

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя оргкомитета
III (областного) этапа республиканской
олимпиады,
заместитель начальника управления
образования Могилёвского облисполкома

С. В. Леонова

ноября 2011 года

Задания для II этапа республиканской олимпиады по математике

19 ноября 2011 года

8 класс

$$a + b + c = \frac{31}{15}, \quad a^2 + b^2 + c^2 = \frac{361}{225},$$

1. Действительные числа a , b , c таковы, что

$$abc = \frac{4}{15}. \quad \text{Найти } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

2. Словами *АЛГЕБРА* и *ГЕОМЕТРИЯ* зашифрованы некоторые два натуральных числа, при этом каждая буква обозначает некоторую цифру. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры. Известно, что среди различных букв, составляющих эти слова, найдутся ровно две буквы, которые обозначают одну и ту же цифру. Определить пару различных букв, которые обозначают одну и ту же цифру и найти эту цифру, если суммы цифр чисел *АЛГЕБРА* и *ГЕОМЕТРИЯ* равны соответственно 20 и 28.

$$\frac{n^2 + 4n + 3}{n + 2}$$

3. Доказать, что при любых натуральных n дробь $\frac{n^2 + 4n + 3}{n + 2}$ несократима.

4. Радуга, как известно, состоит из 7 различных цветов. Надя решила нарисовать свою «радугу», в которой для любых двух различных цветов радуги (из этих семи) нашлись бы две соседние полосы этих цветов. Какое наименьшее число полосок может иметь Надина «радуга»?

5. Основания равнобедренной трапеции равны 32 и 16. Высота равна 15. Какую сторону пересекает биссектриса угла при большем основании: меньшее основание или боковую сторону?

Пользоваться калькулятором не разрешается

Время работы: 4 часа

Указания к решению

8 класс

1. Решение.

Решение

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc} \quad (1)$$

$$(a + b + c)^2 = \left(\frac{31}{15}\right)^2 a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = \frac{961}{225}; \quad \frac{361}{225} + 2(ab + bc + ac) = \frac{961}{225}$$

$$2(ab + bc + ac) = \frac{600}{225}; \quad ab + bc + ac = \frac{4}{3}.$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc} = \frac{4}{3} : \frac{4}{15} = 5.$$

Ответ: 5.

2. Решение

$$\text{Имеем:} \quad A + Л + Г + Е + Б + Р + А = 20 \quad (1)$$

$$Г + Е + О + М + Е + Т + Р + И + Я = 28 \quad (2)$$

В этих словах встречаются 11 букв: А, Л, Г, Е, Б, Р, О, М, Т, И, Я которым соответствуют 10 цифр от 0 до 9, причем каким-то двум буквам соответствует одна и та же цифра. Тогда

$$A + Л + Г + Е + Б + Р + О + М + Т + И + Я = 0 + 1 + 2 + \dots + 9 + x = 45 + x, \quad (3)$$

где x – однозначное число, которое обозначает повторяющаяся цифра.

$$\text{Сложим (1) и (2): } A + Л + Г + Е + Б + Р + А + Г + Е + О + М + Е + Т + Р + И + Я = 48 \quad (4)$$

Вычтем (3) из (4):

$$A + Л + Г + Е + Б + Р + А + Г + Е + О + М + Е + Т + Р + И + Я - (A + Л + Г + Е + Б + Р + О + М + Т + И + Я) = 48 - (45 + x).$$

$$A + Г + 2Е + Р = 3 - x.$$

$$A + Г + 2Е + Р + x = 3.$$

Буквы А, Г, Е, Р, x обозначают числа от 0 до 9, причем А и Г не могут быть нулями, т.к. стоят в начале слов АЛГЕБРА и ГЕОМЕТРИЯ. Очевидно, А и Г не могут означать числа, большие 2, а также не могут одновременно означать 2.

Если $A = Г = x = 1$, то $E = Р = 0$ – противоречит условию, так как имеется ровно одна пара букв, которые обозначают одну и ту же цифру. Значит $A = 1$, $Г = 2$ или $A = 2$, $Г = 1$, тогда $E = Р = 0$ и $x = 0$.

Ответ: буквы Е и Р обозначают 0.

3. Доказательство

1 способ.

$$\text{Преобразуем исходную дробь: } \frac{n^2 + 4n + 3}{n + 2} = \frac{n^2 + 4n + 4 - 1}{n + 2} = \frac{(n + 2)^2 - 1}{n + 2}.$$

$$\frac{(n + 2)^2 - 1}{n + 2}$$

Докажем, что дробь $\frac{(n + 2)^2 - 1}{n + 2}$ несократима. Пусть число $n + 2$ (знаменатель дроби) делится без остатка на некоторое натуральное число d , большее 1. Тогда число $(n + 2)^2$ также делится на d , а вот

$$\text{число } (n + 2)^2 - 1 \text{ на } d \text{ нацело не делится – остаток от деления будет равен } d - 1: (n + 2)^2 = kd, \\ (n + 2)^2 - 1 = kd - 1 = kd - 1 - d + d = kd - d + d - 1 = d(k - 1) + (d - 1).$$

Аналогично получаем, что числитель дроби не делится нацело на все остальные делители знаменателя, большие единицы (если таковые есть). Значит, исходная дробь несократима. Что и требовалось доказать.

2 способ.

$$\frac{(n+1)(n+3)}{n+2}$$

Представим исходную дробь к виду $\frac{(n+1)(n+3)}{n+2}$. Известно, что НОД (n ; $n+1$)=1, поэтому числа $n+1$ и $n+2$ будут взаимно простыми. Числа $n+2$ и $n+3$ также будут взаимно простыми. Отсюда следует, что у числителя и знаменателя дроби не может общих делителей, больших 1. Значит, дробь несократима. Что и требовалось доказать.

4. Решение.

Обозначим цвета радуги буквами: К (красный), О (оранжевый), Ж (желтый), З (зеленый), Г (голубой), С (синий), Ф (фиолетовый). Подсчитаем количество различных пар этих цветов. Каждый цвет образует 6 пар, итого $6 \cdot 7 = 42$. Однако при этом мы каждую пару подсчитали дважды: например, пару КО подсчитали и как пару для К, и как пару для О. Поэтому истинное число пар будет $42 : 2 = 21$. Если Надя нарисует две полосы различных цветов, то для них можно обнаружить лишь одну пару цветов. Если нарисует три полосы, то можно обнаружить 2 пары соседних цветов (например, нарисованы КОЖ, то пары будут КО, ОЖ), на четырех полосках можно найти 3 пары соседних цветов (КОЖЗ: КО, ОЖ, ЖЗ). Рассуждая аналогично, получим, для того, чтобы иметь 21 пару различных соседних цветов, нужно нарисовать не менее 22 полосок. Вот один из примеров такого расположения полосок:

КОЖЗГСФГЖСЗОЗСКГОФЖКЗФК.

Ответ: 22.

5. Решение.

Пусть основания трапеции $AD=32$ и $BC = 16$, боковые стороны AB и CD . Несложно найти $AB=CD=17$.

Пусть биссектриса угла A пересекает прямую BC в точке E . Тогда

$\angle BEA = \angle DAE$ (внутренние накрест лежащие);

$\angle BAE = \angle DAE$ (AE – биссектриса $\angle A$)

Отсюда $\angle BEA = \angle BAE$ и треугольник ABE – равнобедренный.

Тогда $BE = AB = 17$. Так как $BE > BC$, то биссектриса $\angle A$ пересекает прямую BC за точкой C , а значит она еще раньше пересечет боковую сторону CD .

Ответ: боковую сторону.

