



Universidad
Zaragoza

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA ORDINARIA EXTRAORDINARIA DE 2025

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El examen consta de cuatro preguntas. Cada pregunta tiene una valoración de 2,5 puntos.

La primera pregunta es obligatoria, mientras que en las tres últimas se deberá elegir entre Opción I y Opción II, respondiendo únicamente a una de las dos. En caso de contestar cuestiones de ambas opciones, solo se corregirá la opción que aparezca en primer lugar en el tríptico.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las opciones elegidas en las preguntas 2, 3 y 4. (Si no se indica, y se han respondido dos opciones de una misma pregunta, sólo se corregirá la opción que se haya respondido en primer lugar).

Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. El trabajo de Gema y Fernando sobre la evolución de la contaminación acústica de su ciudad ha sido seleccionado como el mejor de su instituto. Además del reconocimiento, les han premiado con dos entradas para un partido del Casademont femenino. A ambos les gustaría ir juntos, pero les da vergüenza reconocerlo. Así que deciden sortear quién se las queda.

Inicialmente, proponen tirar una moneda tres veces cada uno. Quien obtenga más caras gana las dos entradas. En caso de empate, no gana nadie y se irán juntos al partido. Fernando piensa que, como hay tres situaciones posibles, la probabilidad de que empaten es un tercio.

a) (0,75 puntos) ¿Tiene razón Fernando al pensar que la probabilidad de empate con el sorteo de las monedas sería un tercio? En caso de no tener razón, ¿en cuánto se equivoca?

Resolución

Al tirar la moneda tres veces los resultados son CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX. La probabilidad de cada resultado es $\frac{1}{8}$. Sea 3C = sacar 3 caras, 2C = sacar 2 caras, 1C = sacar 1 cara, 0C = sacar 0 caras

Observa que $p(3C) = \frac{1}{8} = p(0C)$; $p(2C) = \frac{3}{8} = p(1C)$

Gana Gema en las situaciones siguientes:

Gema	3C	3C	3C	2C	2C	1C
Fernando	2C	1C	0C	1C	0C	0C

La probabilidad de que gane Gema es

$$p(G) = p(3C)p(2C) + p(3C)p(1C) + p(3C)p(0C) + p(2C)p(1C) + p(2C)p(0C) + p(1C)p(0C)$$

$$p(G) = \frac{1}{8} \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \frac{1}{8} = \frac{22}{64}$$

Análogamente, la probabilidad de que gane Fernando es también $p(F) = \frac{22}{64}$

La probabilidad de empate es $p(\text{empate}) = 1 - p(G) - p(F) = 1 - \frac{22}{64} - \frac{22}{64} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$

Fernando dice que la probabilidad de empate es $\frac{1}{3}$, se equivoca sólo en

$$\frac{1}{3} - \frac{5}{16} = \frac{1}{48} \cong 0,0208 = 2,08\%$$

Así que decide proponer un sorteo más elaborado con idea de aumentar la probabilidad de empate. Cada uno de ellos pensará una función y tirará un dado de seis caras no trucado tres veces. Si el valor de la derivada de su función evaluada en el valor que saque el dado es mayor o igual a cero, consigue un punto. Quien más puntos obtenga con sus tres tiradas, gana. En caso de empate, se van juntos al partido. A Gema le encantan las matemáticas, así que acepta inmediatamente. Ella escribe en su papel su función, $g(x) = e^x$ pensando que Fernando también elegirá una función cuya derivada sea siempre positiva. Para su sorpresa, la función de Fernando es $f(x) = \cos(2x)$. Así que, rápidamente, para obtener la máxima probabilidad de empate, cambia su función por otra cuya derivada toma un valor negativo en sólo uno de los seis valores posibles del dado.

b) (0,5 puntos) Propón una función que cumpla las características que busca Gema una vez conoce la función propuesta por Fernando.

Resolución

Nos piden encontrar una función cuya derivada toma un valor negativo en sólo uno de los seis valores posibles del dado, 1, 2, 3, 4, 5, y 6.

Tomemos por ejemplo $h(x)$ tal que $h'(x) = x - 1,5 \Rightarrow h(x) = \frac{x^2}{2} - 1,5x = \frac{x^2 - 3x}{2}$

$$h'(1) = 1 - 1,5 = -0,5 < 0 \quad ; \quad h'(2) = 2 - 1,5 = 0,5 > 0 \quad ; \quad h'(3) = 3 - 1,5 = 1,5 > 0$$

$$h'(4) = 4 - 1,5 = 2,5 > 0 \quad ; \quad h'(5) = 5 - 1,5 = 3,5 > 0 \quad ; \quad h'(6) = 6 - 1,5 = 4,5 > 0$$

Observa que con $h(x)$, $p(\text{Sacar 1 punto}) = \frac{5}{6}$

c) (0,75 puntos) ¿Ha conseguido Fernando su propósito de aumentar la probabilidad de empate?

Resolución

La función de Fernando es $f(x) = \cos(2x)$; $f'(x) = -2\text{sen}(2x)$

$$f'(1) = -2\text{sen}(2.1) \cong -1,8 < 0 \quad ; \quad f'(2) = -2\text{sen}(2.2) \cong 1,5 > 0 \quad ; \quad f'(3) = -2\text{sen}(2.3) \cong 0,5 > 0$$

$$f'(5) = -2\text{sen}(2.4) \cong -1,9 < 0 \quad ; \quad f'(5) = -2\text{sen}(2.5) \cong 1,08 > 0 \quad ; \quad f'(6) = -2\text{sen}(2.6) \cong 1,07 > 0$$

Observa que con $f(x)$, $p(\text{Sacar 1 punto}) = \frac{4}{6}$. Cuando tiramos el dado 3 veces, con $f(x)$:

$$p(\text{obtener 0}) = \frac{2}{6} \frac{2}{6} \frac{2}{6} = \frac{8}{216} \quad ; \quad p(\text{obtener 1}) = \frac{4}{6} \frac{2}{6} \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \frac{4}{6} \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \frac{2}{6} \frac{4}{6} = \frac{48}{216}$$

$$p(\text{obtener 2}) = \frac{4}{6} \frac{4}{6} \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \frac{2}{6} \frac{4}{6} + \frac{2}{6} \frac{4}{6} \frac{4}{6} = \frac{96}{216}$$

$$p(\text{obtener 3}) = \frac{4}{6} \frac{4}{6} \frac{4}{6} = \frac{64}{216}$$

Para empatar Gema y Fernando deben obtener la misma puntuación (0, 1, 2 o 3 puntos).

$$\text{Con } f(x), p(\text{empate}) = \frac{8}{216} \frac{8}{216} + \frac{48}{216} \frac{48}{216} + \frac{96}{216} \frac{96}{216} + \frac{64}{216} \frac{64}{216} = \frac{245}{729} \cong 0,3361 = 33,61\%$$

Cuando tiramos el dado 3 veces, con $h(x)$:

$$p(\text{obtener } 0) = \frac{1}{6} \frac{1}{6} \frac{1}{6} = \frac{1}{216} \quad ; \quad p(\text{obtener } 1) = \frac{5}{6} \frac{1}{6} \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \frac{5}{6} \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \frac{1}{6} \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$$

$$p(\text{obtener } 2) = \frac{5}{6} \frac{5}{6} \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \frac{1}{6} \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \frac{5}{6} \frac{5}{6} = \frac{75}{216}$$

$$p(\text{obtener } 3) = \frac{5}{6} \frac{5}{6} \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

Para empatar Gema y Fernando deben obtener la misma puntuación (0, 1, 2 o 3 puntos).

Con $h(x)$,

$$p(\text{empate}) = \frac{1}{216} \frac{1}{216} + \frac{15}{216} \frac{15}{216} + \frac{75}{216} \frac{75}{216} + \frac{125}{216} \frac{125}{216} = \frac{5369}{11664} \cong 0,4603 = 46,03\%$$

Sí que se ha conseguido aumentar la probabilidad del empate, aunque no llega a 0,5 y sigue siendo mayor la probabilidad de que gane alguno de los dos.

d) (0,5 puntos) Si Fernando hubiera visto la función $g(x)$ que tenía pensada Gema inicialmente, ¿cómo tendría que haber elegido su función para lograr la máxima probabilidad de empate?

Resolución

Hubiese elegido una función con la derivada siempre positiva con lo que la probabilidad de obtener un punto sería igual para los dos, por ejemplo, la función $i(x) = x$.

2. Elige entre 2.1 y 2.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

2.1 Sean $A(1, 2, 3)$, $B(1, 0, -1)$ y $C(2, 2, 2)$ tres puntos en el espacio y \vec{v}_1 el vector que va de A a B;

\vec{v}_2 el vector que va de B a C y \vec{v}_3 el vector que va de C a A.

a) (1,25 puntos) Estudia si los vectores \vec{v}_1 , \vec{v}_2 y \vec{v}_3 son linealmente independientes.

Resolución

$$\det \det \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \right) = \det \det \left(\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA} \right) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 8 + 2 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ son l.d.}$$

b) (1,25 puntos) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B, C.

Resolución

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| ;$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (0, -2, -4) \times (1, 0, -1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (2, -4, 2)$$

$$\text{Luego, } A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2} |(2, -4, 2)| = \frac{1}{2} 2 |(1, -2, 1)| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6} \cong 2,45 u^2$$

2.2 Halla la ecuación de un plano que es perpendicular a a recta dada por los planos
 $\{2x + y - z = 0 \quad x - y + z = -3$
 y además pasa por el punto (3, 2, 1).

Resolución

Un vector normal del plano π que se pide es un vector director de la
 recta $\vec{n} = \vec{d} = (1, 1, -1) \times (1, -1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -3, -3) // (0, 1, 1)$
 Como π pasa por (3, 2, 1), $\pi: 0(x-3) + 1(y-2) + 1(z-1) = 0 \Rightarrow \pi: y + z - 3 = 0$

3. Elige entre 3.1 y 3.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

3.1 a) (1 punto) Calcula el valor de la siguiente integral: $\int \frac{x^2 + 5x + 5}{x^3 + 4x^2 + 5x} dx$

Resolución

Descomponemos la fracción en suma de fracciones simples:

$$x^3 + 4x^2 + 5x = x(x^2 + 4x + 5) \quad ; \quad \mathcal{X} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} \quad ; \quad \frac{x^2 + 5x + 5}{x^3 + 4x^2 + 5x} = \frac{x^2 + 5x + 5}{x(x^2 + 4x + 5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4x + 5}$$

Multiplicando los dos miembros por $x(x^2 + 4x + 5)$ tenemos $x^2 + 5x + 5 = A(x^2 + 4x + 5) + (Bx + C)x$

$$x = 0 \Rightarrow 0^2 + 5 \cdot 0 + 5 = A(0^2 + 4 \cdot 0 + 5) + (B \cdot 0 + C) \cdot 0 \Rightarrow 5 = 5A \Rightarrow A = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow 1^2 + 5 \cdot 1 + 5 = 1(1^2 + 4 \cdot 1 + 5) + (B \cdot 1 + C) \cdot 1 \Rightarrow 11 = 10 + B + C \Rightarrow B + C = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow 2^2 + 5 \cdot 2 + 5 = 1(2^2 + 4 \cdot 2 + 5) + (B \cdot 2 + C) \cdot 2 \Rightarrow 19 = 17 + 4B + 2C \Rightarrow 4B + 2C = 2 \Rightarrow 2B + C = 1$$

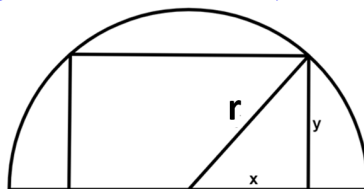
Restando las ecuaciones, $B = 0$; $0 + C = 1$, $C = 1$. Queda $\int \frac{x^2 + 5x + 5}{x^3 + 4x^2 + 5x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(x+2)^2 + 1} \right) dx$

Por tanto, $\int \frac{x^2 + 5x + 5}{x^3 + 4x^2 + 5x} dx = \ln |x| + \arctg(x + 2) + k$

b) (1,5 puntos) Calcula las dimensiones del rectángulo de mayor área inscrito en una circunferencia de radio r .

Resolución

Sean $2x$, $2y$ las dimensiones del rectángulo. Observa el dibujo:



Usando el teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Función a maximizar: $\text{área} = A(x) = 2x \cdot 2y = 4x \sqrt{r^2 - x^2}$

$$A'(x) = 4 \sqrt{r^2 - x^2} + 4x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = 4 \sqrt{r^2 - x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{4(r^2 - x^2) - 4x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{4r^2 - 8x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow 4r^2 - 8x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4r^2}{8} = \frac{r^2}{2} \Rightarrow x = + \frac{r}{\sqrt{2}} \text{ pues } x \text{ es positivo.}$$

Si $0 < x < \frac{r}{\sqrt{2}}$, $A'(x) > 0$ [A(x) creciente] y si $x > \frac{r}{\sqrt{2}}$, $A'(x) < 0$ [A(x) decreciente]

Para $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ el área del rectángulo es máxima. Sustituyendo, $y = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

Por tanto, $x = y$, es un cuadrado de lado $2 \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2}$

3.2 a) (1 punto) Sea $p(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$. Calcula, utilizando el cambio de variable $x = 1 + t$, $\int \frac{dx}{p(x)}$

Resolución

Haciendo el cambio, $x = 1 + t$, $dx = dt$; $p(x) = x(x^2 - 2x + 2) = x[(x - 1)^2 + 1] = (1 + t)(t^2 + 1)$

Sustituyendo, $I = \int \frac{dx}{p(x)} = \int \frac{dt}{(t+1)(t^2+1)}$; $\frac{1}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1}$

Multiplicando los dos miembros por $(t+1)(t^2+1)$ tenemos $1 = A(t^2+1) + (Bt+C)(t+1)$

$t = -1 \Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$; $t = 0 \Rightarrow 1 = A + C = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$; $t = 1 \Rightarrow 1 = 2A + 2B + 2C$

Es decir, $1 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2B + 2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 2B = -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$. Queda $I = \int \frac{\frac{1}{2}}{t+1} dt + \int \frac{-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}}{t^2+1} dt$

$$I = \frac{1}{2} \ln |t+1| + \int \frac{-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \ln |t+1| + \frac{-1}{2} \int \frac{t}{t^2+1} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+1} dt$$

$$I = \frac{1}{2} \ln |t+1| + \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \ln |t+1| - \frac{1}{4} \ln |t^2+1| + \frac{1}{2} \arctg t$$

Deshaciendo el cambio, $t = x - 1$, $I = \frac{1}{2} \ln |x| - \frac{1}{4} \ln [(x-1)^2 + 1] + \frac{1}{2} \arctg(x-1) + k$

b) (1,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{e^x}{p(x)}$, calcula sus asíntotas, cuando existan, y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Resolución

Recordemos que $p(x) = x^3 - 2x^2 + 2x = x(x^2 - 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $f(x) = \frac{e^x}{p(x)}$, no existe $f(0)$.

Para $x = 0$ no es continua por no estar definida y $f(x) = \frac{e^x}{p(x)} = \frac{e^0}{p(0)} = \frac{1}{0} = \pm\infty$.

Luego, f tiene una asíntota vertical en $x = 0$ (eje Y) cuya ecuación es A.V. : $x = 0$

Además, $f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$ y $f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Estudiamos las asíntotas en $+\infty$:

$f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{p(x)} = +\infty$, e^x porque es un infinito de orden superior a $p(x)$ en $+\infty$.

No hay A.H. en $+\infty$

Veamos si tiene asíntota oblicua en $+\infty$, A.O.: $y = mx + n$

$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x p(x)} = +\infty$, porque e^x es un infinito de orden superior a $x p(x)$ en $+\infty$.

No hay A.O. en $+\infty$

Estudiamos las asíntotas en $-\infty$:

$f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{p(x)} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} = \frac{1}{-\infty e^{+\infty}} = \frac{1}{-\infty} = 0$. La A.H. en $-\infty$ es A.H.: $y = 0$ (eje X)

Recordemos que $p'(x) = 3x^2 - 4x + 2$; $f'(x) = \frac{e^x p(x) - e^x p'(x)}{[p(x)]^2} = \frac{e^x [p(x) - p'(x)]}{[p(x)]^2} = \frac{e^x (x^3 - 5x^2 + 6x - 2)}{[p(x)]^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 6x - 2 = 0$. Usamos Ruffini: $1 \quad -5 \quad 6 \quad -2 \quad | \quad 1 \quad -4 \quad 2 \quad 1 \quad -4 \quad 2 \quad 0$; $(x-1)(x^2 - 4x + 2) = 0$

Resolviendo: $x = 1$; $x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$; $x_1 = 2 - \sqrt{2} \cong 0,7$; $x_2 = 2 + \sqrt{2} \cong 3,4$.

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(-\infty, x_1)$	x_1	$(x_1, 1)$	1	$(1, x_2)$	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	decreciente	mínimo	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

f es decreciente en $(-\infty, x_1) \cup (1, x_2)$ y es creciente en $(x_1, 1) \cup (x_2, +\infty)$

4. Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

4.1 Sea $A = (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1)$

a) (1,3 puntos) Estudia si existe alguna matriz columna no nula B tal que $AB = B$. En caso afirmativo, calcula dicha matriz B.

Resolución

B es una matriz columna y para que se pueda hacer AB debe ser $B_{3 \times 1}$, $B = (a \ b \ c)$

$AB = B \Rightarrow (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ - \ 1)(a \ b \ c) = (a \ b \ c) \Rightarrow (a + b \ b \ - \ c) = (a \ b \ c)$. Igualando, $a + b = a$, $b = 0$; $-c = c$, $c = 0$

Luego, $B = (a \ 0 \ 0)$, con $a \in \mathbb{R}$

b) (1,2 puntos) Sea C una matriz columna no nula tal que $AC = -C$. Demuestra que también se cumple $A^{-1}C = -C$.

Resolución

Como $AC = -C$, multiplicando por C^{-1} , por la izquierda, $A^{-1}AC = (A^{-1})(-C) \Rightarrow IC = C = -A^{-1}C$

Por tanto, $A^{-1}C = -C$.

4.2 Analizamos en un comercio los precios de tres artículos A, B y C. El producto A es de primera necesidad y tiene un tipo superreducido de IVA del 4%; el producto B es de alimentación y tiene un tipo reducido de IVA del 10% y el artículo C es un pequeño electrodoméstico cuyo tipo de IVA es del 21%. El precio total sin IVA de la compra de 1 artículo A de primera necesidad, 2 productos B de alimentación y 5 pequeños electrodomésticos C es de 483 €. Mientras que el total de IVA correspondiente a la compra de 100 artículos de primera necesidad A, 10 productos de alimentación B y 100 pequeños electrodomésticos C, es de 1954 €. Además, se sabe que el precio sin IVA del pequeño electrodoméstico es igual al precio sin IVA de cuatro artículos de primera necesidad más ocho artículos de alimentación. Calcula los precios a la venta de los tres artículos, teniendo en cuenta que el precio a la venta es el precio con IVA incluido.

Resolución

Sean x, y, z los precios sin IVA de los artículos A (primera necesidad), B (de alimentación) y C (pequeño electrodoméstico), respectivamente. Según el enunciado,

$\{1x + 2y + 5z = 483 \quad 100 \cdot 0,04x + 10 \cdot 0,1y + 100 \cdot 0,21z = 1954 \quad z = 4x + 8y \Rightarrow \{x + 2y + 5z = 483 \quad 4x + y + 21z = 1954 \quad 4x + 8y - z = 0$. Usemos el método de Gauss:

$A^* = (1 \ 2 \ 5 \ 483 \ 4 \ 1 \ 21 \ 1954 \ 4 \ 8 \ - \ 1 \ 0) \xrightarrow{f_2 - 4f_1 \quad f_3 - f_1} (1 \ 2 \ 5 \ 483 \ 0 \ - \ 7 \ 1 \ 22 \ 0 \ 0 \ 21 \ 1932) \xrightarrow{:21} (1 \ 2 \ 5 \ 483 \ 0 \ - \ 7 \ 1 \ 22 \ 0 \ 0 \ 1 \ 92)$ que corresponde

al sistema $\{x + 2y + 5z = 483 \quad -7y + z = 22 \quad z = 92$; $y = \frac{z-22}{7} = \frac{92-22}{7} = 10$; $x = 483 - 2y - 5z = 483 - 2 \cdot 10 - 5 \cdot 92 = 3$

Como los precios sin IVA son $x = 3$ €, $y = 10$ €, $z = 92$ €, los precios a la venta son:

A (4% de IVA): $3 \cdot 1,04 = 3,12$ € ; B (10% de IVA): $10 \cdot 1,1 = 11$ € ; C (21% de IVA): $92 \cdot 1,21 = 111,32$ €

