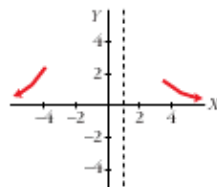


This document contains text automatically extracted from a PDF or image file. Formatting may have been lost and not all text may have been recognized.

To remove this note, right-click and select "Delete table".

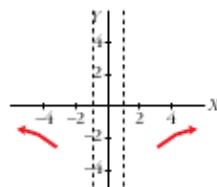
$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(x-1)^2} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{(x-1)^2} = 0$$



$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{3-x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{3-x} = -\infty$$



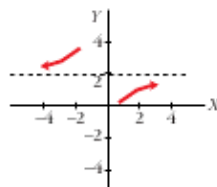
$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2-1} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^2-1} = 0$$



$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2-x)^3} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(2-x)^3} = 0$$



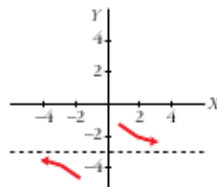
$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2$$



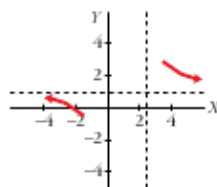
$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5}{1-x} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+5}{1-x} = +\infty$$



$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-3x}{x+3} = -3; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-3x}{x+3} = -3$$



$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-2x}{5-2x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2x}{5-2x} = 1$$



LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD Y RAMAS INFINITAS

Página 156

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

El valor de la función $f(x) = x^2$

$$2x + 4x$$

— 10 — 45 para $x = 5$ no se puede obtener directamente porque el denominador se hace cero. Lo obtendremos por aproximaciones sucesivas, dando a x los valores 4; 4,9; 4,99; ...

¡ Comprueba que:

$$f(4) = 16; f(4,9) = 23,01; f(4,99) = 24,9001$$

¡ Calcula $f(4,999)$; $f(4,9999)$; $f(4,99999)$; ...

¿ Te parece razonable afirmar que, cuando x se aproxima a 5, el valor de $f(x)$

se aproxima a 25? Lo expresamos así: $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 25$ Si $f(x) = x^2 + 4x$

$$2x -$$

$$10 \text{ 45 , entonces: } f(4,999) = 24,996001; f(4,9999) = 24,99960001; f(4,99999) = 24,9999600001$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 25 \text{ ¡ Calcula, análogamente, } \lim_{x \rightarrow 3} x^2 +$$

$$2x - 6x$$

$$- 6 - 27 \text{ . } f(2) = 4; f(2,9) = 8,41; f(2,99) = 8,9401; f(2,999) = 8,996401;$$

$$f(2,9999) = 8,99964001$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6 \text{ } x \rightarrow 3$$

Problema 1

Representa gráficamente las siguientes funciones y di, de cada una de ellas, si es continua o discontinua:

a) $y = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ 5 - 3x & x \geq 2 \end{cases}$

$$5 - 3x < 1$$

b) $y = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ 4 - x & x < 1 \end{cases}$

$$4 - x < 0$$

$$0 \leq x \leq 5 \text{ } x > 5$$

c) $y = x - 3 \text{ } x < 1$

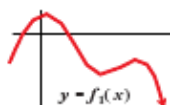
$$2/x \text{ } x \geq 1 \text{ } x^2 \text{ } x < 2 \text{ } 2x + 2 \sqrt{x} < 0$$

$$0 \leq x < 3 \text{ } x \geq 3$$

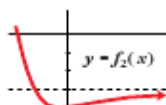
Unidad 7. Límites de funciones. Continuidad y ramas infinitas

Página 166

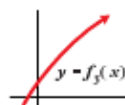
1. Di el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ de las siguientes funciones dadas por sus gráficas:



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = -\infty$$

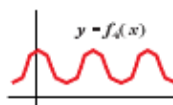


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = -3$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x) \text{ no existe}$$



Página 167

1. Di el valor del límite cuando $x \rightarrow +\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$

b) $f(x) = 5x^3 + 7x$

c) $f(x) = x - 3x^4$

d) $f(x) = \frac{1}{3x}$

e) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

f) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$

a) $-\infty$

b) $+\infty$

c) $-\infty$

d) 0

e) 0

f) $-\infty$

2. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 200x^2) = +\infty$, halla un valor de x para el cual $x^3 - 200x^2$ sea mayor que 1 000 000.

Por ejemplo, para $x = 1000$, $f(x) = 800\,000\,000$.

3. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 10x} = 0$, halla un valor de x para el cual $\frac{1}{x^2 - 10x}$ sea menor que 0,0001.

Por ejemplo, para $x = 1000$, $f(x) = 0,00000101$.

Página 168

4. Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y representa sus ramas:

a) $f(x) = \frac{1}{3x}$

b) $f(x) = \frac{3}{x}$

c) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

d) $f(x) = 3x - 5$

a) b)

6 6

4

2

-2 2 6 8

-2

c)

2 4 2

-4 -2 2 4

-2

6 d)

2 -4 8 4 6 4

-4 -2 2 4 6

-2

-2 2 4 6

Las tres primeras son continuas y d) es discontinua (d) es continua en todos los puntos excepto en $x = 3$).

Página 157

Problema 2

Vamos a comprobar que la gráfica de la función $y = f(x) = se$

aproxima a la recta de ecuación $y = x - 2$. $x^2 - 3x + 1$

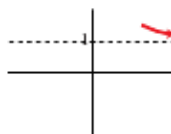
$x - 1$

Completa en tu cuaderno esta representación, obteniendo los valores de $f(x)$ para los siguientes valores de x :

5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11

Unidad 7. Límites de funciones. Continuidad y ramas infinitas

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \rightarrow y = 1$ es asíntota horizontal.



b) grado de P - grado de $Q \geq 2$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \rightarrow$ rama parabólica hacia arriba.



Página 172

1. Halla $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y representa la rama correspondiente:

$$f(x) = -2x^3 + 7x^4 - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 7x^4 = +\infty$$



2. Halla $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y traza las ramas correspondientes:

a) $f(x) = (x^2 + 3)/(-x^3)$

b) $f(x) = -x^3/(x^2 + 3)$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x} = 0$



b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$



Página 173

3. Halla las ramas infinitas, $x \rightarrow -\infty$ de estas funciones y sitúa la curva respecto a las asíntotas:

a) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

b) $y = \frac{x}{1 + x^2}$

c) $y = \frac{x^2}{1 + x^2}$

d) $y = \frac{x^3}{1 + x^2}$

Comprueba para valores *muy grandes* de x que la diferencia entre curva y recta llega a ser *muy pequeña*.

x 50 100 1 000 $y = f(x)$ $y = x - 2$ DIFERENCIA

De este modo se comprueba que la recta $y = x - 2$ es asíntota de la función $y = x^2$

$x - 3x$

- 1 + 1 I Comprueba, mediante pasos similares a los anteriores, que la función

$y = x^2$ x^3

- $2x$ tiene por asíntota a la recta de ecuación $y = x + 2$.

I x 5 6 7 8 9 10 11 10 $f(x)$ 2,75 3,8 4,83 5,86 6,88 7,89 8,9 8

6 x 50 100 1000 4 $y = f(x)$ 47,98 97,99 997,999 $y =$

$x - 2$ 48 98 998 2 DIFERENCIA 0,02 0,01 0,001 -2 2 4 6 8 10

-2

I Para $y = f(x) = x^3$

$x^2 - 2x$ 10 8

x 50 100 1000 6 $y = f(x)$ 52,08 102,04 1002,004 4 $y = x + 2$ 52 102 1002 2 DIFERENCIA 0,08 0,04 0,004

-2 2 4 6 8

-2

Página 159 1. Explica por qué la función $y = x^2 - 5$ es continua en todo $\mathbb{A}$.

Porque es polinómica.

2. Explica por qué la función $y = \sqrt{5 - x}$ es continua en $(-\infty, 5]$. Porque $(-\infty, 5]$ es su dominio, y en él no hay ningún punto crítico.

Unidad 7. Límites de funciones. Continuidad y ramas infinitas

7

LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD Y RAMAS INFINITAS

Página 156

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

El valor de la función $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 45}{2x - 10}$ para $x = 5$ no se puede obtener directamente porque el denominador se hace cero. Lo obtendremos por aproximaciones sucesivas, dando a x los valores 4; 4,9; 4,99; ...

■ Comprueba que:

$$f(4) = 6,5; f(4,9) = 6,95; f(4,99) = 6,995$$

■ Calcula $f(4,999)$; $f(4,9999)$; $f(4,99999)$; ...

■ ¿Te parece razonable afirmar que, cuando x se aproxima a 5, el valor de $f(x)$ se aproxima a 7? Lo expresamos así: $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 7$

■ Si $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 45}{2x - 10}$, entonces:

$$f(4,999) = 6,9995; f(4,9999) = 6,99995; f(4,99999) = 6,999995$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 7$$

■ Calcula, análogamente, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 6x - 27}{2x - 6}$.

■ $f(2) = 5,5$; $f(2,9) = 5,95$; $f(2,99) = 5,995$; $f(2,999) = 5,9995$; $f(2,9999) = 5,99995$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

Problema 1

Representa gráficamente las siguientes funciones y di, de cada una de ellas, si es continua o discontinua:

$$\text{a) } y = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 1 \\ 5 - x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } y = \begin{cases} 4 & x < 0 \\ 4 - x & 0 \leq x \leq 5 \\ 2x - 11 & x > 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } y = \begin{cases} \sqrt{x+3} & x < 1 \\ 2/x & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } y = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < 3 \\ x + 2 & x \geq 3 \end{cases}$$

3. Cada una de las siguientes funciones tiene uno o más puntos donde no es continua. Indica cuáles son esos

puntos y qué tipo de discontinuidad presenta: a) $y = x$

$$x + 2$$

$$- 3 \text{ b) } y = x^2$$

$$x - 3x \text{ c) } y = x^2 - 3$$

$$x$$

$$\text{d) } y = x^2 \text{ e) } y = \square \square \square 3x$$

$$x + - 4, x < 3$$

$$1, x \geq 3 \text{ f) } y = a) \text{ Rama infinita en } x = 3 \text{ (asíntota vertical). b)}$$

Discontinuidad evitable en $x = 0$ (le falta ese punto). c) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical). d) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical). e) Salto en $x = 3$. f) Salto en $x = 4$.

Página 162

1. Calcula el valor de los siguientes límites:

$$\text{a) b) } (\cos x - 1)$$

$$\text{a) } - \text{ b) } - 2$$

2. Calcula estos límites:

$$\text{a) b) } \log 10 \square \square \square 3$$

$$1 \text{ si}$$

$$\text{si } x \neq 4 \text{ } x = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x$$

$$x - 2 \text{ } x \lim_{x \rightarrow 0} x^2$$

$$x \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5} \lim_{x \rightarrow 0,1} x \text{ a) } \sqrt{3} \text{ b) } -1$$

Página 163 3. Calcula k para que $y = \square \square \square x^3 - 2x + k$

$$7 \text{ si } x \neq 3$$

$$\text{si } x = 3 \text{ sea continua en } \hat{A}. \lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 2x + k) = 7 - 2x + k = 21 + k \square$$

$$\square \square \square \square 21 + k = 7 \rightarrow k = -14 \text{ Página 165}$$

4. Calcula los límites de las funciones siguientes en los puntos que se indican. Donde convenga, especifica el valor del límite a la izquierda y a la derecha del punto. Representa gráficamente los resultados. a) $f(x) = x^2 x^3$

$$- 4 \text{ en } -2, 0 \text{ y } 2 \text{ b) } f(x) = (x - 4)x$$

$$--$$

$$2) 2 \text{ en } 2, 0 \text{ y } 3 \text{ c) } f(x) = x^2$$

$$x^2 -$$

$$+ 2x$$

$$2x +$$

$$- 1$$

$$3 \text{ en } 1 \text{ y } -3 \text{ d) } f(x) = x^3 x^4$$

+ 3x² en 0 y −3

Unidad 7. Límites de funciones. Continuidad y ramas infinitas

Página 182

- 30** Prueba que la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$ solo tiene una asíntota vertical y otra horizontal.

Al ballar $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ verás que no es ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$$

Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntota horizontal: $y = 1$

- 31** Calcula los siguientes límites y representa gráficamente los resultados que obtengas:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-x}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

No tiene límite en $x = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x} = 2$

La función no es continua en $x = 1$, pero tiene límite en ese punto.



- 32** Estudia el comportamiento de estas funciones en los puntos en los que no están definidas:

a) $y = \frac{1}{(1-x)^2}$

b) $y = \frac{x}{x-5}$

c) $y = \frac{1}{x^2-2x}$

d) $y = \frac{1}{x^2-4}$

a) $y = \frac{1}{(1-x)^2}$

No definida en $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$



$$x^3 \text{ a) } f(x) = (x + 2)(x - 2)$$

$$x \lim \rightarrow -2 - f(x) = -\infty \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \text{No existe}$$

$$f(x) = +\infty \quad x \lim \rightarrow -2 \quad f(x) = -2 \quad 2 \quad 3 \quad x \lim \rightarrow -2 + \square \quad x \lim \rightarrow 0 \quad f(x) = 0 \quad x \lim \rightarrow 2 - f(x) = -\infty$$

$$f(x) = +\infty \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \text{No existe} \quad \lim f(x) \quad x \lim \rightarrow 2 \quad x \rightarrow 2$$

+

$$\text{b) } f(x) = 4(x - 3)(x - 2)^2$$

$$x \lim \rightarrow 2 f(x) = -\infty$$

$$2 \quad 3 \quad \lim f(x) = -3 \quad x \rightarrow 0 \quad x \lim \rightarrow 3 \quad f(x) = 0 \quad -3$$

$$\text{c) } f(x) = (x - 1)^2$$

$$(x - 1)(x + 3)$$

$$\lim f(x) = 0 \quad x \rightarrow 1 \quad x \lim \rightarrow -3 \quad f(x) = +\infty \quad \square \quad \square \quad -3 \quad 1$$

-

$$f(x) = -\infty \quad \square \quad \square \quad \square \quad \text{No existe} \quad \lim f(x) \quad x \lim \rightarrow -3 + x \rightarrow -3$$

$$\text{d) } f(x) = x^2(x^4$$

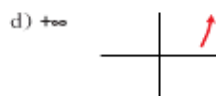
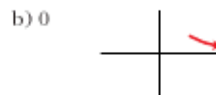
$$+ 3)$$

$$\lim f(x) = 0 \quad x \rightarrow 0 \quad x \lim \rightarrow -3 \quad f(x) = -\infty \quad \square \quad \square \quad -3$$

$$-x \lim \rightarrow -3 + f(x) = +\infty \quad \square \quad \square \quad \square \quad \text{No existe} \quad x \lim \rightarrow -3 \quad f(x)$$

Unidad 7. Límites de funciones. Continuidad y ramas infinitas

il



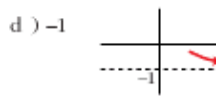
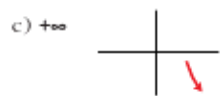
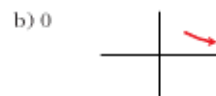
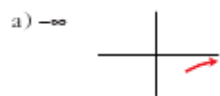
5. Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y representa sus ramas:

a) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3}$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$

d) $f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^3}$



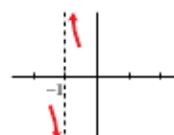
Página 169

1. Halla las asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas:

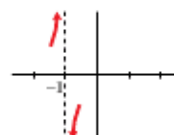
a) $y = \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$

b) $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$

a) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical}$



b) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical}$



Página 166

1. Di el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ de las siguientes funciones dadas por sus gráficas:

$f_1(x) = f_4(x) = f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = -3$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x)$ no existe

Página 167

1. Di el valor del límite cuando $x \rightarrow +\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$ b) $f(x) = 5x^3 + 7x$ c) $f(x) = x - 3x^4$ d) $f(x) = 3x$ e) $f(x) = -x^2$ f) $f(x) = x^3 - 1$
-5 a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $-\infty$

d) 0 e) 0 f) $-\infty$

2. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 200x^2) = +\infty$, halla un valor de x para el cual $x^3 - 200x^2$ sea mayor que 1000000.

Por ejemplo, para $x = 1000$, $f(x) = 800\,000\,000$.

3. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 1$

$10x = 0$, halla un valor de x para el cual $x^2 - 1$

$10x$ sea menor que 0,0001. Por

ejemplo, para $x = 1000$, $f(x) = 0,00000101$.

Página 168

4. Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y representa sus ramas: $x \rightarrow +\infty$

a) $f(x) = 1$

3x b) $f(x) = 3x$ c) $f(x) = -x^2$ d) $f(x) = 3x - 5$

Unidad 7. Límites de funciones. Continuidad y ramas infinitas

A



a) 0 c) 0 b) 0

d) $+\infty$

5. Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y representa sus ramas:

a) $f(x) = x^3$

$-5 - 1$ b) $f(x) = x^2$

$x^3 - 3$ c) $f(x) = x^2 x^3$

-3 d) $f(x) = 1$

$+ - x^3 x^3$

a) $-\infty$ b) 0

c) $+\infty$ d) -1

-1

Página 169

1. Halla las asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas:

a) $y = x^2 +$

$x^3 x$

$+ 1 + 11$ b) $y = x^2 + 3x$

$x + 1$

a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ $x = -1$ es asíntota vertical b) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ ☐ -1 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$ ☐ ☐ ☐ ☐ $x = -1$ es asíntota vertical

-1

Unidad 7. Límites de funciones. Continuidad y ramas infinitas

13 Dada la función $y = \frac{2x}{1-x}$, halla:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{1-x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{1-x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1-x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{1-x}$

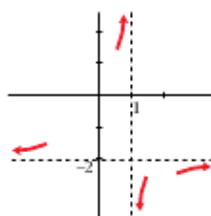
Representa gráficamente los resultados obtenidos.

a) $+\infty$

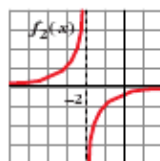
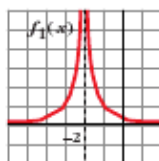
b) $-\infty$

c) -2

d) -2



14



Estas son, respectivamente, las gráficas de las funciones:

$$f_1(x) = \frac{1}{(x+2)^2} \quad \text{y} \quad f_2(x) = \frac{-1}{x+2}$$

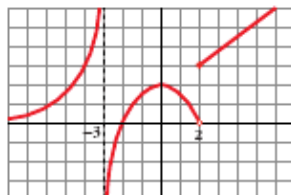
¿Cuál es el límite de cada una de estas funciones cuando $x \rightarrow -2$?

🔍 Observa la función cuando $x \rightarrow -2$ por la izquierda y por la derecha.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f_1(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f_1(x) = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow -2} f_1(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f_2(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f_2(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -2} f_2(x)$$

15



Sobre la gráfica de la función $f(x)$, halla:

a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2. Halla las asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas:

a) $y = x^2 + 2$

$x^2 - 2x$ b) $y = x^2 x^2$

$- 2x + 2$

$+ 1$

a) $x \lim \rightarrow 0 - f(x) = +\infty$

$x \lim \rightarrow 0 + f(x) = -\infty$ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ $x = 0$ es asíntota vertical

2

$x \lim \rightarrow 2 - f(x) = -\infty$ $x \lim \rightarrow 2 + f(x) = +\infty$ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ $x = 2$ es asíntota vertical b) $x \lim \rightarrow 1 - f(x) = +\infty$

$f(x) = +\infty$ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ $x = 1$ es asíntota vertical $x \lim \rightarrow 1 + 1$

Página 171

3. Halla las ramas infinitas, cuando $x \rightarrow +\infty$, de estas funciones. Sitúa la curva respecto a su asíntota:

a) $y = 1 + x$

x^2 b) $y = 1 x^3$

$+ x^2$

a) $\lim f(x) = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal. $x \rightarrow +\infty$

b) $y = x + -x$

$1 + x^2 \rightarrow y = x$ es asíntota oblicua. 1

1

4. Halla las ramas infinitas, $x \rightarrow +\infty$, de estas funciones. Sitúa la curva respecto a sus asíntotas, si las hay: a) $y = x^2 x^2$

$- +$

$2x^2$ b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 7$

x

Unidad 7. Límites de funciones. Continuidad y ramas infinitas

iN

A

Comprueba para valores *muy grandes* de x que la diferencia entre curva y recta llega a ser *muy pequeña*.

x	50	100	1 000
$y = f(x)$			
$y = x - 2$			
DIFERENCIA			

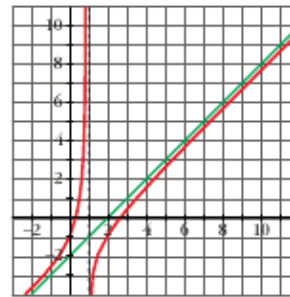
De este modo se comprueba que la recta $y = x - 2$ es asíntota de la función $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$

- Comprueba, mediante pasos similares a los anteriores, que la función $y = \frac{x^3}{x^2 - 2x}$ tiene por asíntota a la recta de ecuación $y = x + 2$.

■

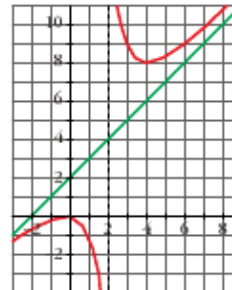
x	5	6	7	8	9	10	11
$f(x)$	2,75	3,8	4,83	5,86	6,88	7,89	8,9

x	50	100	1 000
$y = f(x)$	47,98	97,99	997,999
$y = x - 2$	48	98	998
DIFERENCIA	0,02	0,01	0,001



- Para $y = f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x}$

x	50	100	1 000
$y = f(x)$	52,08	102,04	1 002,004
$y = x + 2$	52	102	1 002
DIFERENCIA	0,08	0,04	0,004



Página 159

1. Explica por qué la función $y = x^2 - 5$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

Porque es polinómica.

2. Explica por qué la función $y = \sqrt{5 - x}$ es continua en $(-\infty, 5]$.

Porque $(-\infty, 5]$ es su dominio, y en él no hay ningún punto crítico.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \rightarrow y = 1$ es asíntota horizontal. $x \rightarrow +\infty$

1

b) grado de P – grado de $Q \geq 2$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \rightarrow$ rama parabólica hacia arriba. $x \rightarrow +\infty$

Página 172

1. Halla $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y representa la rama correspondiente:

$$f(x) = -2x^3 + 7x^4 - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 7x^4 = +\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

2. Halla $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y traza las ramas correspondientes:

$$\text{a) } f(x) = (x^2 + 3)/(-x^3) \quad \text{b) } f(x) = -x^3/(x^2 + 3)$$

$$\text{a) } x \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = x \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2$$

$$-x^3 = x \lim_{x \rightarrow -\infty} 1$$

$$-x = 0$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad -x^3$$

$$x^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

Página 173

3. Halla las ramas infinitas, $x \rightarrow -\infty$ de estas funciones y sitúa la curva respecto a

las asíntotas: a) $y =$ b) $y =$ c) $y = 1$ d) $y = 1$

$$+ x^2 \quad \text{d) } y = 1 \quad 1 \quad x \quad x^3 \quad x^2 + 1 \quad 1 + x^2 + x^2$$

Unidad 7. Límites de funciones. Continuidad y ramas infinitas

/

A

40 Calcula a para que las siguientes funciones sean continuas en $x = 1$:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 4 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/(x - 1) & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 2 = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= 4 - a \end{aligned} \right\} 2 = 4 - a \rightarrow a = 2$$

$$\text{b) } \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 2 \\ f(1) &= a \end{aligned} \right\} a = 2$$

41 En una empresa se hacen montajes en cadena. El número de montajes realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento según la función $M(t) = \frac{30t}{t+4}$ (t en días).

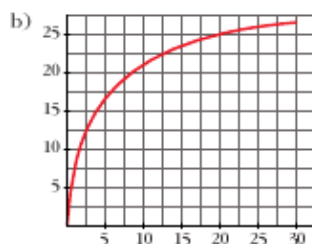
a) ¿Cuántos montajes realiza el primer día? ¿Y el décimo?

b) Representa la función sabiendo que el periodo de entrenamiento es de un mes.

c) ¿Qué ocurriría con el número de montajes si nunca acabara el entrenamiento?

a) $M(1) = 6$ montajes el primer día.

$M(10) = 21,43 \rightarrow 21$ montajes el décimo día.



c) Se aproxima a 30 (pues $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t+4} = 30$).

Página 183

42 El gasto mensual en alimentación de una familia depende de su renta, x . Así:

$$g(x) = \begin{cases} 0,6x + 200 & \text{si } 0 \leq x \leq 1\,000 \\ 1\,000x/(x + 250) & \text{si } x > 1\,000 \end{cases}$$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal. $x \rightarrow -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal. $x \rightarrow -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \rightarrow y = 1$ es asíntota horizontal. $x \rightarrow -\infty$ 1

d) $y = x + 1 - x$

$+x^2 \rightarrow y = x$ es asíntota oblicua. 1

1

4. Halla las ramas infinitas, cuando $x \rightarrow -\infty$, y si tienen asíntotas, sitúa la curva respecto a ellas: a) $y = x^2 - x^4$

+ 1 b) $y = x^2 - x^2$

$- +$

2x 2 c) $y = x^2$

$x +$

$+ 3x$

1 d) $y = 2x^3 - 3x^2$

x

a) grado $P - \text{grado } Q \geq 2$

$x \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \rightarrow$ rama parabólica.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \rightarrow y = 1$ es asíntota horizontal. $x \rightarrow -\infty$ 1

c) $y = x + 2 - x^2$

$x + 1 \rightarrow y = x + 2$ es asíntota oblicua. 2

-2

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 3x) = +\infty$ $x \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow -\infty$

Unidad 7. Límites de funciones. Continuidad y ramas infinitas