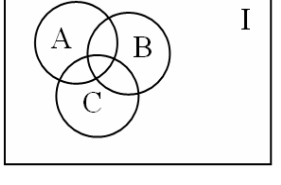
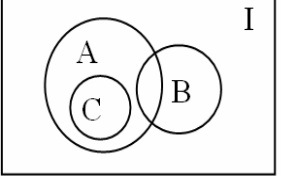
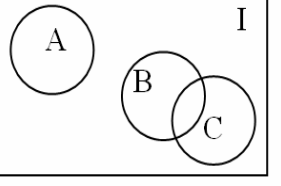
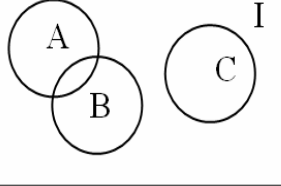
ЗАДАЧА 2

Задача 2.1. Виконати операції над трьома множинами та закреслити результат на діаграмі Ейлера – Венна

№	Умова	№	Умова
1	 $(A \setminus \bar{B}) \cap \bar{C}$	16	 $(A \oplus C) \cap \bar{B}$
2	 $(A \oplus \bar{B}) \cup \bar{C}$	17	 $(A \oplus C) \cap \bar{B}$

3		$\overline{A \cup B} \cap C$	18		$A \cup \overline{B} \cap C$
4		$A \cup \overline{B} \cap C$	19		$(B \oplus C) \cup \overline{A}$
5		$(\overline{A \oplus B}) \cap C$	20		$(B \cap \overline{C}) \setminus \overline{A}$

6		$\overline{A \cup \overline{B}} \cap \overline{C}$	21		$(A \setminus C) \cap \overline{B}$
7		$\overline{A \cup B} \cap C$	22		$(A \oplus C) \cup B$
8		$\overline{A} \cap (B \oplus \overline{C})$	23		$\overline{C} \setminus (A \cap \overline{B})$
9		$A \cap \overline{C} \cup \overline{B}$	24		$(A \cup B) \setminus \overline{C}$
10		$(\overline{A \oplus C}) \cap \overline{B}$	25		$\overline{A} \setminus (B \setminus C)$

11		$A \cup B \cap \bar{C}$	26		$A \cup B \cap \bar{C}$
12		$(A \oplus \bar{C}) \cup B$	27		$(A \cap \bar{B}) \cap C$
13		$(A \setminus B) \cap \bar{C}$	28		$(A \oplus B) \cap \bar{C}$
14		$(\bar{A} \oplus B) \cup C$	29		$(\bar{A} \cap B) \cup \bar{C}$
15		$A \setminus (\bar{B} \oplus \bar{C})$	30		$\bar{B} \cap A \cup \bar{C}$

Задача 2.2. Дано дві множини M та N. Записати $M \times N$, $M \times M$, $N \times N$, $N \times M$.

№	Множини	№	Множини
1	$M = \{1; 3; 7; 22\}; N = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, r\}$	16	$M = \{7; 9; 15\}; N = \{y; e; \epsilon; \bar{\delta}\}$
2	$M = \{a; b; c\}; N = \{m; n; p; q\}$	17	$M = \{100; 200; 300\}; N = \{a; b; c; d\}$
3	$M = \{-1; 2; 4; 7\}; N = \{3; 5\}$	18	$M = \{r; s; p; q\}; N = \{1; 7; 13\}$
4	$M = \{3; 5; 8\}; N = \{l; m; n; p\}$	19	$M = \{2; 6; 13; 18\}; N = \{a; b; c\}$
5	$M = \{x; y; z; w\}; N = \{1; 3; 7\}$	20	$M = \{1; 4; 10; 11\}; N = \{0; 2; 3\}$

6	$M=\{0; \pi; e\}; N=\{p; q; r; s\}$	21	$M=\{3; 7; 9; 11\}; N=\{0; 10; 20\}$
7	$M=\{1; 2; 3\}; N=\{m; n; p\}$	22	$M=\{-1; 0; 1\}; N=\{k; e; m; n\}$
8	$M=\{3; 7; 11; 34\}; N=\{a; b; c; d\}$	23	$M=\{a; b; c; d\}; N=\{p; q; r\}$
9	$M=\{0,5; 2; 3; 3,3\}; N=\{k; r; l\}$	24	$M=\{\alpha; \beta; \gamma; \delta\}; N=\{-2; 1; 2\}$
10	$M=\{17; 18; 19; 20\}; N=\{7; 8; 9\}$	25	$M=\{1; 3; 8\}; N=\{2; 4; 6; 7\}$
11	$M=\{14; 22; 100\}; N=\{s; m; n; p\}$	26	$M=\{5; 6; 13; 17\}; N=\{\alpha; \beta; \gamma\}$
12	$M=\{3; 5; 7\}; N=\{p; q; r\}$	27	$M=\{1; 2; 3; 4\}; N=\{k; p; r\}$
13	$M=\{l; m; p; n\}; N=\{1; 7; 12\}$	28	$M=\{a_1; a_2; a_3; a_4\}; N=\{-2; 0; 2\}$
14	$M=\{\pi, \phi, \chi, \psi\}; N=\{4; 3; 2\}$	29	$M=\{3; 4; 9; 11\}; N=\{2; 5; 6\}$
15	$M=\{r; s; t; f\}; N=\{1; 4; 7\}$	30	$M=\{b; d; f; k\}; N=\{7; 10; 13\}$

ЗАДАЧА 3.

На множині A задане відношення R_1, R_2 . Записати R_1 та R_2 , перерахуванням пар, графами. Визначити: які мають властивості R_1 та R_2 , до яких видів відносяться. Виконати операції $R_1 \oplus R_2, R_1 \setminus R_2, R_1 \circ R_2$ та подати у вигляді графів та перерахуванням пар.

№	Умова	№	Умова
1	$A=\{2; 3; 6; 8; 27\}$ R_1 – «бути дільником», R_2 – «бути більше».	16	$A=\{-3; -1; 1; 2; 3\}$ R_1 – «бути порівняними за модулем 2», R_2 – «бути більше на 4 одиниці».
2	$A=\{21; 22; 23; 27; 28\}$ R_1 – «бути менше на одиницю», R_2 – «бути порівняними за модулем 2».	17	$A=\{0,5; \sqrt{2}; 3; \sqrt{10}; \sqrt{14}\}$ R_1 – «мати однакову цілу частину», R_2 – «менше».
3	$A=\{3; 4; 6; 7; 8\}$ R_1 – «бути більше вдвічі», R_2 – «бути більше».	18	$A=\{4; 6; 9; 11; 12\}$ R_1 – «бути порівняними за модулем 2», R_2 – «менше на 3».
4	$A=\{1,1; \sqrt{2}; 2; e; \sqrt{6}\}$:	19	$A=\{1; 2; 3; 4; 6; 7\}$

	$e \approx 2,718$ R1 – «мати однакову цілу частину», R2 – «більше чи дорівнює».		R1 – «бути менше», R2 – «бути дільником»
5	$A=\{2; 6; 18; 54\}$ R_1 – «бути втричі менше», R_2 – «бути більше».	20	$A=\{1; 2; 4; 5; 7; 8\}$ R1 – «бути більше на одиницю», R2 – «бути менше на 2».
6	$A=\{1; 3; 4; 6; 7; 9\}$ R_1 – «мати однаковий залишок при діленні на 3», R_2 – «більше».	21	$A=\{3; 5; 8; 100; 115\}$ R1 – «бути порівняними за модулем 5», R2 – «менше»
7	$A=\{-2; 0; 1; 8; 9\}$ R_1 – «бути порівняними за модулем 2», R_2 – «більше».	22	$A=\{2; 5; 6; 10; 20; 25\}$ R1 – «ділитись без залишку на 5», R2 – «менше на 10».
8	$A=\{4; 9; 10; 12; 18; 19\}$ R_1 – «бути порівняними за модулем 2», R_2 – «бути кратним 3».	23	$A=\{-2; -1; 0; 0,5; 1; 2\}$ R1 – «бути рівним за модулем», R2 – «бути більше».
9	$A=\{1; 4; 7; 12; 15; 18\}$ R_1 – «бути більше на 3 одиниці», R_2 – «бути менше на 6 одиниць».	24	$A=\{4; 6; 8; 12; 14; 16\}$ R1 – «бути менше в два рази », R2 – «бути порівняними за модулем 4»
10	$A=\{4; 5; 6; 10; 12; 15\}$ R_1 – «бути дільником», R_2 – «бути менше».	25	$A=\{2; 3; \sqrt{5}; 7; \sqrt{11}\}$ R1 – «мати однакову цілу частину», R2 – «більше».
11	$A=\{1; 3; 4; 9; 16\}$ R_1 – «бути більше в 4 рази», R_2 – «бути більше».	26	$A=\{3; 5; 6; 8; 11; 12\}$ R1 – «бути порівняними за модулем 3», R2 – менше».
12	$A=\{2; 5; 6; 8; 9\}$ R_1 – «не дорівнює », R_2 – «менше на 3 одиниці».	27	$A=\{2; 3; 4; 6; 9\}$ R1 – «бути дільником», R2 – «більше»
13	$A=\{1; 2,1; 2,7; 3,3; 4;\sqrt{17}\}$ R_1 – «мати однакову цілу частину»,	28	$A=\{4; 6; 8; 12; 14; 16\}$ R1 – «бути вдвічі більше», R2 – «бути порівняними за модулем 4».

	R_2 – «менше».		
14	$A = \{-2; 1; 2; 3; 6; 12\}$ R_1 – «бути більше на 4», R_2 – «бути вдвічі менше».	29	$A = \{0; 3; 4; 6; 7; 9; 12\}$ R_1 – «бути порівняними за модулем 3 », R_2 – «бути дільником».
15	$A = \{2; 4; 5; 7; 11; 15\}$ R_1 – «бути меншим на 3», R_2 – «бути більше».	30	$A = \{3; \pi; 5; 6; 9; 10; 12\}$ R_1 – «ділиться без залишку на 3», R_2 – «менше»

ЗАДАЧА 4.

Задача 4.1.

1. У слові НІЯУ МІФІ змінюють місцями літери та пробіл. Чому дорівнює кількість всіх можливих різних слів?
2. У слові СКАНЕР вибирають по дві літери (усі літери різні) і становлять із них слова. Скількома способами це можливо зробити?
3. У слові НІЯУ МІФІ обирають по дві літери (усі літери різні) і становлять із них слова. Скількома способами це можливо зробити?
4. У слові SHUT змінюють місцями літери. Чому дорівнює кількість всіх можливих різних слів?
5. У слові ДЕРЖАВА змінюють місцями літери. Чому дорівнює кількість всіх можливих різних слів?
6. У слові КНИГИ змінюють місцями літери. Чому дорівнює кількість всіх можливих різних слів?
7. У слові КЛІКА змінюють місцями літери. Чому дорівнює кількість всіх можливих різних слів?
8. Чому дорівнює кількість різних способів вибору (порядок не має значення) 4 томів з 7-томного збірника творів?
9. Чому дорівнює кількість різних трилітерних комбінацій, які можна скласти з літер слова ПИСЬМО (усі літери у комбінації різні)?
10. Чому дорівнює кількість різних способів вибору (порядок не має значення) 3 томів з 9-томного збірника творів?
11. Чому дорівнює кількість різних дволітерних комбінацій, які можна скласти з літер слова КОМАР (усі літери у комбінації різні)?

12. Чому дорівнює кількість різних способів вибору (порядок не має значення) 4 томів з 10-томних збірника творів?
13. Чому дорівнює кількість різних дволітерних комбінацій, які можна скласти з літер слова ЩАСТЯ (усі літери у комбінації різні)?
14. Чому дорівнює кількість різних способів вибору (порядок не має значення) 2 томів з 7-томного збірника творів?
15. Чому дорівнює кількість різних трилітерних комбінацій, які можна скласти з літер слова ВИМОГА (усі літери у комбінації різні)?
16. Порядок виступу 7 учасників конкурсу визначається жеребом. Скільки різних варіантів жеребкування при цьому можливо?
17. У шаховому турнірі беруть участь 16 людей. Скільки партій має бути зіграно у турнірі, якщо між будь-якими двома учасниками має бути зіграна одна партія?
18. У слові ВИСТАВА змінюють місцями літери. Чому дорівнює кількість всіх можливих різних слів?
19. Чому дорівнює кількість різних трилітерних комбінацій, які можна скласти з літер слова ПОСИЛКА (усі літери у комбінації різні)?
20. Чому дорівнює кількість різних способів вибору (порядок не має значення) 3 томів з 6-томного збірника творів?

Задача 4.2.

1. Пароль, заданий для сервера, складається з шести символів. Перші два з них — малі латинські літери, інші чотири можуть бути як цифрами, так і малими літерами. Скільки способами можна задати такий пароль?
2. У групі 30 студентів. Необхідно вибрати старосту, заступника старости та профорга. Скільки є способів це зробити?
3. Два листоноші мають рознести 10 листів за 10 адресами. Скільки способами можуть розподілити роботу?
4. У ящику 100 деталей, з них 30 — деталей 1-го сорту, 50 — 2-го, інші — 3-го. Скільки існує способів вилучення із ящика однієї деталі 1-го чи 2-го сорту?
5. Скільки способами можна розбити групу з 25 студентів на три підгрупи А, В та С по 6, 9 та 10 осіб відповідно?
6. Скільки існує семизначних чисел, що складаються з цифр 4, 5 та 6, у яких

цифра 4 повторюється 3 рази, а цифри 5 та 6 – по 2 рази?

7. У першій урні 4 білих та 6 чорних куль. У другій урні 1 білий та 9 чорних куль. На вдачу взятої урни вийняли одну кулю. Скільки способами можна вибрати одну білу кулю?

8. Скільки існує шостизначних чисел, які діляться на 5?

9. У першій урні 3 білих та 4 чорні кулі. У другій урні 2 білі та 11 чорних куль. На вдачу взятої урни вийняли одну кулю. Скільки способами можна вибрати одну білу кулю?

10. Скільки існує семизначних чисел, які діляться на 2?

11. У першій урні 4 білих та 8 чорних куль. У другій урні 3 білий та 2 чорних куль. На вдачу взятої урни вийняли одну кулю. Скільки способами можна вибрати одну чорну кулю?

12. Скільки існує вісьмизначних чисел, що складаються з цифр 2, 5 та 8, у яких

цифра 2 повторюється 3 рази, цифра 5 повторюється 2 рази та 8 – 2 рази?

13. Скільки всього трьохзначних чисел, які мають дві цифри сімки?

14. Скількома способами можна скласти пару з однієї голосної та однієї приголосної букв слова «хустка»?

15. Скільки існує варіантів купівлі однієї троянди, якщо продають 3 червоні, 2 білих та 4 жовті троянди?

16. Скільки способів можна позначити вершини трикутника, використовуючи літери А, В, С, D?

17. Скільки існує семизначних чисел, які діляться на 10?

18. У першій урні 5 білих та 3 чорних куль. У другій урні 6 білий та 4 чорних куль. На вдачу взятої урни вийняли одну кулю. Скільки способами можна вибрати одну чорну кулю?

19. Скільки способами можна розбити групу з 30 студентів на чотири підгрупи по 7, 11 та 12 осіб відповідно?

20. Скількома способами можна скласти пару з однієї голосної та однієї приголосної букв слова «подорож»?

Задача 4.3.

Розв'язати рівняння:

1. $A_x^2 - C_x^1 = 80$	11. $3 \cdot C_{x+1}^2 - 2 \cdot A_x^2 = x$
2. $C_{x+1}^{x-4} = \frac{7}{15} \cdot A_{x+1}^3$	12. $\frac{A_x^4}{A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}} = \frac{24}{23}$

3. $11 \cdot C_x^3 = 24 \cdot C_{x+1}^2$	13. $C_{x+3}^{x+1} = C_{x+1}^{x-1} + C_{x+1}^x + C_x^{x-2}$
4. $A_x^3 - 2 \cdot C_x^4 = 3 \cdot A_x^2$	14. $\frac{C_{x+1}^2}{C_x^3} = \frac{4}{5}$
5. $12 \cdot C_{x+3}^4 = 55 \cdot A_{x+1}^2$	15. $\frac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}} = 336$
6. $\frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x}$	16. $\frac{A_x^4 P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$
7. $\frac{C_{2x}^{x+1}}{C_{2x+1}^{x-1}} = \frac{2}{3}$	17. $\frac{C_{x+1}^3}{C_x^4} = \frac{6}{5}$
8. $12 \cdot C_x^1 + C_{x+4}^2 = 162$	18. $A_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-1} = 14 \cdot (x + 1)$
9. $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$	19. $3 \cdot C_{x+1}^2 + x \cdot P_2 = 4 \cdot A_x^2$
10. $9 \cdot A_x^4 = 15 \cdot A_{x+1}^3$	20. $C_x^3 + C_x^4 = 11 \cdot C_{x+1}^2$

ЗАДАЧА 5.

Для заданих логічних функцій побудувати таблицю істинності,

$$1. f = (\overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}} \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3) \wedge (\overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \vee x_1 x_2})$$

$$2. f = (\overline{\overline{x_2 x_1} \vee \overline{x_2 x_3}}) \vee (\overline{x_2 x_3 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_2})$$

$$3. f = (\overline{\overline{x_2 x_1} \vee \overline{x_2 x_3}}) \wedge (\overline{x_2 x_1 \vee x_2 x_3 \vee x_3 \overline{x_1}})$$

$$4. f = (\overline{x_1 x_2 \vee \overline{x_1} \wedge \overline{x_3} \vee x_2 x_3}) \wedge (\overline{x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2}})$$

$$5. f = \overline{x_1 x_2 x_3 \vee x_2 x_3} \wedge (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \vee x_2 x_3)$$

$$6. f = (\overline{(x_1 \wedge \overline{x_2} \vee x_2 x_3)}) \vee (\overline{(x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_3}))})$$

$$7. f = (\overline{(x_1 x_2 \vee (\overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \wedge (x_1 \overline{x_2} \vee x_1 x_3 \vee \overline{x_2 x_3})})$$

$$8. f = (\overline{(\overline{x_3} \wedge x_1 \vee \overline{x_3} x_2)}) \wedge (\overline{(x_1 \wedge \overline{x_2} \vee x_1 \overline{x_3} \vee x_2 \overline{x_3})})$$

$$9. f = (\overline{(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \vee x_2 x_3)}) \vee (\overline{(x_2 x_3 \vee x_1 x_3 \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}))})$$

$$10. f = (\overline{(x_1 \overline{x_3} \vee x_2 \wedge \overline{x_3})}) \wedge (\overline{(x_1 \overline{x_2} \vee (x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee x_1 \overline{x_3})})$$

$$11. f = (\overline{(\overline{x_3} \wedge x_1 \vee \overline{x_3} x_2)}) \wedge (\overline{(x_1 \overline{x_2} \vee x_1 \overline{x_3} \vee x_2 \overline{x_3})})$$

$$12. f = (\overline{(x_1 \overline{x_3} \vee x_2 \overline{x_3})}) \vee (\overline{(x_1 \overline{x_2} \vee x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_3})})$$

$$13. f = ((\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}) \vee \overline{x_2 x_3}) \wedge (\overline{(x_1 \overline{x_2} \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_3)})$$

$$14. f = (\overline{(\overline{x_3} \wedge x_1 \vee \overline{x_3} x_2)}) \wedge (\overline{(x_2 \wedge \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} \vee x_1 \overline{x_3})})$$

$$15. f = (\overline{x_2 x_1} \vee \overline{x_1 \overline{x_3}} \vee \overline{x_2 \overline{x_3}}) \vee (\overline{(x_1 \overline{x_3} \vee x_2 \overline{x_3})})$$

$$16. f = (\overline{(\overline{x_3} x_1 \vee \overline{x_3} x_2)}) \wedge (\overline{(x_1 \overline{x_2} \vee x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_3})})$$

$$17. f = (\overline{(x_1 \overline{x_3} \vee x_2 \overline{x_3})}) \wedge (\overline{(x_1 \overline{x_2} \vee x_1 \overline{x_3} \vee x_2 \overline{x_3})})$$

$$18. f = (\overline{x_2 x_1} \vee \overline{x_1 \overline{x_3}} \vee \overline{x_2 x_3}) \vee (\overline{(x_1 \overline{x_3} \vee x_2 \overline{x_3})})$$

$$19. f = (\overline{x_3} x_1 \vee \overline{x_3} x_2) \wedge (\overline{(x_1 \overline{x_2} \vee x_1 \overline{x_3} \vee x_2 \overline{x_3})})$$

$$20. f = (\overline{x_3} x_1 \vee \overline{x_1 x_2}) \wedge (\overline{(x_1 \overline{x_2} \vee x_1 \overline{x_3} \wedge x_2 x_3)})$$

$$21. f = (\overline{(\overline{x_3} x_1 \vee \overline{x_3} x_2)}) \wedge (\overline{(x_1 \overline{x_2} \vee x_1 \overline{x_3} \vee x_1 x_2)})$$

$$22. f = (\overline{x_1 x_3} \vee x_2 x_3) \wedge (\overline{x_1 x_3} \vee \overline{x_2 x_3} \wedge x_1 x_2)$$

$$23. f = (\overline{x_1 x_2} \vee \overline{x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_3}) \wedge (\overline{x_3 x_1} \vee \overline{x_3 x_2})$$

$$24. f = (\overline{x_1 x_2} \vee \overline{x_2 x_3}) \wedge (\overline{x_1 x_2} \vee \overline{x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_3})$$

$$25. f = (\overline{x_1 x_2} \vee \overline{x_1 x_3} \wedge \overline{x_2 x_3}) \wedge (\overline{x_3 x_2} \vee \overline{x_3 x_1})$$

$$26. f = (\overline{x_1 x_2} \vee \overline{x_2 x_3} \wedge \overline{x_1 x_3}) \wedge (\overline{x_1 x_3} \vee \overline{x_2 x_3})$$

$$27. f = (\overline{x_1 x_2} \vee \overline{x_2 x_3}) \wedge (\overline{x_1 x_3} \vee \overline{x_1 x_2} \wedge \overline{x_2 x_3})$$

$$28. f = (\overline{x_3 x_1} \wedge \overline{x_2 x_3}) \vee (\overline{x_2 x_1} \vee \overline{x_1 x_3} \vee \overline{x_2 x_3})$$

$$29. f = (\overline{x_3 x_1} \wedge \overline{x_3 x_2}) \vee (\overline{x_1 x_2} \vee \overline{x_2 x_3} \wedge \overline{x_1 x_2})$$

$$30. f = (\overline{x_1 x_3} \vee \overline{x_1 x_2} \wedge \overline{x_2 x_3}) \wedge (\overline{x_3 x_2} \vee \overline{x_2 x_1})$$

ЗАДАЧА 6

Записати логічну функцію $f(x,y,z)$ в ДНФ та КНФ. Знайти ДДНФ та ДКНФ двома способами (таблиця істинності, аналітичний вивод)

$$1. f(x,y,z) = (\overline{x} \overline{y} \vee xz \vee yz) \wedge (\overline{x} \overline{y} \vee yz)$$

$$2. f(x,y,z) = (\overline{y} \overline{x} \vee \overline{y} z) \vee (yz \vee xz \vee xy)$$

$$3. f(x,y,z) = (\overline{y} \overline{x} \vee \overline{y} z) \wedge (yz \vee xz \vee zx)$$

$$4. f(x,y,z) = (\overline{x} y \vee \overline{x} z \vee yz) \wedge (\overline{y} z \vee xy)$$

$$5. f(x,y,z) = xyz \vee yz \wedge (\overline{x} \overline{y} \vee yz)$$

$$6. f(x,y,z) = (\overline{x} y \vee yz) \vee (\overline{x} y \vee yz \vee \overline{x} \overline{z})$$

$$7. f(x,y,z) = (\overline{x} y \vee \overline{y} z) \wedge (\overline{x} y \vee xz \vee yz)$$

$$8. f(x,y,z) = (\overline{z} x \vee \overline{z} y) \wedge (\overline{x} \overline{y} \vee xz \vee yz)$$

9. $f(x,y,z) = (\bar{x} \bar{y} \vee yz) \vee (yz \vee xz \vee \bar{x} \bar{y})$
10. $f(x,y,z) = (\bar{x} \bar{z} \vee \bar{y} \bar{z}) \wedge (\bar{x} \bar{y} \vee \bar{y} \bar{z} \vee x \bar{z})$
11. $f(x,y,z) = (\bar{z} \bar{x} \vee \bar{z} \bar{y}) \wedge (\bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} \bar{z} \vee \bar{y} \bar{z})$
12. $f(x,y,z) = (\bar{x} \bar{z} \vee \bar{y} \bar{z}) \vee (\bar{x} \bar{y} \vee \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{z})$
13. $f(x,y,z) = (\bar{x} \bar{y} \vee \bar{y} \bar{z}) \wedge (\bar{x} \bar{y} \vee \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{z})$
14. $f(x,y,z) = (\bar{z} \bar{x} \vee \bar{z} \bar{y}) \wedge (\bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} \bar{z})$
15. $f(x,y,z) = (\bar{y} \bar{x} \vee \bar{x} \bar{z} \vee \bar{y} \bar{z}) \vee (\bar{x} \bar{z} \vee \bar{y} \bar{z})$
16. $f(x,y,z) = (\bar{z} \bar{x} \vee \bar{z} \bar{y}) \wedge (\bar{x} \bar{y} \vee \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{z})$
17. $f(x,y,z) = (\bar{z} \bar{x} \vee \bar{z} \bar{y}) \wedge (\bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} \bar{z} \vee \bar{y} \bar{z})$
18. $f(x,y,z) = (\bar{y} \bar{x} \vee \bar{x} \bar{z} \vee \bar{y} \bar{z}) \vee (\bar{x} \bar{z} \vee \bar{y} \bar{z})$
19. $f(x,y,z) = (\bar{z} \bar{x} \vee \bar{z} \bar{y}) \wedge (\bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} \bar{z} \vee \bar{y} \bar{z})$
20. $f(x,y,z) = (\bar{z} \bar{x} \vee \bar{z} \bar{y}) \wedge (\bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} \bar{z} \vee \bar{y} \bar{z})$
21. $f(x,y,z) = (\bar{z} \bar{x} \vee \bar{z} \bar{y}) \wedge (\bar{x} \bar{z} \vee \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y})$
22. $f(x,y,z) = (\bar{z} \bar{x} \vee \bar{z} \bar{y}) \wedge (\bar{x} \bar{z} \vee \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y})$
23. $f(x,y,z) = (\bar{x} \bar{y} \vee \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{z}) \wedge (\bar{z} \bar{x} \vee \bar{z} \bar{y})$
24. $f(x,y,z) = (\bar{x} \bar{y} \vee \bar{y} \bar{z}) \wedge (\bar{x} \bar{y} \vee \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{z})$
25. $f(x,y,z) = (\bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} \bar{z} \vee \bar{y} \bar{z}) \wedge (\bar{z} \bar{y} \vee \bar{z} \bar{x})$

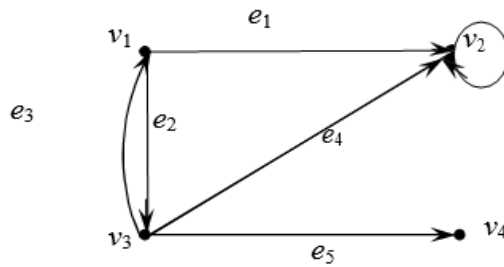
ЗАДАЧА 7.

Знайти ДДНФ та ДКНФ двома способами (таблиця істинності, аналітичний вивод) для варіантів задачі 6.

ЗАДАЧА 8.

1. Дано орієнтований граф, заданий графічним способом. Задати цей граф іншими способами: с помощью матрицы смежности; с помощью

матрицы інцидентності та завданням множин вершин V і дуг E .



2. Дано орієнтований граф, заданий матрицею інцидентності. Задати цей граф іншими способами: графічно; за допомогою матриці суміжності та завданням множин вершин V і дуг E .

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
e_1	1	-1			
e_2	1			-1	
e_3		1			-1
e_4			1	-1	
e_5	1		-1		
e_6				1	-1
e_7		1	-1		

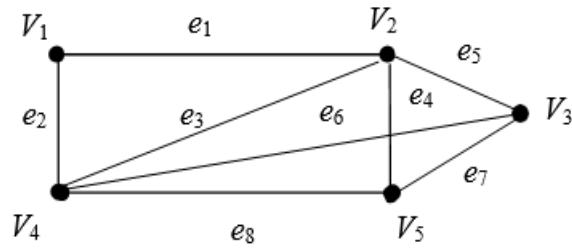
3. Дано неорієнтований граф, заданий матрицею суміжності. Задати цей граф іншими способами: графічно; за допомогою матриці інцидентності та завданням множин вершин V і дуг E .

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1		1		1	1
v_2	1		1	1	
v_3		1	1		1
v_4	1	1			1
v_5	1		1	1	

4. Нехай задано неорієнтований граф $G=(V,E)$. Побудувати графічно, матриці суміжності та інцидентності.

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad E = \{(1, 3), (1, 5), (2, 4), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 1), (5, 6)\}$$

5. Дано неорієнтований граф, заданий графічним способом. Задати цей граф іншими способами: с помощью матрицы смежности; с помощью матрицы инцидентности та завданням множин вершин V і дуг E .



6. Дано орієнтований граф, заданий матрицею інцидентності. Задати цей граф іншими способами: графічно; за допомогою матриці суміжності та завданням множин вершин V і дуг E .

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
e_1			1		-1
e_2	-1			1	
e_3	1	-1			
e_4				-1	1
e_5	1		-1		
e_6		1		-1	
e_7			1		-1

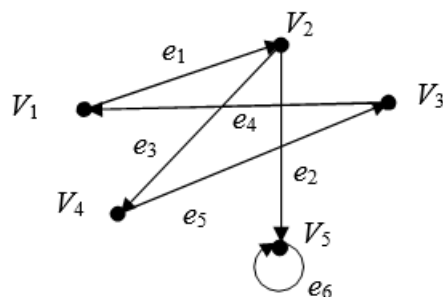
7. Дано неорієнтований граф, заданий матрицею суміжності. Задати цей граф іншими способами: графічно; за допомогою матриці інцидентності та завданням множин вершин V і дуг E .

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	1			1		
v_2		1				
v_3				1		1
v_4	1		1		1	
v_5	1		1	1		1
v_6			1		1	

8. Нехай задано орієнтований граф $G=(V,E)$. Побудувати графічно, матриці суміжності та інцидентності.

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad E = \{(1, 2), (2, 5), (2, 4), (3, 4), (3, 1), (4, 2), (5, 5)\}$$

9. Дано орієнтований граф, заданий графічним способом. Задати цей граф іншими способами: с помощью матрицы смежности; с помощью матрицы инцидентности та завданням множин вершин V і дуг E .



10. Дано орієнтований граф, заданий матрицею інцидентності. Задати цей граф іншими способами: графічно; за допомогою матриці суміжності та завданням множин вершин V і дуг E .

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
e_1		1			-1	
e_2	1		-1			
e_3				-1		1
e_4	-1					1
e_5			1		-1	
e_6		-1			1	
e_7				1		-1
e_8	1		-1			

11. Дано неорієнтований граф, заданий матрицею суміжності. Задати цей граф іншими способами: графічно; за допомогою матриці інцидентності та завданням множин вершин V і дуг E .

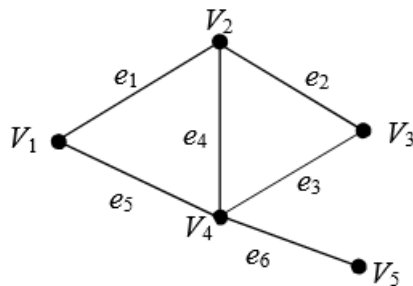
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1			1		1
v_2		1		1	
v_3	1			1	1
v_4		1	1		1
v_5	1		1	1	1

12. Нехай задано неорієнтований граф $G=(V,E)$. Побудувати графічно, матриці суміжності та інцидентності.

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad E = \{(1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 3), (5, 6)\}$$

13. Дано неорієнтований граф, заданий графічним способом. Задати цей граф іншими способами: с помощью матрицы смежности; с помощью

матриці інцидентності та завданням множин вершин V і дуг E .



14. Дано орієнтований граф, заданий матрицею інцидентності. Задати цей граф іншими способами: графічно; за допомогою матриці суміжності та завданням множин вершин V і дуг E .

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
e_1		1		-1		1
e_2	1		-1			
e_3		-1			1	
e_4			1			-1
e_5	-1			1		
e_6		1			-1	
e_7			-1			1

15. Дано неорієнтований граф, заданий матрицею суміжності. Задати цей граф іншими способами: графічно; за допомогою матриці інцидентності та завданням множин вершин V і дуг E .

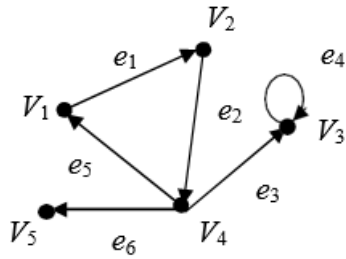
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	1			1		
v_2		1			1	
v_3			1			1
v_4	1			1		1
v_5		1	1			
v_6	1				1	

16. Нехай задано орієнтований граф $G=(V,E)$. Побудувати графічно, матриці суміжності та інцидентності.

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad E = \{(1, 2), (2, 5), (2, 4), (3, 4), (3, 1), (4, 2), (4, 4), (5, 5)\}$$

17. Дано орієнтований граф, заданий графічним способом. Задати цей граф іншими способами: с помощью матрицы смежности; с помощью

матриці інцидентності та завданням множин вершин V і дуг E .



18. Дано орієнтований граф, заданий матрицею інцидентності. Задати цей граф іншими способами: графічно; за допомогою матриці суміжності та завданням множин вершин V і дуг E .

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
e_1		1			-1	
e_2	-1		1			
e_3		1		-1		
e_4			-1			1
e_5	1				-1	
e_6		-1		1		
e_7			1			-1
e_8	1			-1		

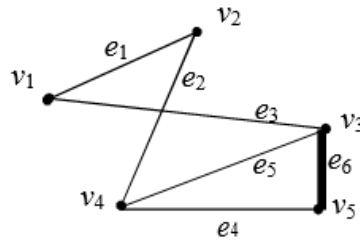
19. Дано неорієнтований граф, заданий матрицею суміжності. Задати цей граф іншими способами: графічно; за допомогою матриці інцидентності та завданням множин вершин V і дуг E .

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	1			1	
v_2		1			1
v_3	1		1		
v_4		1		1	
v_5	1		1		1

20. Нехай задано неорієнтований граф $G=(V,E)$. Побудувати графічно, матриці суміжності та інцидентності.

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad E = \{(1, 5), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 4), (5, 3), (5, 5)\}$$

21. Дано неорієнтований граф, заданий графічним способом. Задати цей граф іншими способами: с помощью матрицы смежности; с помощью матрицы инцидентности та завданням множин вершин V і дуг E .



22. Дано орієнтований граф, заданий матрицею інцидентності. Задати цей граф іншими способами: графічно; за допомогою матриці суміжності та завданням множин вершин V і дуг E .

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
e_1		1			-1	
e_2			1			-1
e_3	-1			1		1
e_4		1		-1		
e_5	1		-1			
e_6		-1			1	
e_7	-1					1

23. Дано неорієнтований граф, заданий матрицею суміжності. Задати цей граф іншими способами: графічно; за допомогою матриці інцидентності та завданням множин вершин V і дуг E .

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1			1			1
v_2				1	1	
v_3	1			1		1
v_4		1	1			
v_5		1			1	
v_6	1		1			

24. Нехай задано орієнтований граф $G=(V,E)$. Побудувати графічно, матриці суміжності та інцидентності.

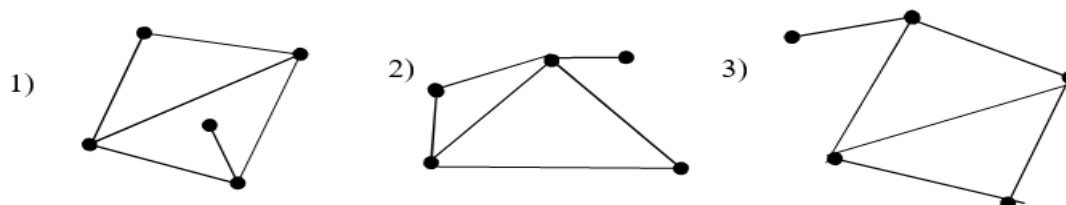
$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, E = \{(1, 2), (1, 6), (2, 5), (2, 4), (3, 4), (3, 1), (4, 2), (4, 4), (5, 6), (6, 1)\}$$

ЗАДАЧА 9.

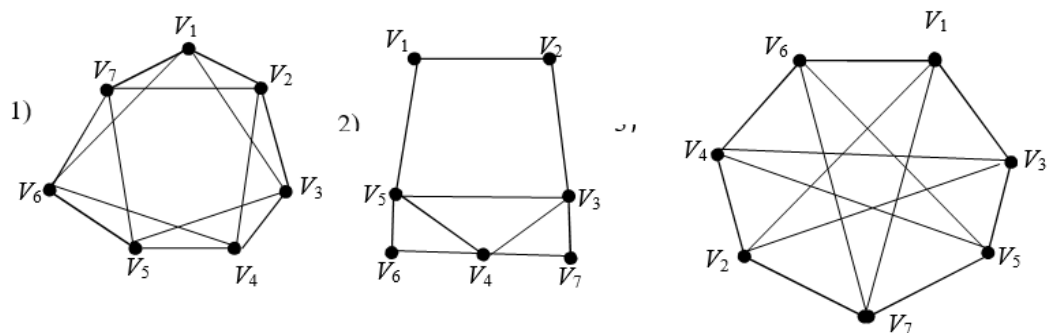
Задача 1. Знайти ступень вершин для графів з завдання 8.

Задача 2. Визначити, чи серед графів, зображених на малюнках є ізоморфні

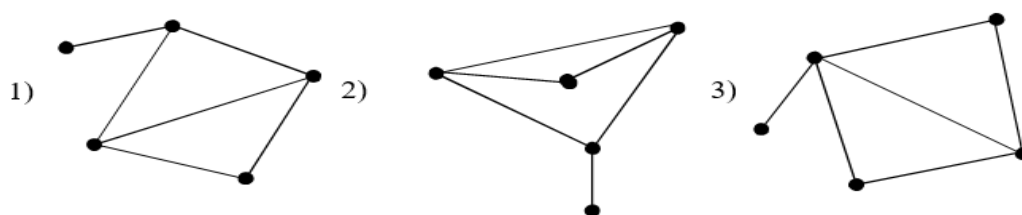
1.



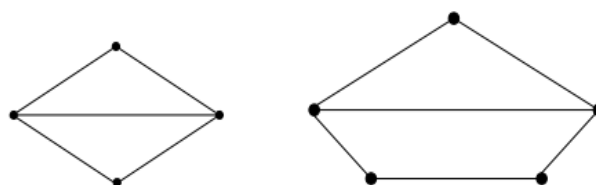
2.



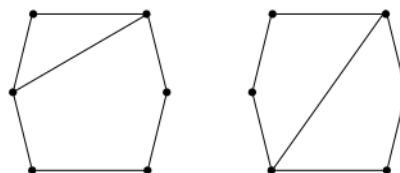
3.



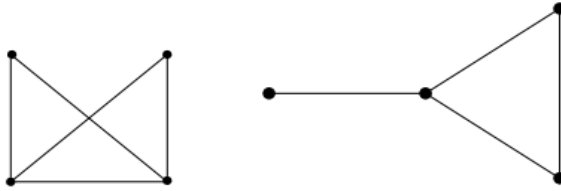
4.



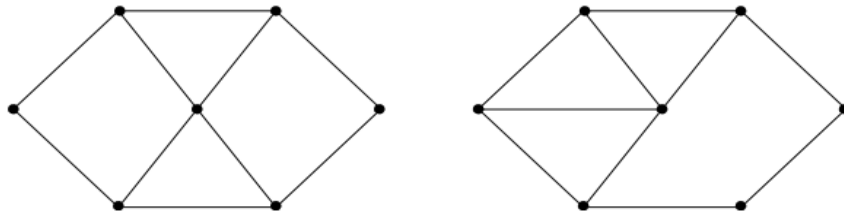
5.



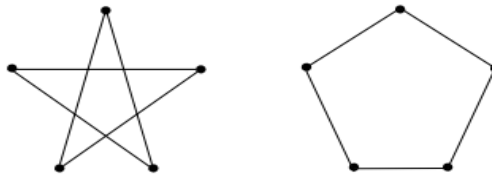
6.



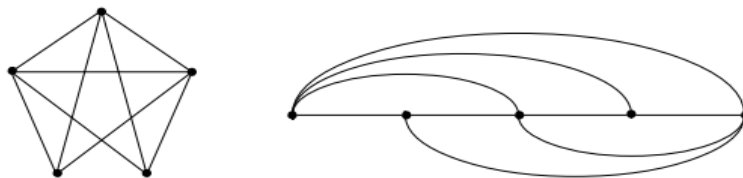
7.



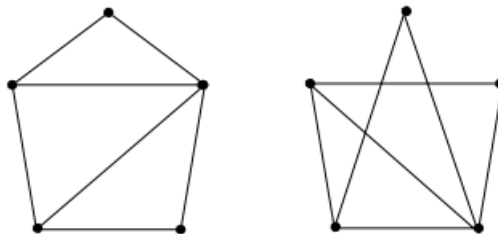
8.



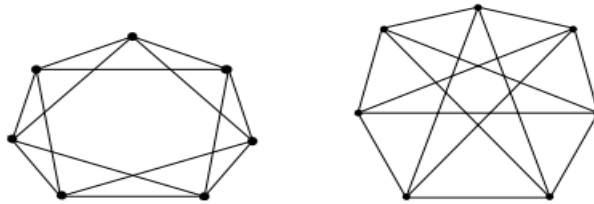
9.



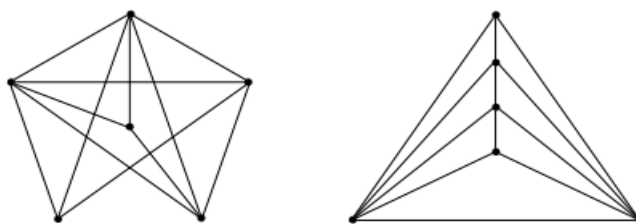
10.



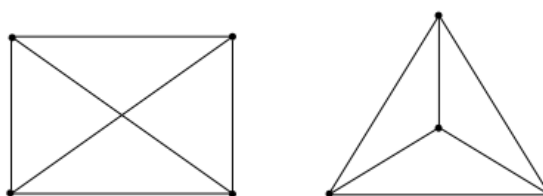
11.



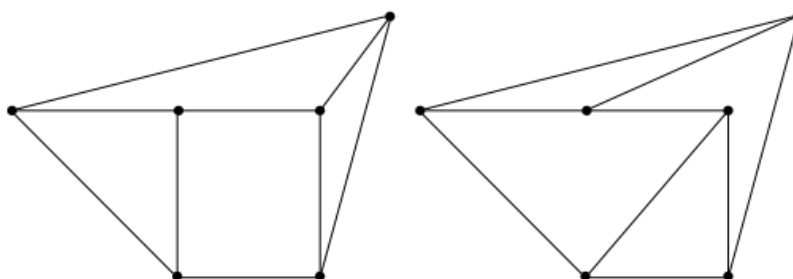
12.



13.



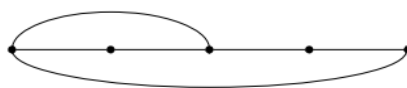
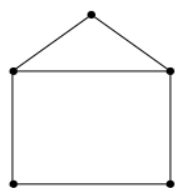
14.



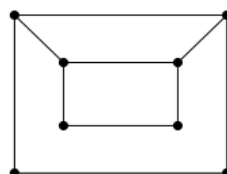
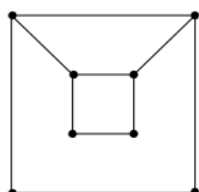
15.



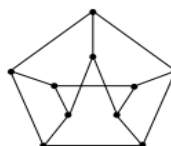
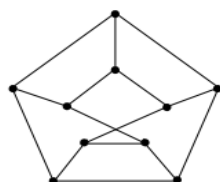
16.



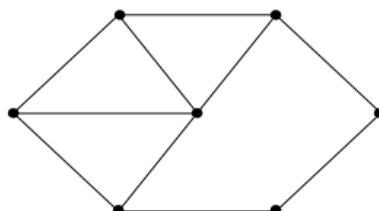
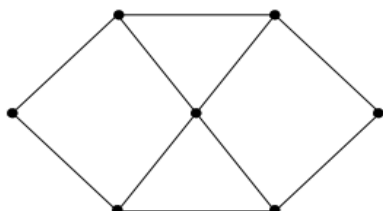
17.



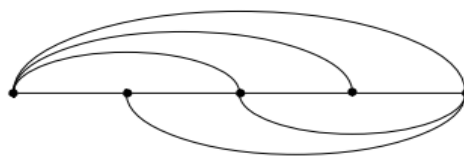
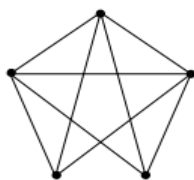
18.



19.



20.



ЗАДАЧА 10.

1. Яке число компонент зв'язності може бути у про довільного ациклічного графа на десяти вершинах та дев'яти ребрах?

2. Яке число компонент зв'язності може бути у графа на 16 вершинах та 15 ребрах?

3. Яке число компонент зв'язності може бути у графа на чотирьох вершинах та двох ребрах?
4. Яке число компонент зв'язності може бути у графа на п'яти вершинах та трьох ребрах?
5. Скільки може бути компонент зв'язності у регулярного графа на 15 вершинах ступеня 4?
6. Граф має десять вершин, дві з них зі ступенем 7. Скільки у нього може бути компонент зв'язності?
7. Граф має десять вершин, з них дві вершини степені 5, дві вершини ступеня 4, дві вершини ступеня 3, дві вершини ступеня 2, дві вершини ступеня 1. Скільки компонент зв'язності може бути в такого графа? Побудувати за одним варіантом для кожного можливого значення кількості компонентів.
8. Яка максимальна кількість ребер має довільний граф на семи вершинах?
9. Яке мінімальне число ребер має граф на 17 вершин за умови, що в ньому три компоненти зв'язності?
10. Яке мінімальне число ребер має граф на 15 вершин за умови, що в ньому чотири компоненти зв'язності?

ЗАДАЧА 11.

Для графа із завдання 8, знайти діаметр, радіус, центр та периферії. Орієнтований граф, за необхідності, перетворити на неорієнтований.

ЗАДАЧА 12.

1. Чи є ейлеровим регулярний граф:
 - а) ступеня 4 на 11 вершинах;
 - б) ступеня 3 на 12 вершинах?
2. Чи є ейлеровим повний граф:
 - а) на 17 вершинах;
 - б) на 18 вершинах?
3. Якими повинні бути ступені всіх вершин графа, щоб у ньому існував ейлерів цикл?
4. Яке мінімальне число ребер треба видалити з повного графа:
 - а) на п'яти вершинах;
 - б) на чотирьох вершинах, щоб він став ейлеровим?
5. Чи є гамільтоновим простий цикл на 17 вершинах?
6. Чи можна побудувати гамільтонів граф із 16 ребрами на 17 вершинах?

7. Чи є ейлеровим регулярний граф ступеня 3 на 12 вершинах?
8. Чи є гамільтоновим повний граф:
 - а) на 17 вершинах;
 - б) на 18 вершинах?
9. У повних графах на скількох вершинах завжди є ейлерів цикл?
10. В яких графах завжди існують і ейлери, і гамільтони цикли і вони збігаються?
11. Який цикл (ніякий, гамільтонів, ейлерів або обидва) завжди є:
 - а) у повному графі на семи вершинах;
 - б) у повному графі на 10 вершинах;
 - в) у регулярному графі ступеня 3 на семи вершинах?

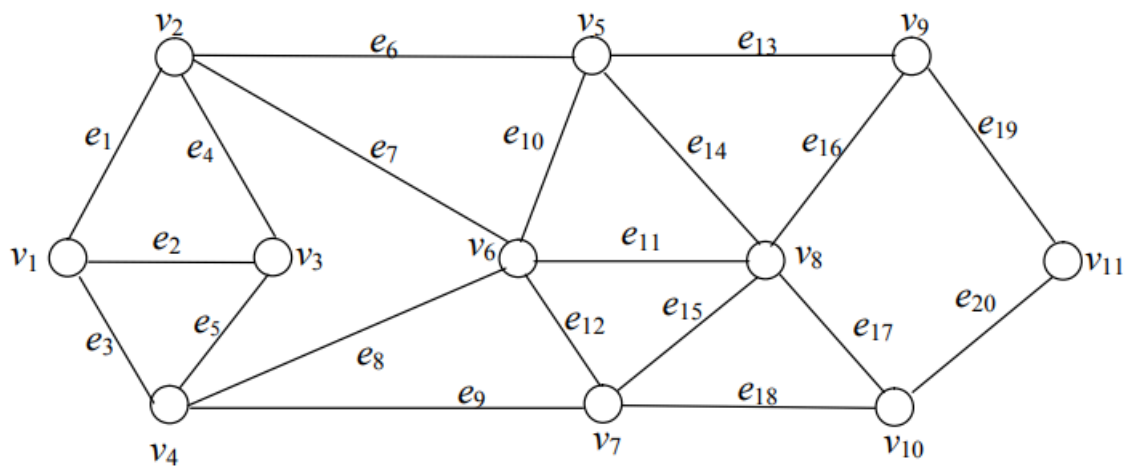
ЗАДАЧА 13.

У задачі задано зважений граф $G(V, E)$, де

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\},$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{18}, e_{19}, e_{20}\}$$

Вага ребра e_i дорівнює m_i і задана таблицею ($i = 1, 20$). Побудувати мінімальне дерево за алгоритмом Краскала.



Варіанти:

1.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	2	3	3	2	1	4	2	3	2	1	4	1	1	2	3	2	2	4	3

2.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	3	4	5	2	1	1	2	2	4	3	4	3	2	1	2	3	1	4	3	4

3.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	2	3	1	4	1	1	2	3	3	4	1	3	2	3	3	1	1	2	2	5

4.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	2	1	3	4	1	2	4	3	1	2	2	3	3	4	3	2	2	1	1	4

5.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	2	3	3	2	1	4	3	2	1	1	2	4	3	2	4	3	3	2	2

5.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	3	2	2	3	2	1	4	4	3	2	4	3	3	4	5	1	2	1	3	3

7.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	1	3	3	2	2	4	4	1	2	3	4	3	2	3	4	2	1	2	4

—

8.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	2	1	1	2	3	1	2	3	4	2	3	1	1	3	2	1	2	3	3	1

9.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	3	2	2	1	4	3	2	2	1	4	3	2	2	1	4	3	2	2	4	3

10.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	1	2	4	3	2	1	1	2	4	3	3	2	4	2	1	3	1	1	2

11.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	3	3	4	3	2	1	1	2	2	3	3	1	2	3	4	1	2	4	2	5

12.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	2	2	3	4	1	2	4	1	3	2	3	3	4	4	1	2	4	1	3	5

13.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	2	4	4	3	2	1	1	2	4	3	3	2	1	1	3	3	2	2	1	5

14.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	2	3	4	3	2	1	2	3	4	3	2	1	2	3	4	3	2	3	4

15.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	1	3	4	2	2	4	3	1	1	2	3	3	2	1	2	1	2	2	5

16.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	2	2	4	2	1	4	3	2	2	3	4	4	3	2	2	1	3	3	1	3

17.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	3	5	2	4	1	3	5	2	4	1	3	5	2	4	1	3	5	1	3

18.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	2	1	3	1	4	1	1	1	2	1	3	1	4	1	1	2	1	3	1

19.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	4	3	4	1	2	1	3	1	4	2	3	2	4	1	2	3	1	1	4	5

20.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	3	2	4	1	3	2	1	3	4	5	1	4	2	2	3	3	2	1	2

21.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	3	4	2	1	1	2	3	3	4	1	1	1	3	2	2	2	1	3	2	3

22.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	3	4	5	1	4	5	3	2	4	5	3	3	2	1	2	3	4	1	2	2

23.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	3	4	2	1	1	3	4	2	1	3	3	4	4	3	2	1	1	2	4

24.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	4	1	2	4	3	1	2	4	3	3	2	1	3	4	2	1	2	4	3	1

25.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	3	2	4	1	3	4	2	1	2	4	1	3	4	2	1	2	3	3	2	4

26.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	2	2	3	4	3	2	1	1	2	1	3	1	4	1	3	1	2	2	4	2

27.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	3	3	2	1	3	2	1	2	2	3	2	1	1	3	4	1	2	3	5	3

28.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	2	3	4	4	3	2	1	1	2	3	4	4	3	2	1	1	2	5	3

29.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	1	3	1	4	2	3	2	4	1	3	3	4	4	2	1	1	2	1	2	4

30.

e_i	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}	e_{18}	e_{19}	e_{20}
m_i	3	2	1	2	2	4	3	2	1	2	4	3	3	3	3	4	5	3	3	2

Список літератури

1. Темнікова О.Л. Дискретна математика: практикум з дисципліни «Дискретна математика» для студентів спеціальності 113 «Прикладна математика» [Електронне видання] / О.Л.Темнікова – К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020
2. Сергій Кривий. Збірник задач з дискретної математики. Букрек, 2020, 456 с.
3. Іваненко О.І. Дискретні структури: навчальний посібник. Київ: КНЕУ, 2020. — 180 с.
4. Кравець М. Алгоритмічні структури. Львів: ЛНУ, 2021. — 156 с.
5. Johnson, K. Discrete Mathematics Essentials./ Springer, 2021. — 260 с.
6. Harper, G. Foundations of Discrete Systems. / Routledge, 2024. — 210 с.
7. Lee, P. Combinatorics for Computing Students. / Wiley, 2022. — 296 с.

8. Turner J. Applied Discrete Concepts./ Oxford University Press, 2025. — 240 c.