Série Complexes
$4^{ème}$ Science 2018

EXERCICE 1 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, *considèrons le point* $A(1)$ *et* f *l'applica*

$P \setminus \{A\}$ *dans* P *qui à tout point* $M(z)$ *associe le point* $M'\left(z'\right)$; $z' = \frac{\overline{z}}{\overline{z}-1}$ *et* $z = x + iy$; $(x, y) \in R^2$.

1) *Montrer que l'ensemble des points invariant par* f *est un* C *cercle à préciser .*

2) *Exprimer* z' *en fonction de* x *et* y .

3) *Déterminer l'ensemble des points* M *du plan de sorte que* M' *soit un point de* $\left(O, \vec{v}\right)$.

4) *Montrer que pour tout point* M *du plan privé du cercle* C , *les points* A , M *et* M' *sont alignés .*

EXERCICE 2 :

A tout complexe $z \neq 0$ *on associe le complexe* $u = \frac{z-i}{z}$.

1) *Calculer* u *sachant que* $z = 1 - i$.

2) *Calculer* z *sachant* $u = 2i$.

3) *Déterminer l'ensemble des points* $M(z)$ *tels que :* $|u| = 1$.

4) *Résoudre dans* C *l'équation :* $\frac{z-i}{z} = -iz$.

EXERCICE 3 :

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{OI}, \vec{OJ}\right)$. *soient* $A(-1)$, $B(1)$ *et* $C(-i)$, f *l'application de* $P \setminus \{A\}$ *vers* $P \setminus \{C\}$ *qui à tout point* $M(z)$ *on associe le point* $M'(z')$ *tel que :* $z' = -i\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$.

1) Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

2) Déterminer l'ensemble des points M *lorsque* M' *décrit le cercle trigonométrique .*

3) a / Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ *on a :* $\left(\widehat{\vec{OI}, \vec{OM'}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\widehat{\vec{AM}, \vec{MB}}\right)[2\pi]$.

b / Déterminer puis construire les ensembles des points M *lorsque :*

* z' *est un réel positif* ** z' *est imaginaire pur non nul .*

EXERCICE 4 :

1) *Le plan étant rapporté à un repère orthonormé* $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, *soient* A , B *et* C *trois points d'affi*

respectives : $z_1 = 2i$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$ *et* $z_3 = -\sqrt{3} - i$.

a / Écrire sous forme exponentielle z_1 , z_2 *et* z_3 .

b / Pour $\theta \in]0, \pi[$, *écrire sous forme exponentielle :* $u = 1 + \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

c / Déduire la forme exponentielle de $z' = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)i$.

d / Donner la forme algébrique : $\frac{z_3 - z_1}{z_2}$ *et* $\frac{z_2 - z_3}{z_1}$ *, déduire que OABC est un losange .*

2) *On donne :* $Z = \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$.

a / Donner la forme algébrique et exponentielle de Z^2 .

b / Déterminer le module et un argument de Z .

c / Déduire la valeur exact de : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 5 :

I / *Soit* $\alpha \in [0, \pi]$ *et* $E_\alpha : z^2 - (2\cos\cos\alpha + 1)z + 1 + e^{-i\alpha} = 0$.

1) *Résoudre dans* C *l'équation* E_π .

2) *Trouver* α *pour que l'équation* E_α *admette deux racines opposées .*

3) *Vérifier que* $z_1 = 1 + e^{i\alpha}$ *est une solution de l'équation* E_α .

4) *Déterminer alors l'autre solution de l'équation* E_α .

II / *Soient* $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ *un repère orthonormé du plan ,* $A(i)$, $B(-i)$, $C(-1)$ *et* $D(1)$.

On désigne par f *l'application du plan* P \{ B } *dans le plan* P *qui à tout point* $M(z)$ *associe le point* $M'\left(z'\right)$ *tel que* $z' = \frac{1 + iz}{z + i}$.

1) *Déterminer l'image du point* O *par* f .

2) *Déterminer l'ensemble des points invariants par* f .

3) *a / Montrer que :* $OM' = \frac{AM}{BM}$.

b / Montrer que : $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}}\right) [2\pi]$.

c / Montrer que si M *appartient à l'axe* $\left(O, \vec{u}\right)$ *alors son image appartient à un cercle*

d / Déterminer les lieux de l'image par f *d'un point du cercle de diamètre* $[AB] \setminus \{A, B\}$.

EXERCICE **6** :

Soit (E) *l'équation dans* C : $z^2 - 2iz - \left(1 + a^2\right) = 0$ *avec* $a \in C^*$.

1) *a / Trouver les solutions* z_1 *et* z_2 *de l'équation* (E).

b / Montrer que : $\left|z_1\right| = \left|z_2\right|$ *ssi* $a \in R^*$.

2) *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé* $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ *on donne les points* A , B , M *et* N *d'affixes respectives* 1 , $-1 + 2i$, $i + a$ *et* $i - a$.

a / Montrer que M *et* N *sont symétriques par rapport à un point fixe* I *que l'on précisera .*

b / Lorsque $M \notin (AB)$ *donner la nature du quadrilatère AMBN .*

3) *On suppose que :* $a = e^{i\theta} - 2i$ *où* $\theta \in [0, 2\pi[$.

a / Montrer que lorsque θ *décrit* $[0, 2\pi[$ *le point* M *se déplace sur un cercle fixe à préciser .*

b / Déduire le lieu du point N *lorsque* θ *décrit* $[0, 2\pi[$.

EXERCICE 7 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, *on considère les équations :*

$E_1 : z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0$ *et* $E_2 : z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = 0$.

1) *On désigne par* z' *et* z'' *les solutions de* E_1 .

a / Sans calculer z' *et* z'' , *vérifier que :* $|z'| \times |z''| = 2\sqrt{2}$ *et que :* $Arg(z') + Arg(z'') \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

b / Sans calculer le discriminant vérifier que l'une des solutions de E_1 *est imaginaire pure .*

c / Déterminer l'autre solution de E_1 .

2) *a / Vérifier que* $(2i)$ *est une solution de* E_2 .

b / Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ *l'équation* E_2 .

3) *Soient* A , B *et* C *les points d'affixes réspectives :* $a = 2i$, $b = 1 - i$ *et* $c = -2 - 2i$.

a / Déterminer le module et un argument du complexe : $\frac{b-a}{b-c}$.

b / En déduire la nature du triangle ABC .

EXERCICE **8**:

1) *a / Vérifier que :* $(5 + 2i)^2 = 21 + 20i$.

b / Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation :* $z^2 - (5-4i)z - 3 - 15i = 0$.

2)

Soit $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ *un repère orthonormé direct et les points :* $A(-3i)$, $B(5-i)$, $A'(-3)$ *et* $B'(1+5i)$

a / Placer les points A , B , A' *et* B' *dans ce repère .*

b / Montrer que OAA' *et* OBB' *sont des triangles rectangles et isocèles .*

3) *Soit* M *un point de la droite* (AB) *d'affixe* z_M .

a / Montrer qu'il existe un réel k *tel que :* $z_M = 5k + (2k-3)i$.

b / Montrer que (OM) *et* $(A'B')$ *sont perpendiculaires si et seulement si* M *est le milieu de* $[AB]$.

c / Vérifier dans ce cas que : $A'B' = 2\,OM$.

EXERCICE **9** :

1) *On considère l'équation* (E) : $2z^2 - \sqrt{3}\left(\sqrt{3} + i\right)z + 1 + i\sqrt{3} = 0$.

a / Vérifier que 1 est une racine de l'équation (E) .

b / Déduire l'autre racine de l'équation (E) .

Dans la suite de l'exercice le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

2) *On considère les points* A *et* B *d'affixes respectives* $z_A = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ *et* $z_B = i z_A$.

on désigne par I *le milieu de* $[AB]$ *et note* z_I *l'affixe de* I .

a / Donner la forme exponontielle de z_A *et* z_B .

b / Placer A , B *et* I *dans le repère* $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

3) *a / Montrer que le triangle OAB est rectangle et isocèle .*

b / En déduire que : $OI = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *et que* $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{OI}}\right) \equiv \frac{7\pi}{12} [2\pi]$.

c / Ecrire z_I sous forme algébrique puis en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

EXERCICE **10** :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

1) a / Donner l'ecriture exponontielle de chacun des complexes a et b .

b / Vérifier que : $b^2 = a$.

2) Soit C le point d'affixe $c = a + b$.

a / Placer les points A , B et C .

b / Vérifier que : $c = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$.

3) On considère l'équation (E) : $z^2 + z - c = 0$.

a / Vérifier que b est une solution de l'équation (E) .

b / On désigne par d la deusième solution de l'équation (E) . Montrer que : $d = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} e^{i\left(\frac{-11\pi}{12}\right)}$.

c / Placer alors le point D d'affixe d .

EXERCICE 11 :

Soit $\theta \in [0, \pi]$ et $E_\theta : (1 - i)z^2 - 2(\cos\cos\theta + \sin\sin\theta)z + (1 + i) = 0$.

1) Sans calculer les solutions z_1 et z_2 de E_θ, Montrer que : $Arg\left(z_1\right) + Arg\left(z_2\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

2) a / Vérifier que : $z_1 = e^{i\theta}$ est une solution de E_θ .

b / Déterminer alors z_2 .

c / Trouver θ pour que : $z_1 = z_2$.

d / Calculer dans ce cas z_1^{2013} .

3) Soient $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ un repère orthonormé du plan $\Delta : y = x$, $M_1\left(e^{i\theta}\right)$ et $M_2\left(i\, e^{-i\theta}\right)$.

a / Déterminer puis construire l'ensemble C_1 des points M_1 lorsque θ décrit $[0, \pi]$.

b / Déduire que les lieux C_2 des points M_2 sont les symétriques de C_1 par rapport à Δ .

4) On considère $A(-1)$, $B(2)$, $M(z)$ et $M'\left(z'\right)$ et désigne par f l'application $\mathcal{P} \setminus \{B\}$

dans $\mathcal{P}$; $M' = f(M)$ avec $z' = \frac{z}{2 - z}$ et $M'' = S_{(O, \vec{u})}(M)$.

a / Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

b / Montrer que $AM' = \frac{2}{BM}$.

c / Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{M''B}$ sont colinéaires et de même sens .

d / Déduire la construction de l'image d'un M du cercle $\mathcal{C}$ de centre B et de rayon 2 par f . Fais une figure . unité 4 cm .

EXERCICE 12 :

I – Soient θ un réel de $]0, \pi[$ et l'équation E_θ : : $z^2 - (3\cos\theta + i\sin\theta)z + 1 + e^{2i\theta} = 0$.

1) Montrer que : $(3\cos\theta + i\sin\theta)^2 - 4\left(1 + e^{2i\theta}\right) = e^{-2i\theta}$.

2) Résoudre alors dans C l'équation E_θ .

3) On désigne par z_1 la solution réelle de l'équation E_θ et par z_2 l'autre solution .

Déterminer les lieux des points $M_1\left(z_1\right)$ et $M_2\left(z_2\right)$ lorsque θ varie .

II – Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ on donne $A(2)$ et $B(-2)$

f l'application de $\mathcal{P} / \{A\}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$

tel que $z' = \dfrac{\bar{z}\,(z-2)}{\bar{z}-2}$

1) Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

2) a / Montrer que : $\dfrac{z'+2}{z-2}$ est réel .

b / Montrer que pour tout point $M \notin (AB)$ les droites (AM) et (MM') sont perpendiculaires

c / Déduire une construction de l'image d'un point $M \notin (AB)$ par f , fais une figure .