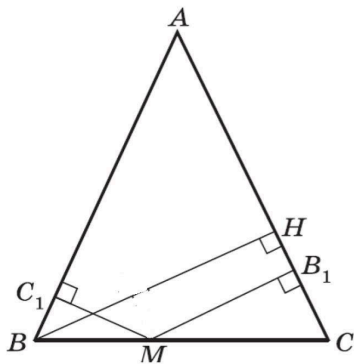


Занятие 1

Из чисел $1, 2, \dots, 2n$ выбрано более n различных чисел. Докажите, что одно из выбранных чисел делится на другое.

Докажите, что $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$ и $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

Числа a, b и c нечётные. Докажите, что хотя бы одно из чисел $ab-1$, $bc-1$ и $ca-1$ делится на 4.



Из точки M основания BC равнобедренного треугольника ABC проведены перпендикуляры MB_1 и MC_1 к прямым AC и AB , BH – высота этого треугольника. Докажите, что $MB_1 + MC_1 = BH$.

Трое друзей купили мяч. Каждый из них внёс не больше половины суммы, внесённой двумя остальными. Обязательно ли они внесли поровну?

Докажите, что $x(a - x) \leq \frac{a^2}{4}$.

Какое из чисел больше: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ или $\sqrt{11}$?

Боковые стороны трапеции равны. Докажите, что её диагонали равны и углы при основании тоже равны.

Основания равнобедренной трапеции видны из точки пересечения диагоналей под углом 60° . Докажите, что диагональ равна сумме оснований.

Найдите дробь, если известно, что она больше $5/9$ и меньше $4/7$, а её числитель меньше знаменателя на 16.

Может ли чётное число иметь нечётных делителей больше, чем чётных?

Докажите, что среди чисел 11, 111, 1111,... нет полных квадратов.

Числа a , b , c и d натуральные, $ab+bc+cd+da=55$. Найдите $a+b+c+d$.

Домашнее задание

Клетки шахматной доски 100×100 раскрашены в 4 цвета так, что в любом квадрате 2×2 все клетки разного цвета. Докажите, что угловые клетки раскрашены в разные цвета.

Занятие 2

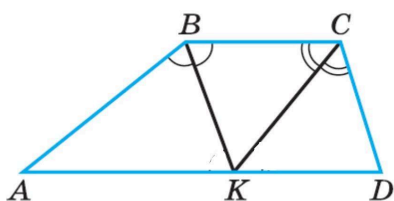
Можно ли тремя кругами, не имеющими общих точек, загородить точечный источник света на плоскости?

Докажите, что $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Найдите количество всех шестизначных чисел, в десятичной записи которых нет двух стоящих рядом одинаковых цифр.

Натуральное число N увеличили на 1, а его квадрат увеличился на 1001. Чему равно N ?

Биссектрисы углов при одном основании трапеции пересекаются в точке, лежащей на втором её основании. Докажите, что второе основание равно сумме боковых сторон.



Найдите углы трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию, а диагонали – большему.

Повесьте картину на веревочке на два гвоздя так, чтобы при вытаскивании любого из гвоздей картина падала.

Сумма любых четырёх из данных 25 чисел положительна. Докажите, что сумма всех чисел тоже положительна.

В институте работают правдолюбцы, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды каждый из сотрудников сделал два заявления.

1. В институте нет и десяти человек, которые работают больше меня.
2. В институте по крайней мере у ста человек зарплата больше, чем у меня.

Известно, что нагрузка у всех сотрудников разная и зарплата тоже. Сколько человек работает в институте?

На каждой стороне одного параллелограмма лежит ровно одна вершина другого параллелограмма. Докажите, что эти параллелограммы имеют общую точку пересечения диагоналей.

Многочлен $x^3 + ax^2 + 2x + b$ делится на $x^2 + x + 1$. Найдите a и b .

Домашнее задание

Намотайте верёвку, связав её концы, на три дерева так, чтобы её нельзя было снять с трёх деревьев, но можно было бы снять после спиливания любого из деревьев.

Число $7a+5b$ делится на 13. Докажите, что $41a+46b$ тоже делится на 13.

Докажите, что $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$ для всех x .

Может ли выражение $4x^4-28x^3+49x^2$ принимать отрицательные значения?

Какое из чисел больше: 3^{72} или 4^{54} ?

У султана было 100 придворных мудрецов. Однажды он собрал их и сообщил, что завтра всех посадят в круг и на каждого наденут белый или чёрный колпак (количество колпаков каждого цвета может быть любым). Все будут видеть всех, кроме самого себя. Подавать какие-либо знаки или переговариваться нельзя. Затем начнут в случайном порядке спрашивать каждого, какой на нём колпак. Мудрецы договорились отвечать так, чтобы правильных ответов было не менее 99. Как они это сделали?

Длина стороны AB трапеции $ABCD$ с прямым углом A равна сумме длин оснований AD и BC . В каком отношении биссектриса угла A делит сторону CD ?

Диагонали трапеции равны. Могут ли её боковые стороны быть неравными?

Какое из чисел больше: $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ или $2\sqrt{5}$?

В классе 25 детей. Для дежурства наугад выбирают двоих. Вероятность того, что оба дежурных окажутся мальчиками, равна $3/25$. Сколько в классе девочек?

Домашнее задание

На какое наибольшее число частей могут делить плоскость n окружностей?

Занятие 4

Сколькими способами можно выбрать трёх человек из 15 и поручить им три разных дела?

Сколькими способами можно выбрать из 15 человек команду в пять человек?

Чему равен коэффициент многочлена $(1 + x)^{15}$ при x^5 ?

В выпуклом n -угольнике никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Сколько всего у него точек пересечения диагоналей?

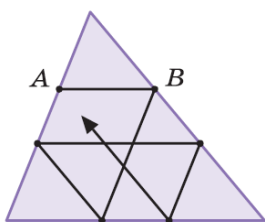
Пятеро друзей купили мяч. Могло ли оказаться, что каждые два из них внесли менее одной трети общей стоимости?

Углы при одном основании трапеции равны 50° и 80° . Докажите, что одна из её боковых сторон равна разности оснований.

Какое из чисел больше: $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$ или $2\sqrt{n}$ (число n натуральное)?

Есть три монеты: у одной обе стороны белые, у другой обе чёрные, у третьей одна белая и одна чёрная. Одну монету вынули и подбросили. Она упала белой стороной вверх. Чему равна вероятность того, что другая сторона у неё белая? А если монету подбросили два раза и оба раза она упала белой стороной вверх?

Из произвольной точки A , взятой на стороне треугольника, проводится прямая, параллельная другой его стороне и пересекающая третью в точке B . Далее процесс повторяется. В результате получается ломаная. Верно ли, что она замкнётся?

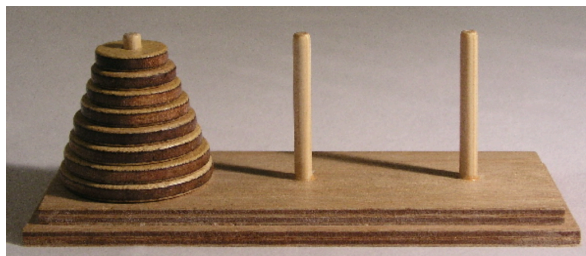


Домашнее задание

В выпуклом многоугольнике проведены непересекающиеся диагонали. Докажите, что по крайней мере из двух вершин эти диагонали не проведены.

Занятие 5

Игрушка «Ханойские башни» имеет три стержня. На одном находится пирамидка из n колец (уменьшающихся снизу вверх). Эту пирамидку нужно переложить на другой стержень, соблюдая следующие правила игры: нельзя переносить сразу несколько колец и нельзя класть большее кольцо поверх меньшего. Докажите, что это можно сделать за $2^n - 1$ ходов.



Докажите, что для перекладывания ханойской башни из n колец требуется не менее $2^n - 1$ ходов.

В треугольнике ABC проведена биссектриса AD . Прямые, проходящие через точку D параллельно AB и AC , пересекают стороны AC и AB в точках K и L . Докажите, что $AK=AL$.

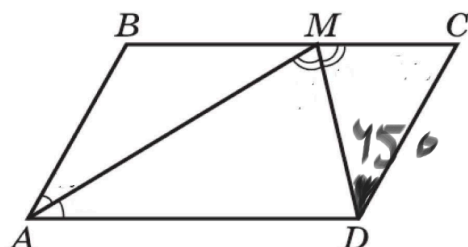
Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2=c^2$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

Как связаны числа m и n , если $\frac{1+2+3+\dots+m}{m} > \frac{1+2+3+\dots+n}{n}$?

Докажите, что для любого натурального n выполняется равенство $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Докажите, что сумма попарных произведений чисел от 1 до n равна $\frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}$.

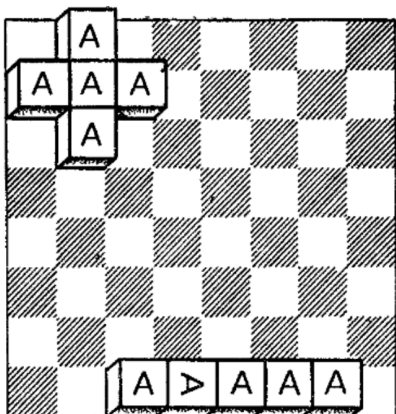
Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M , а биссектриса угла AMC проходит через вершину D . Найдите углы параллелограмма, если известно, что $\angle MDC = 45^\circ$.



Докажите, что среди чисел пяти последовательных натуральных чисел есть число, взаимно простое с остальными четырьмя числами.

Домашнее задание

Из пяти кубиков сложили крест в левом верхнем углу шахматной доски (на каждом кубике только одна буква А, остальные грани пустые). Перекатывая через ребро, их перекатали на нижнюю горизонталь. Где оказался центральный кубик?



Занятие 6

Значение выражения $ax+by$ при $x=7$ и $y=2$ равно 42.

Найдите значение этого выражения при $x = \frac{1}{2}$ и $y = \frac{1}{7}$.

Докажите, что числа $2a+3b$ и $9a+5b$ делятся на 17 одновременно.

Какое из чисел больше: $\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$ или $\sqrt{2}$?

Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 1, а один из его углов равен 15° . Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.

Середина боковой стороны трапеции равноудалена от двух противоположных от неё вершин. Докажите, что эта трапеция прямоугольная.

Представьте выражение $\sqrt{3 + \sqrt{2}} + \sqrt{3 - \sqrt{2}}$ в виде $\sqrt{m} + \sqrt{n}$, где m и n — натуральные числа.

Докажите, что $x + \frac{1}{x} \geq 2$ при $x > 0$ и $x + \frac{1}{x} \leq -2$ при $x < 0$.

Докажите, что граф с n вершинами, из каждой из которых выходит не менее $\frac{n-1}{2}$ рёбер, связан.

Домашнее задание

а) Представьте выражение $\sqrt{13 + \sqrt{48}}$ в виде $1 + \sqrt{n}$, где n - натуральное число.

б) Представьте выражение

$$2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$$

в виде $\sqrt{m} + \sqrt{n}$, где m и n — натуральные числа.

Занятие 7

Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 = c^2$. Докажите, что среди них есть число, делящееся на 5.

Биссектриса AD равнобедренного треугольника ABC с основанием AC вдвое больше биссектрисы BE . Найдите углы треугольника ABC .

Из всякого ли выпуклого четырехугольника можно вырезать параллелограмм, три вершины которого совпадают с тремя вершинами этого четырехугольника?

Докажите равенство

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Цифры трёхзначного числа записали сначала в порядке убывания (первая цифра самая большая, последняя самая маленькая), потом в порядке возрастания. Разность между записанными числами оказалась равной исходному числу. Найдите это число.

Докажите, что $\sqrt{10 + \sqrt{24 + \sqrt{40 + \sqrt{60}}}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

Внутри равностороннего треугольника со стороной 2 расположено пять точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 1.

Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что высота трапеции равна полусумме оснований.

Какое наименьшее значение принимает величина $x + \frac{9}{x}$ при $x > 0$?

Домашнее задание

В некоторой стране 100 аэродромов, попарные расстояния между которыми различны. С каждого аэродрома поднимается самолёт и летит на ближайший к нему аэродром. Докажите, что ни на один аэродром не может прилететь больше пяти самолётов.

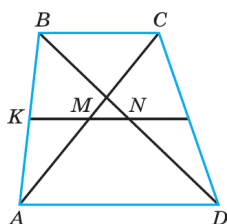
Занятие 8

Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 = c^2$. Докажите, что среди них есть число, делящееся на 4.

Наибольший общий делитель чисел a, b и c , удовлетворяющих соотношению $a^2 + b^2 = c^2$, равен 1. Докажите, что существуют взаимно простые числа m и n , для которых $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$.

Докажите, что $\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1}$.

Основания трапеции равны a и b . Найдите длину отрезка, отсекаемого диагоналями трапеции на средней линии.



Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает в точке K прямую, проходящую через середины A_1 и C_1 сторон BC и AB . Докажите, что $2A_1K = |AB - AC|$.

Найдите двузначные числа, которые являются последними цифрами своих квадратов.

Найдите трёхзначные числа, которые являются последними цифрами своих квадратов.

Докажите, что $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n - 1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

Можно ли стороны и диагонали 13-угольника раскрасить в 12 цветов так, чтобы в каждой вершине сходились все цвета?

Домашнее задание

Докажите, что существуют числа из n цифр, оканчивающиеся на 5 и на 6, которые являются последними n цифрами своих квадратов.

Занятие 9

Докажите, что $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

Числа a и b различны. Решите уравнение $|x-a|=|x-b|$.

Докажите, что середины сторон произвольного четырёхугольника – вершины параллелограмма. Для каких четырёхугольников этот параллелограмм является прямоугольником, для каких – ромбом, для каких – квадратом?

Докажите, что основания перпендикуляров, проведённых из вершины A треугольника ABC , к биссектрисам внешних и внутренних углов с вершинами B и C , лежат на одной прямой.

Найдите зависимость между числами $a=x+y$, $b=x^2+y^2$ и $c=x^3+y^3$.

Найдите x , если $x^3=401^3-3 \cdot 401^2+1202$.

Докажите, что у связного графа с N вершинами не менее $N-1$ рёбер.

Число $3a+4b+5c$ делится на 11. Докажите, что число $9a+b+4c$ тоже делится на 11.

Домашнее задание

Можно ли на плоскости расположить 1000 отрезков так, чтобы каждый отрезок обоими концами упирался строго внутрь других отрезков?

Занятие 10

Какое наибольшее число верёвочек волейбольной сетки размером n на m можно перерезать, чтобы она не развалилась на несколько кусков?

Сколько разных ожерелий можно составить из пяти белых бусинок и двух чёрных?

Поезд проходит мимо наблюдателя в течение X секунд, при той же скорости он проходит через мост длиной в 100 метров в течение Y секунд. Найдите длину поезда.

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 . Докажите, что $\angle AA_1B_1 = \angle ABB_1$.

Вершины трапеции расположены на окружности. Докажите, что эта трапеция равнобедренная.

Натуральное число n не является полным квадратом. Докажите, что число $\sqrt{n}$ иррационально.

Докажите, что если числа a, b, c, d положительные и $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Попарно различные числа a, b, c удовлетворяют условию $a^2(b+c)=b^2(a+c)$. Докажите, что $a^2(b+c)=c^2(a+b)$.

Домашнее задание

Докажите, что если натуральные числа a и b взаимно простые, то $a^n - 1$ делится на b для некоторого натурального n . Например, если число b не делится на 2 и на 5, то какое-то число вида $9999\dots 99$ делится на b .

Занятие 11

Существует ли трапеция, каждая диагональ которой разделяет её на два равнобедренных треугольника?

Числа a и b положительные. Докажите, что $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Разложите на два множителя многочлен $x^3 + 2x - 3$.

Прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C движется так, что его вершины A и B скользят по сторонам неподвижного прямого угла. Докажите, что вершина C движется по некоторой прямой.

Перпендикулярные хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E , точка M – середина хорды BD . Докажите, что $ME \perp AC$.

Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы двух сторон, выходящих из той же вершины.

Целые числа $a_1, \dots, a_{2n+1}$ записали в другом порядке и получили числа $b_1, \dots, b_{2n+1}$. Докажите, что хотя бы одна из разностей $a_k - b_k$ чётна.

Каждые две вершины графа соединены ребром и рёбра покрашены в два цвета. Докажите, что один из этих одноцветных графов связный.

Найдите все пары целых чисел x и y , удовлетворяющих равенству $3x+4y=32$ и неравенствам $x < y < \frac{3}{2}x$.

Докажите, что $1^{45} + 2^{45} + \dots + 38^{45}$ делится на 13.

Найдите остаток от деления многочлена $(x + 1)^7 + x^5 + (x - 1)^2$ на многочлен $x + 2$.

Домашнее задание

На кольцевой автомобильной дороге стоят несколько одинаковых автомашин. Если бы весь бензин, имеющийся в этих автомашинах, слили в одну, то эта машина смогла бы проехать по всей кольцевой дороге и вернуться на прежнее место. Докажите, что хотя бы одна из этих машин может объехать всё кольцо, забирая по пути бензин у остальных машин.

Занятие 12

Целая часть числа p , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее p , обозначается $[p]$. Например, $[32.09]=32$.

Число a положительное, число n натуральное. Докажите, что количество натуральных чисел, не превосходящих a и делящихся на n , равно $\left[\frac{a}{n} \right]$.

Докажите, что для любого положительного числа a и любого натурального числа n выполняется равенство $\left[\frac{a}{n} \right] = \left[\frac{[a]}{n} \right]$.

Докажите, что наибольшая степень простого числа p , на которую делится $n!$, равна $\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots$
(в этой сумме конечное число слагаемых, отличных от нуля).

Из точки M , лежащей внутри острого угла с вершиной A , проведены перпендикуляры MP и MQ к его сторонам. Докажите, что $\angle PAM = \angle PQM$.

Угол A остроугольного треугольника ABC равен 60° , BP и CQ – высоты этого треугольника, M – середина стороны BC . Докажите, что треугольник PQM равносторонний.

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 . Докажите, что $\angle CA_1B_1 = \angle A$.

Докажите, что если $a > 1$ и $b > 1$, то $a + b < 1 + ab$, если $a > 1$ и $b < 1$, то $a + b > 1 + ab$.

Докажите, что число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ иррациональное.

Докажите, что если $a + b + c + d > 0$, $a > c$ и $b > d$, то $|a + b| > |c + d|$.

Докажите, что $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$ и $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$.

Домашнее задание

Из шахматной доски вырезали одну чёрную и одну белую клетку. Докажите, что оставшуюся часть можно замостить доминошками (прямоугольниками размером 1×2).

Занятие 13

Докажите равенство

$$\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2} - \sqrt{5}}.$$

На консультации было 20 школьников и разбиралось 20 задач. Оказалось, что каждый из школьников решил две задачи и каждую

задачу решили два школьника. Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну из решённых им задач и все задачи были разобраны.

Сколькими способами можно выбрать из 15 человек две команды по пять человек в каждой?

Уравнение $x^2+ax+b=0$ с рациональными коэффициентами имеет корень $1 + \sqrt{3}$. Найдите a и b .

Докажите, что квадратное уравнение $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ имеет корень.

Из точки M , расположенной на катете BC прямоугольного треугольника ABC , проведён перпендикуляр MN к гипотенузе AB . Докажите, что $\angle MAN = \angle MCN$.

Вершины P и Q равностороннего треугольника APQ лежат на сторонах BC и CD прямоугольника $ABCD$, точки M и N – середины сторон AP и AQ . Докажите, что треугольники BNC и CMD равносторонние.

Докажите, что равенства $y = \frac{x+1}{x-1}$ и $x = \frac{y+1}{y-1}$ эквивалентны, т. е. из первого равенства следует второе и наоборот.

Докажите, что число всех цифр в последовательности $1, 2, 3, \dots, 10^k$ равно числу всех нулей в последовательности $1, 2, 3, \dots, 10^{k+1}$.

Домашнее задание

Найдите все числа a , для которых числа $a + \sqrt{15}$ и $\frac{1}{a} - \sqrt{15}$ целые.

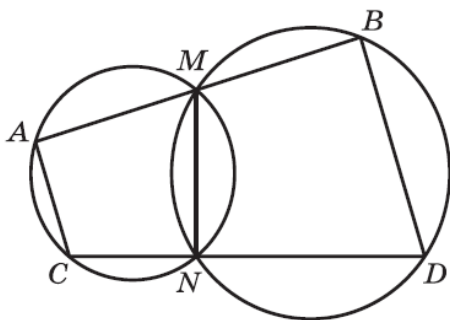
а) Проверьте, что числа $a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $b_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ являются корнями уравнения $x^2 = x + 1$.

б) Положим $a_n = a_1^n$ и $b_n = b_1^n$. Докажите, что $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ и $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$.

Числа Фибоначчи определяются следующим образом:

$F_1 = 1$, $F_2 = 1$ и $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ при $n \geq 3$. Докажите, что

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$



Две окружности пересекаются в точках M и N . Прямые AB и CD , проходящие через эти точки, пересекают одну окружность в точках A и C , а другую в точках B и D . Отрезки AC и BD расположены по разные стороны от прямой MN . Докажите, что $AC \parallel BD$.

Любое ли натуральное число n можно представить в виде $n=[x]+[2x]$, где x - некоторое положительное число? (Квадратные скобки $[]$ обозначают целую часть числа.)

Сколькими способами можно разбить 17 человек на две группы по 12 и 5 человек так, чтобы два данных человека оказались в разных группах? А в одной группе?

Докажите, что если точка C лежит вне круга с диаметром AB , то угол C треугольника ABC острый.

Докажите, что если точка C лежит внутри круга с диаметром AB , то угол C треугольника ABC тупой.

Найдите сумму $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} + \frac{16}{1+a^{16}}$.

Уравнения $x^2+ax+b=0$ и $x^2+cx+d=0$ не имеют корней, меньших x_0 .

Докажите, что уравнение $x^2 + \frac{a+c}{2}x + \frac{b+d}{2} = 0$ тоже не имеет корней, меньших x_0 .

Докажите, что количество пятизначных чисел, не делящихся на 5, равно количеству пятизначных чисел, у которых ни первая, ни вторая цифра слева – не пятёрка.

Разложите на два множителя многочлен $x^4 + 4$.

Докажите, что основания высот остроугольного треугольника являются вершинами треугольника, углы которого делятся этими высотами пополам.

Домашнее задание

Окружность покрыта несколькими дугами. Эти дуги могут налегать друг на друга, но ни одна из них не покрывает окружность целиком. Докажите, что всегда можно выбрать несколько из этих дуг так, чтобы они тоже покрывали всю окружность и составляли в сумме не более 720° .

Занятие 15

Докажите, что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке. (Воспользуйтесь тем, что основания высот остроугольного треугольника являются вершинами треугольника, углы которого делятся этими высотами пополам.)

Решение квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q, \quad x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

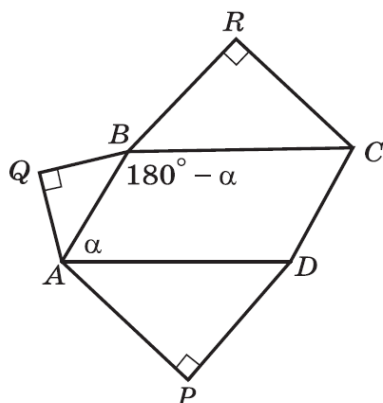
Решите уравнение $2x = |x| + 1$.

Числа x , y и z положительны. Докажите, что $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$.

Докажите, что сумма $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ является квадратом числа $1+2+3+\dots+n$.

Вершины двух равнобедренных трапеций с соответственно параллельными сторонами расположены на одной окружности. Докажите, что диагонали этих трапеций равны.

На сторонах параллелограмма внешним образом построены квадраты. Докажите, что их центры образуют квадрат.



Домашнее задание

Докажите, что среди чисел десяти последовательных натуральных чисел есть число, взаимно простое с остальными девятью числами.

Занятие 16

В следующих двух задачах ответ выражается через числа Фибоначчи.

Сколькими способами можно разделить отрезок длины n на отрезки длины 1 и 2?

Сколькими способами можно выбрать несколько (в том числе и ни одного) из чисел $1, 2, 3, \dots, n$, если среди выбранных чисел не должно быть двух последовательных чисел?

Разложите на три множителя многочлен $x^3 - 6x^2 - x + 30$.

Из точки M , движущейся по окружности, проводятся перпендикуляры MP и MQ к диаметрам AB и CD . Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки M .

Докажите, что медиана AM треугольника ABC больше $\frac{1}{2}(AB + AC - BC)$.

У квадрата числа $X+1$ несколько последних цифр такие же, как у числа X . Докажите, что у куба числа X столько же последних цифр такие же, как у числа X .

Докажите, что уравнения

$$x = 3 + \frac{1}{x} \quad \text{и} \quad x = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}}$$

имеют одинаковые корни.

В выпуклом 13-угольнике проведены все диагонали. Они разбивают его на многоугольники. Возьмём среди них многоугольник с наибольшим числом сторон. Какое самое большее число сторон может он иметь?

Домашнее задание

Докажите, что при любом x выполняется неравенство $x(x+1)(x+2)(x+3) \geq -1$.

Запишите число $\sqrt{2\sqrt{7} - 4\sqrt{3}}$, используя знак корня только один раз.

Докажите, что сумма медиан любого треугольника меньше периметра, но больше $\frac{3}{4}$ периметра.

Корни многочлена x^2+px+q равны x_1 и x_2 . Выразите $x_1^2 + x_2^2$ и $x_1^3 + x_2^3$ через p и q .

Корни многочлена x^2+px+q равны x_1 и x_2 , $s_n = x_1^n + x_2^n$ (число n натуральное). Докажите, что $s_n = -ps_{n-1} - qs_{n-2}$ при $n > 2$.

Две окружности пересекаются в точках A и B , на одной из них выбирается точка C . Продолжения отрезков CA и CB за точки A и B пересекают вторую окружность в точках K и L . Докажите, что длина хорды KL не зависит от положения точки C .

Окружность S_1 проходит через центр O окружности S_2 . Эти окружности пересекаются в точках A и B . Хорда OC окружности S_1 пересекает окружность S_2 в точке D . Докажите, что AD – биссектриса угла BAC .

Докажите, что $F_k^2 = F_k F_{k+1} - F_{k-1} F_k$ при $k \geq 2$.

Докажите, что $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

Разложите на два множителя многочлен $x^4 + x^2 + 1$.

N городов соединены дорогами так, что из каждого города можно проехать в каждый, но нет двух городов, соединённых разными путями. Докажите, что количество дорог равно $N-1$.

Домашнее задание

50 карточек с числами на них лежат в ряд. Двое по очереди берут любую из двух крайних карточек. Докажите, что первый всегда может набрать не меньшую сумму чисел, чем второй.

Занятие 18

Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка P так, что $AD=n \cdot AP$; где число n целое, Q – точка пересечения отрезков AC и BP . Докажите, что $AC=(n+1)AQ$.

Числа $y_1, \dots, y_n$ положительны, и $\frac{x_1}{y_1} \leq \frac{x_2}{y_2} \leq \dots \leq \frac{x_n}{y_n}$.

Докажите, что $\frac{x_1}{y_1} \leq \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{y_1+y_2+\dots+y_n} \leq \frac{x_n}{y_n}$.

Числа a и b натуральные. Докажите, что для любого натурального n число $(a + \sqrt{b})^n + (a - \sqrt{b})^n$ целое.

Докажите, что $[\sqrt{4n+1}] = [\sqrt{4n+2}] = [\sqrt{4n+3}]$ для любого натурального числа n .

Докажите, что $[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+2}]$ для любого натурального числа n .

Докажите, что решение уравнения $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ сводится к последовательному решению квадратных уравнений.

Докажите, что решение уравнения $x^4+ax^3+bx^2-ax+1=0$ сводится к последовательному решению квадратных уравнений.

Домашнее задание

Найдите первую цифру после точки числа $(2 + \sqrt{3})^{1000}$.

3.73205080756887

13.92820323027551

51.98076211353315

193.99484522385712

723.99861878189535

2701.99962990372428

10083.99990083300180

Занятие 19

Хорды AB и CD пересекаются в точке M . Докажите, что угол AMC равен полусумме дуг окружности, заключённых внутри этого угла и угла BMD .

Продолжения хорд AB и CD пересекаются в точке M . Докажите, что угол AMC равен полуразности дуг окружности, заключённых внутри этого угла.

Наибольший общий делитель чисел a , b и c равен 1 и $a^2 + b^2 = c^2$.

а) Докажите, что одно из чисел a или b чётно, а другое нечётно.

б) Пусть для определённости число a чётно. Докажите, что существуют взаимно простые числа m и n , для которых $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$.

Разложите на множители $(x - y + z)^2 - x^2 + y^2 - z^2$.

Решите уравнение $|x - 101| + |101 - x| = 102$.

Из конца A диаметра AB окружности проведён перпендикуляр AN к прямой, касающейся окружности в точке C . Докажите, что луч AC – биссектриса угла NAB .

Пусть AB и AC – отрезки касательных, проведённые из точки A , O – центр окружности. Третья касательная к окружности пересекает отрезки AB и AC в точках X и Y . Докажите, что величина угла XOY не зависит от выбора третьей касательной.

Домашнее задание

В клетках прямоугольной таблицы стоят числа. Сначала в каждой строке числа расположили в порядке возрастания, а потом в каждом столбце. Докажите, что в каждой строке числа расположены по порядку.

Занятие 20

Решите уравнение $x(x+1)=2019 \cdot 2020$.

Докажите, что для любых двух чисел x и y выполняется неравенство $|x+y| \leq |x|+|y|$, причём это неравенство строгое тогда и только тогда, когда $xy < 0$.

Докажите, что $|x+a|+|x-a| \geq 2|a|$.

Может ли отрезок, расположенный внутри круга, быть больше диаметра этого круга?

Докажите, что если углы A и C выпуклого четырёхугольника $ABCD$ тупые, то $AC < BD$.

Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны AB в точке K . Докажите, что $AK = \frac{1}{2}(AB+AC-BC)$.

Решите систему уравнений: $xy=1$, $yz=2$, $zx=8$.

Решите систему уравнений $xy(x+y)=30$, $x^3+y^3=35$.

Числа x и y положительны, и $xy > x+y$. Докажите, что $x+y > 4$.

Найдите все числа a , для которых уравнения $x^2+ax+1=0$ и $x^2+x+a=0$ имеют общий корень.

Укажите многочлен с целыми коэффициентами, имеющий корень $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Домашнее задание

В прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c вписана окружность радиуса r . Докажите, что $2r=a+b-c$.

Занятие 21

Докажите равенство

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} = \sqrt{99} - 1.$$

Докажите, что биссектриса угла C треугольника ABC и биссектриса внешнего угла с вершиной C пересекают окружность, описанную около треугольника, в точках, равноудалённых от точек A и B .

Решите уравнение $x(x+3)(x+5)(x+8)=100$.

Подберите числа a_0, a_1, a_2, a_3 так, чтобы выполнялось равенство $x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = a_3(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0$.

Решите систему: $x-y=2, xy=3$.

Решите уравнение $|x-1|+|x-2|+|x-3|=2$.

Решите уравнение $|x-2|+|x-1|+|x|+|x+1|+|x+2|=6$.

На основании AB равнобедренного треугольника ABC отмечена точка E и в треугольники AEC и BEC вписаны окружности. Они касаются отрезка CE в точках M и N . Найдите длину отрезка MN , если известны длины отрезков AE и BE .

Сумма углов при основании трапеции равна 90° . Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности оснований.

Решите в целых положительных числах уравнение $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Домашнее задание

Приведите пример квадратного трёхчлена ax^2+bx+c с целыми коэффициентами, который при всех натуральных x , записанных только единицами, принимает значения такого же вида.

Занятие 22

Разложите на множители $x^2+xy-6y^2$.

Сравните $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ и $\sqrt{15}$.

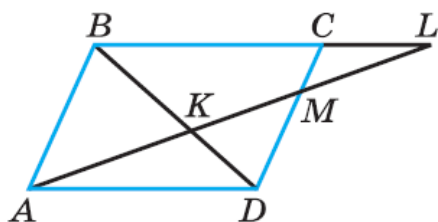
Приведите к общему знаменателю дробь $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c}$ и разложите на множители числитель полученной дроби.

Докажите, что если $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, то

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{1}{a^3+b^3+c^3}.$$

Две вершины квадрата расположены на одной стороне треугольника, а две другие вершины – на других сторонах. Высота треугольника равна h , а сторона, на которой расположена сторона квадрата, равна a . Найдите сторону квадрата.

На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка K .
Прямая AK пересекает прямые BC и CD в точках L и M . Докажите,



что $AK^2 = LK \cdot KM$.

Решите уравнение $(x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) = 4x^2$.

Домашнее задание

В строку записано $m+1$ попарно различных чисел. Докажите, что среди них можно выбрать либо $m+1$ чисел, записанных в порядке возрастания, либо $n+1$ чисел, записанных в порядке убывания.

Занятие 23

Докажите, что из целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ можно выбрать одно или несколько последовательных чисел так, чтобы их сумма делилась на n .

Диагональ равнобедренной трапеции равна 5, а её высота равна 3. Найдите среднюю линию.

Сторона AC треугольника ABC меньше стороны BC . Докажите, что медиана AA_1 меньше медианы BB_1 .

Решите систему уравнений: $x(y+z)=35$, $y(x+z)=32$, $z(x+y)=27$.

Докажите, что диагональ четырёхугольника меньше половины его периметра.

Докажите, что сумма диагоналей любого четырёхугольника меньше его периметра и больше половины периметра.

а) Числа a , b и c попарно различны. Найдите квадратный

трёхчлен $f(x)$, равный 1 при $x=a$ и равный 0 при $x=b$ и $x=c$.

б) Числа a , b и c попарно различны. Найдите квадратный трёхчлен $f(x)$, принимающий при $x=a$, $x=b$ и $x=c$ заданные значения A , B и C соответственно.

Домашнее задание

Докажите, что квадрат 6×6 нельзя замостить костями домино 1×2 так, чтобы не было «шва», т.е. прямой, не разрезающей костей.

Занятие 24

Какое из чисел больше: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ или $\frac{1}{\sqrt{n}}$

(число n натуральное)?

Приведите пример натурального числа n , для которого

$\sqrt{n} + \sqrt{n+60} = \sqrt{m}$, где m — натуральное число, не являющееся полным квадратом.

Найдите простые числа p, q, r , для которых $pqr = 7(p+q+r)$.

На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки K и L так, что $AK = BL$, и через точки K и L проведены прямые, параллельные BC и AB . Докажите, что точка пересечения этих прямых лежит на стороне AC .

Прямая пересекает стороны AB и AD параллелограмма $ABCD$ в точках E и F , а диагональ AC — в точке G . Докажите, что $AB/AE + AD/AF = AC/AG$.

Про натуральные числа a и b известно, что $a^2 + b^2$ делится на ab . Докажите, что $a=b$.

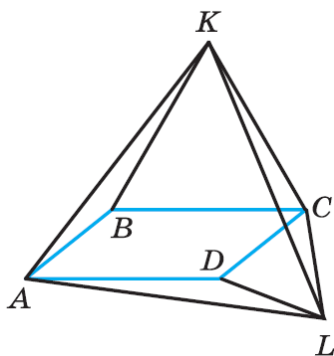
Домашнее задание

Докажите, что существует граф с $2n$ вершинами, степени которых равны $1, 1, 2, 2, \dots, n, n$.

Занятие 25

Докажите, что $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 при натуральных n .

Разложите на множители $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.



На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ построены внешним образом равносторонние треугольники BCK и DCL . Докажите, что треугольник AKL равносторонний.

Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC , касаются стороны AC в одной и той же точке тогда и только тогда, когда $AB + CD = BC + AD$.

Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны AB в точке E . В треугольники AEC и BEC вписаны окружности. Докажите, что они обе касаются отрезка CE в одной и той же точке.

Разложите на множители $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15$.

Имеет ли уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 4(xy + yz + zx)$ целочисленные решения, отличные от нулевого?

а) Докажите, что если $a + b = 2$, то $a^4 + b^4 \geq 2$.

б) Докажите, что если $p + q = 1$, то $p^4 + q^4 \geq 1/8$.

Докажите, что если $x^2 + y^2 = a^2$, то $\frac{a^4}{2} \leq x^4 + y^4 \leq a^4$.

Может ли дробь вида $\frac{6n+7}{8n+9}$ быть сократимой для какого-то натурального числа n ?

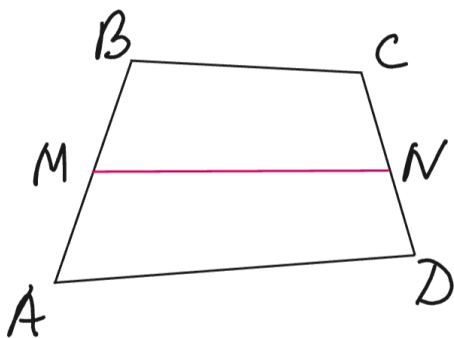
Домашнее задание

Квадратное поле разбито на 100 одинаковых квадратных участков, 9 из которых поросли бурьяном. Известно, что бурьян за год распространяется на те и только те участки, у которых не менее двух соседних (т.е. имеющих общую сторону) участков уже поросли бурьяном. Докажите, что поле никогда не зарастёт бурьяном полностью.

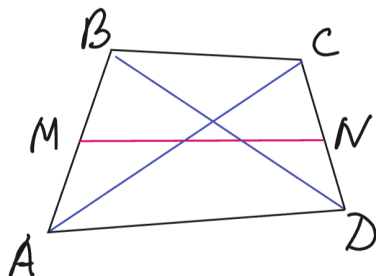
Занятие 26

Двое по очереди кладут доминошки на два свободных поля шахматной доски 8×8 . Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто может обеспечить себе выигрыш?

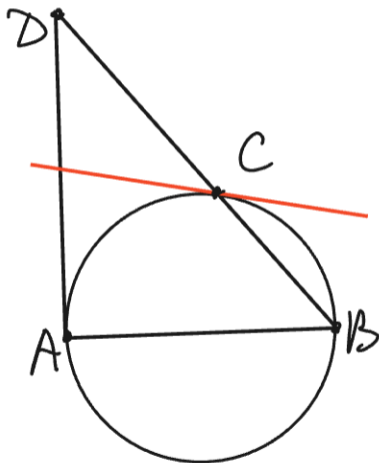
Точки M и N – середины сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $MN \leq \frac{1}{2}(BC + AD)$.



Докажите, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырёхугольника, меньше полусуммы его диагоналей.



Через конец A диаметра AB проведена касательная к окружности. Прямая BC , где C – некоторая точка окружности, пересекает эту касательную в точке D . Докажите, что касательная к окружности, проведённая через точку C , делит отрезок AD пополам.



Найдите наименьшее значение выражения $|x-2y+1|+|x+2y-3|$.

Разложите на множители $u^2+3uv+4u-6v-12$.

а) Докажите, что $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

б) Докажите, что $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$.

Докажите, что число

$$\underbrace{111\dots1}_{2n} - \underbrace{222\dots2}_n$$
 является квадратом целого числа.

В вагоне поезда едут несколько мудрецов. Когда поезд проехал туннель, в окна попала пыль. Вошёл проводник и сказал: «У некоторых из вас испачкались лица. К сожалению, в поезде нет воды. Но сейчас будут большие остановки, поэтому можно будет выйти из поезда и умыться». На n -й остановке испачкавшиеся мудрецы вышли из поезда, чтобы умыться. Сколько мудрецов испачкалось? (Мудрец идёт умываться тогда и только тогда, когда он точно знает, что испачкался.)

Домашнее задание

Докажите, что из 11 различных бесконечных десятичных дробей можно выбрать две дроби, которые совпадают в бесконечном числе разрядов.

Занятие 27

Есть N человек, каждый из которых знает свою сплетню. Позвонив кому-то можно рассказать ему все сплетни, какие узнал (рассказывает только один, а второй слушает, в каждый момент разговор только один). За какое наименьшее количество звонков все будут знать все сплетни?

Квадратный трёхчлен ax^2+bx+c не имеет корней и $a+c < b$. Положительно или отрицательно число c ?

К двум касающимся внешним образом окружностям, радиусы которых равны R и r , проведена прямая, касающаяся их в точках A и B . Найдите длину отрезка AB .

Докажите, что количество способов представить число n в виде суммы положительных нечётных слагаемых равно числу Фибоначчи F_n . (Представления, различающиеся порядком слагаемых, считаются различными.)

Докажите, что количество способов представить число n в виде суммы нескольких целых слагаемых $a_i \geq 2$ равно F_{n-1} .

(Представления, различающиеся порядком слагаемых, считаются различными.)

Точка M лежит внутри окружности. Одна прямая, проходящая через точку M , пересекает окружность в точках A и B , другая - в точках C и D . Докажите, что $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.

Точка M расположена вне окружности. Одна прямая, проходящая через точку M , пересекает окружность в точках A и B , другая - в точках C и D . Докажите, что $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.

Одна прямая, проходящая через точку M , пересекает окружность в точках A и B , другая касается окружности в точке C . Докажите, что $MC^2 = AM \cdot BM$.

Числа m и n натуральные, дробь $\frac{n}{m}$ несократима. На какое наибольшее натуральное число может быть сократима дробь $\frac{3n+4m}{4n+3m}$?

Докажите, что если $|x| < 1$ и $|y| < 1$, то $|x-y| < |1-xy|$.

Решите уравнение $(x-6)^4 + (x-4)^4 = 82$.

Домашнее задание

Прямоугольник покрыт 25 кругами радиуса 2. Обязательно ли можно его покрыть 100 кругами радиуса 1?

Занятие 28

Разложите на множители $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Докажите, что если числа x, y, z положительны и $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$, то $x=y=z$.

Решите в натуральных числах уравнение $1+x+x^2+x^3=2^y$.

Две окружности касаются внутренним образом третьей окружности в точках A и B , причём одна из точек пересечения этих окружностей лежит на отрезке AB . Докажите, что сумма радиусов первых двух окружностей равна радиусу третьей окружности.

Две окружности, сумма радиусов которых равна радиусу третьей окружности, касаются её внутренним образом. Докажите, что отрезок, соединяющий точки касания, проходит через одну из общих точек первых двух окружностей.

Через точку P биссектрисы угла проведена прямая, отсекающая на его сторонах отрезки, равные a и b . Докажите, что величина $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ не зависит от выбора этой прямой.

Решите систему: $x+y+xy=19$, $y+z+yz=11$, $z+x+zx=14$.

В трёх крайних справа клетках полосы из $N>3$ клеток стоят фишки. Их можно передвигать на свободные клетки слева. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Докажите, что первый всегда может выиграть.

Домашнее задание

Докажите, что для любого натурального n число $(1 + \sqrt{2})^n$ можно представить в виде $\sqrt{m} + \sqrt{m+1}$, где m – некоторое натуральное число.

Занятие 29

Докажите, что если $x + y = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, то либо $x+y=0$, либо $xy=1$.

Решите уравнение $\frac{x-49}{50} + \frac{x-50}{49} = \frac{50}{x-49} + \frac{49}{x-50}$.

Найдите наименьшее натуральное число, остатки от деления которого на 13 и 29 равны 9 и 25 соответственно.

Докажите, что медианы разбивают треугольник на шесть треугольников равной площади.

Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O . Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Две окружности касаются прямой в точках A и B и друг друга в точке C . Найдите угол ACB .

Докажите, что число

$(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5})$
целое.

Избавьтесь от иррациональности в знаменателе: $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

Найдите наименьшее натуральное число, большее 4, остатки от деления которого на 5, 9 и 11 равны 4.

Найдите такие натуральные числа a, b , что их разность равна 21, а наименьшее число, которое делится на оба числа a и b , равно 28.

Вычислите x^7+64x^2 , если $x^3+4x=8$.

Числа m и n натуральные, дробь $\frac{n}{m}$ несократима. На какое наибольшее натуральное число может быть сократима дробь $\frac{2n+3m}{4m-5n}$?

Домашнее задание

Докажите, что единственное целочисленное решение уравнения

$x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4 - 6x^2z^2 - 12y^2z^2 + 9z^4 = 0$ - это $x=y=z=0$.

Занятие 30

Траншея шириной 2 метра поворачивает под прямым углом. Как сделать мостик, положив две доски длиной 1.9 метра каждая?

В класс пришло 30 школьников. Каждый, кто принёс тетрадку, принёс и шоколадку. Забыли шоколадку 8 учеников, а тетрадку - 11. Кого больше: школьников, которые принесли тетрадку, или тех, кто принёс шоколадку, но забыл тетрадку?

Решите систему: $x^3+x^3y^3+y^3=17$, $x+xy+y=5$.

Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на части, пропорциональные двум другим сторонам.

Биссектриса внешнего угла с вершиной A треугольника ABC пересекает прямую BC в точке D . Докажите, что $BD:CD=AB:AC$.

В каком отношении биссектриса BE треугольника ABC делит биссектрису AD , если $AB=c$, $BC=a$ и $AC=b$?

Домашнее задание

Последовательность чисел $a_1, \dots, a_n$ обладает следующим свойством: сумма любых n последовательных её членов положительна, а сумма любых m последовательных членов отрицательна. Докажите, что $N \leq n+m-2$. Для взаимно простых чисел m и n докажите существование такой последовательности длины $n+m-2$. (Если наибольший общий делитель чисел n и m равен d , то наибольшая длина требуемой последовательности равна $n+m-d-1$.)

Занятие 31

Для какого наименьшего N число $N/2$ - полный квадрат, $N/3$ - полный куб, $N/5$ - пятая степень некоторого числа?

На 30 карточках написаны числа 10, 15 и 20, сумма этих чисел равна 500. Докажите, что карточек с числом 20 больше, чем с числом 10.

Графики функций $y=kx+b$ и $y=bx+k$ пересекаются. Найдите координату x точки пересечения.

Прямые $y=kx+b$, $y=2kx+2b$ и $y=bx+k$ различны и пересекаются в одной точке. Какими могут быть её координаты?

Прямая l касается окружностей с центрами O_1 и O_2 и не пересекает отрезок O_1O_2 . Докажите, что расстояние от середины этого отрезка до прямой l равно полусумме радиусов окружностей.

Прямая l касается окружностей с центрами O_1 и O_2 и пересекает отрезок O_1O_2 . Докажите, что расстояние от середины этого отрезка до прямой l равно полуразности радиусов окружностей.

Точка D лежит на биссектрисе угла A . Две окружности, проходящие через точки A и D , пересекают одну сторону этого угла в точках B_1 и B_2 , а другую – в точках C_1 и C_2 . Докажите, что $B_1B_2 = C_1C_2$.

Домашнее задание

В формулу линейной функции $y=kx+b$ вместо букв k и b впишите числа от 1 до 20 (каждое по одному разу) так, чтобы получилось 10 функций, графики которых проходят через одну и ту же точку.

Занятие 32

Найдите все такие функции $f(x)$, что $f(2x+1)=4x^2+14x+7$.

На основании AD трапеции $ABCD$ отмечена точка E так, что $AE=BC$. Отрезки CA и CE пересекают диагональ BD в точках O и P .

Докажите, что если $BO=PD$, то $AD^2=BC^2+AD \cdot BC$.

Решите уравнение $x^2+x=1$ 111 111 122 222 222.

Докажите, что для любого x выполнено неравенство $x^4-x^3+3x^2-2x+1 \geq 0$.

Разложите на два множителя $4x^4 + 1$.

Делится ли $2^{62} + 1$ на $2^{31} + 2^{16} + 1$?

Может ли при перемножении двух многочленов получиться многочлен, в котором меньше одночленов, чем в каждом из множителей?

Докажите, что если $a > 0$, то $a^n + \frac{1}{a^n} \geq a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}$.

Числа m и n натуральные, одно из чисел $\sqrt{mn}$ и $\sqrt{\frac{m}{n}}$ иррациональное. Может ли другое быть рациональным?

В парламенте у каждого депутата не более трёх врагов (вражда у всех взаимная). Докажите, что парламент можно разделить на две палаты так, чтобы у каждого в палате было не более одного врага.

Уравнение $f(x)=x$, где $f(x)=ax^2+bx+c$, не имеет корней. Может ли иметь корни уравнение $f(f(x))=x$?

Решите уравнение $x^2+2008x+2007=0$.

Решите уравнение $1999x^2+1000x-2999=0$.

Найдите сумму

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}.$$

Домашнее задание

На окружности расставлено несколько плюсов и минусов. Пусть a - число плюсов, b - число минусов, p - число пар стоящих подряд плюсов, q - число пар стоящих подряд минусов. Докажите, что $a-b=p-q$.

Занятие 33

Сколькими способами можно разделить 10 разных предметов на две группы? (Группа может не содержать предметов - тогда другая группа содержит все предметы.)

Докажите, что при любом натуральном n число $16^{n+2} + 23^{n+1} + 37^n$ делится на 7.

Докажите, что если $a > b > 0$ и $\frac{x}{a} < \frac{y}{b}$, то $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) > \frac{x+y}{a+b}$.

Высота трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна 4 см, а одна из диагоналей равна 5 см. Найдите площадь трапеции.

На гипотенузе прямоугольного треугольника внешним образом построен квадрат. Расстояние от вершины прямого угла до центра квадрата равно d . Найдите сумму катетов треугольника.

На гипотенузе прямоугольного треугольника внутренним образом построен квадрат. Расстояние от вершины прямого угла до центра квадрата равно d . Найдите разность катетов треугольника.

Найдите сумму

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)}.$$

Числа a и b различны, многочлен $P(x)$ при делении на $x-a$ и на $x-b$ даёт в остатке A и B соответственно. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на $(x-a)(x-b)$.

Найдите остаток от деления многочлена x^{100} на x^2-x-2 .

Найдите сумму

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}.$$

Докажите, что $1^3+2^3+3^3+\dots+99^3$ делится на 100.

В треугольнике ABC проведена медиана BM . Известно, что $AB > BC$. Сравните углы ABM и CBM .

Домашнее задание

Найдите количество несократимых дробей, у которых числитель меньше знаменателя и произведение числителя и знаменателя равно 20!

Занятие 34

Найдите сумму

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}.$$

Числа a и b положительные. Докажите, что $(a^3+b)(a+b^3) \geq 4a^2b^2$.

Числа a , b и c положительные. Докажите, что $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Какое из чисел больше: $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ или $\sqrt{n+2} + \sqrt{n-1}$?

Докажите, что при любом натуральном n , отличном от 2, значение дроби $\frac{n^3-3n-2}{n^2-n-2}$ является натуральным числом.

На столе лежат книги, которые надо упаковать. Если их связать в одинаковые пачки по 4, по 5 или по 6 книг, то каждый раз останется одна лишняя книга, а если связать по 7 книг в пачку, то лишних книг не останется. Какое наименьшее количество книг может быть на столе?

Числа a , b , c и d рациональные и $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$. Докажите, что $a=c$ и $b=d$.

К двум окружностям, радиусы которых равны R и r , а расстояние между их центрами равно d , проведена прямая, касающаяся их в точках A и B . Окружности при этом лежат по одну сторону от касательной. Найдите длину отрезка AB .

К двум окружностям, радиусы которых равны R и r , а расстояние между их центрами равно d , проведена прямая, касающаяся их в точках A и B . Окружности при этом лежат по разные стороны от касательной. Найдите длину отрезка AB .

Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника не превосходит полусуммы произведений его противоположных сторон.

На каждой из сторон параллелограмма отмечена точка так, что площадь четырёхугольника с вершинами в этих точках оказалась равной половине площади параллелограмма. Докажите, что одна из диагоналей этого четырёхугольника параллельна стороне параллелограмма.

Докажите, что если $a > b > 0$, то $\frac{1+a}{1+a+a^2} < \frac{1+b}{1+b+b^2}$.

Докажите, что ни для каких чисел x, y, z не могут одновременно выполняться три неравенства: $|x| < |y-z|$, $|y| < |z-x|$, $|z| < |x-y|$.

Домашнее задание

Цифры четырёхзначного числа записали сначала в порядке убывания (первая цифра самая большая, последняя самая маленькая), потом в порядке возрастания. Разность между записанными числами оказалась равной исходному числу. Найдите это число.

Занятие 35

Что больше: $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$ или $\sqrt{1.05}$?

Школьники одного класса ходили в два туристических похода. В каждом походе мальчиков было меньше $\frac{2}{5}$ общего количества участников похода. Докажите, что в этом классе мальчики составляют меньше $\frac{4}{7}$ общего числа учеников, если известно, что каждый из учеников был по крайней мере в одном походе.

При каких n число $20^n + 16^n - 3^n - 1$ делится на 323?

Разложите на два множителя многочлен $2x^3 + x^2 + x - 1$.

Прямая проходит через точку A касания окружностей S_1 и S_2 и пересекает их в точках A_1 и A_2 ; O_1 и O_2 – центры окружностей. Докажите, что $A_1O_1 \parallel A_2O_2$.

Три окружности касаются друг друга. Докажите, что две прямые, проходящие через пары точек касания, вторично пересекают одну из окружностей в диаметрально противоположных точках.

Множество содержит нечётное число элементов. Докажите, что количество его подмножеств, содержащих чётное число элементов, равно количеству подмножеств, содержащих нечётное число элементов.

Докажите, что для любого множества количество его подмножеств, содержащих чётное число элементов, равно количеству подмножеств, содержащих нечётное число элементов.

Домашнее задание

Числа $a_1, \dots, a_n$ положительны, и их произведение равно 1. Докажите, что $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \dots \cdot (1 + a_n) \geq 2^n$.

Занятие 36

Докажите, что если биссектриса AD треугольника ABC делит пополам угол между медианой AM и высотой AH , то угол A прямой.

Докажите, что

$$\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}\right) = \\ = \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2}.$$

К числу, записанному на доске, прибавляется сумма его цифр и эта операция повторяется. Сначала было записано число 1. Может ли в какой-то момент встретиться число, делящееся на 3?

Числа a , b и $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ рациональные. Докажите, что числа $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ тоже рациональные.

Сумма НОД и НОК натуральных чисел m и n равна $m+n$. Докажите, что одно из чисел m и n делится на другое.

Две параллельные прямые касаются окружности с центром O . Третья касательная пересекает эти прямые в точках A и B . Найдите угол AOB .

Стороны четырёхугольника $ABCD$ касаются окружности с центром O . Докажите, что $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$.

Увеличится или уменьшится сумма $\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200}$, если все слагаемые в ней заменить на $\frac{1}{150}$?

Два квадратных трёхчлена $f(x)$ и $g(x)$ принимают равные значения при трёх различных значениях x . Докажите, что $f(x)=g(x)$ при всех x .

Сколькими способами $2N$ человек можно разбить на пары?

Домашнее задание

Пусть

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}}, \quad a_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}, \quad \dots, \quad a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}.$$

Докажите, что: а) $a_n < 2$; б) $a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Занятие 37

Числа $a + \frac{b^2}{a}$ и $b + \frac{a^2}{b}$ равны. Обязательно ли равны числа a и b ?

Вершины квадрата $ABCD$ расположены на окружности, точка X движется по этой окружности. Докажите, что при этом величина $AX^2 + BX^2 + CX^2 + DX^2$ остаётся постоянной.

Точка M расположена внутри параллелограмма $ABCD$. Прямые, проходящие через эту точку параллельно сторонам параллелограмма, разбивают его на четыре параллелограмма. Докажите, что площади параллелограммов с вершинами B и D равны тогда и только тогда, когда точка M лежит на диагонали AC .

На графике квадратного трёхчлена $f(x) = lx^2 + mx + n$ с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними – целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

Докажите, что $1 - 4 + 9 - 16 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$.

Докажите, что для любых чисел x , y и z выполняется неравенство $|x| + |y| + |z| \leq |-x+y+z| + |x-y+z| + |x+y-z|$.

Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное (НОК) равно 2000?

Из вершины A треугольника ABC с острым углом B проведена высота AH . Выразите отрезок BH через стороны треугольника: $BC=a$, $CA=b$ и $AB=c$.

Медианы треугольника ABC , проведённые из вершин A и B , перпендикулярны. Докажите, что его стороны $a=BC$, $b=CA$ и $c=AB$ связаны соотношением $a^2+b^2=5c^2$.

Докажите, что при целом n числа n^5+4n^3+3n и n^4+3n^2+1 не имеют общих делителей, отличных от 1.

Разложите на множители $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$.