Розв’язування рівнянь, систем рівнянь, оптимізаційних задач

Розв’язування рівнянь

Використання засобу Підбір параметра

У багатьох задачах певний результат є відомим, а от значення параметрів, за яких цей результат досягається, — ні. Як приклад можна навести задачу, у якій потрібно визначити, ***через скільки годин скисне молоко або за якого обсягу випуску продукції фірма отримає прибуток у 1 000 000 грн.*** У математиці клас таких задач є найширшим. Це, зокрема, задачі на розв'язання алгебраїчних рівнянь та нерівностей або на пошук екстремумів.

У всіх подібних задачах використовується ***поняття цільової функції*** — вона має досягти певного значення або оптимізуватися (мінімізуватися чи максимізуватися). В електронній книзі формулу обчислення цільової функції записують у певну клітинку, яку також називають ***цільовою***. Цільова функція залежить від параметрів (часто — від одного параметра), значення яких зберігаються в інших клітинках електронної таблиці. Власне кажучи, ***задача полягає у підборі таких значень параметрів, за яких у цільовій клітинці буде отримано бажаний результат.***

У табличному процесорі Excel є спеціальні засоби, які автоматично підбирають потрібні значення у клітинках параметрів. Вони називаються **Підбір параметра та Пошук розв'язку**.

1. Перший із них дозволяє отримати в цільовій клітинці певне значення,
2. Другий — оптимізувати значення цільової функції.

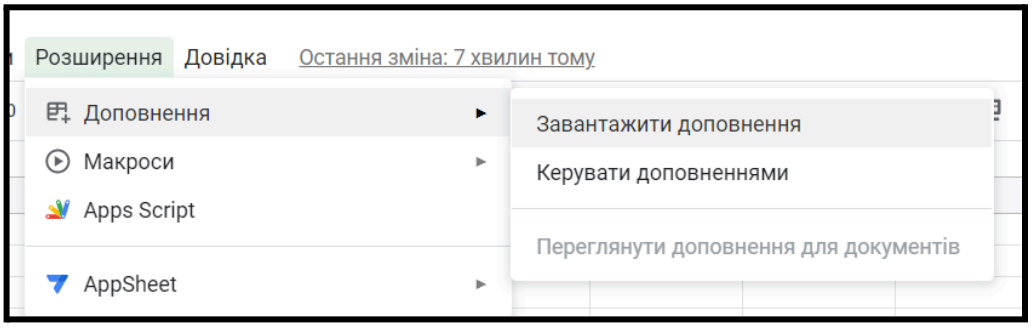
Приклади наведено з використанням гугл таблиць та Microsoft exel.

Практична робота №4
Розв’язування рівнянь і систем рівнянь у Google Таблицях

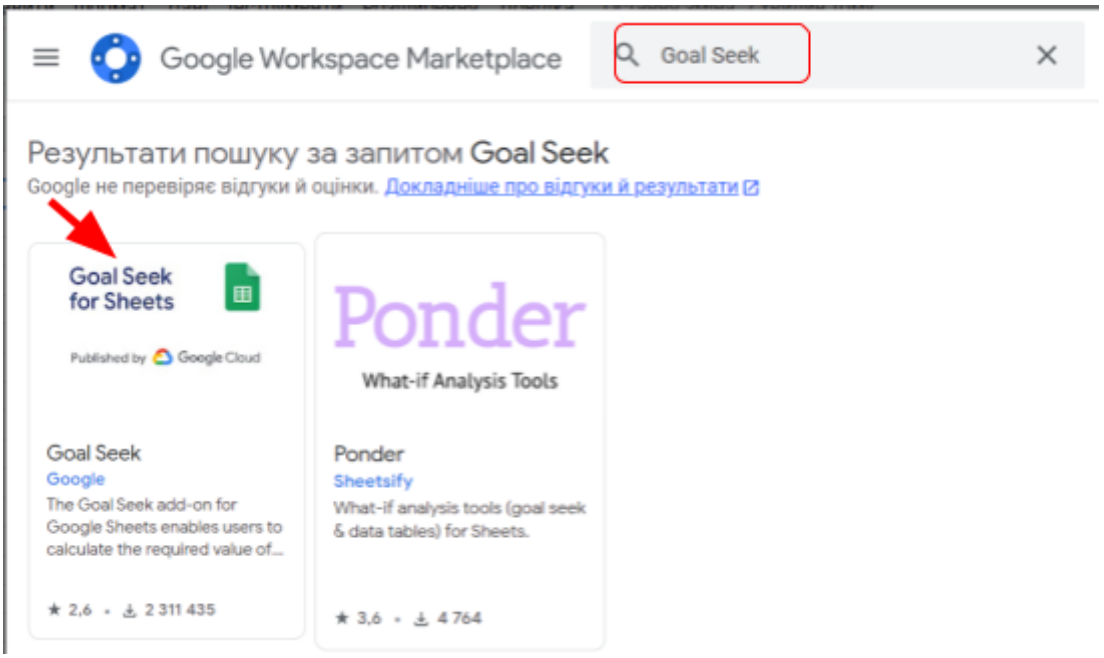
Підготовчий етап:
Відеоінструкція:
https://www.youtube.com/watch?v=LCSpRDn0iYg

Встановіть розширення Goal Seek, за допомогою якого можна розв’язувати рівняння в Google таблиці методом підбору параметра. Для цього:

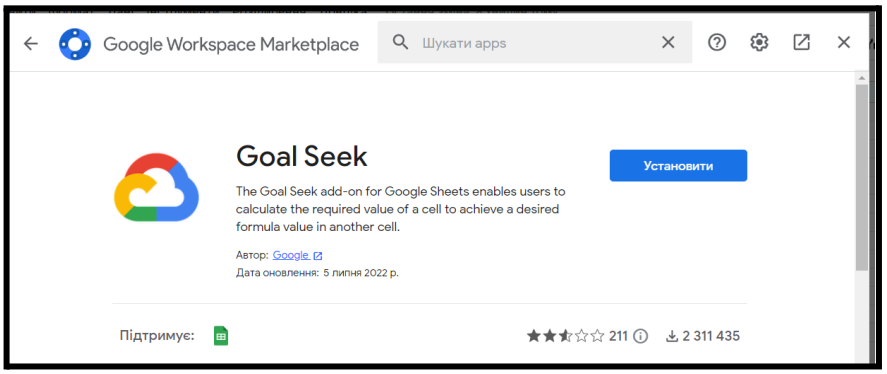
1) Виберіть вкладку **Розширення → Доповнення → Завантажити доповнення**



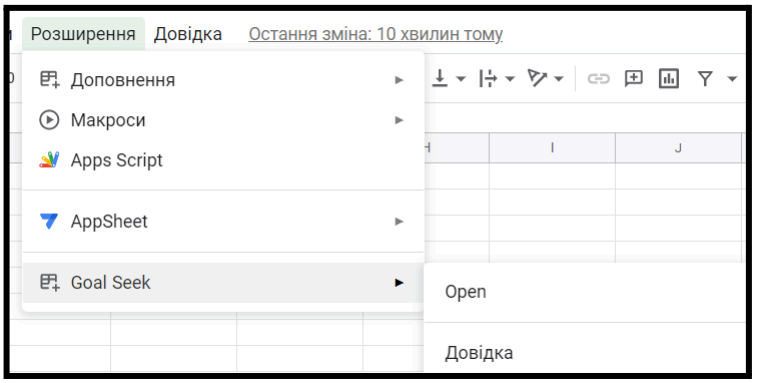
2) В рядку пошуку введіть назву розширення **Goal Seek**
3) Із запропонованих варіантів, клацніть на назві потрібного розширення **Goal Seek**



4) Натисніть кнопку **Установити,** далі потрібно буде підтвердити обліковий запис, у якому бажаєте встановити дане розширення та надати відповідні дозволи.

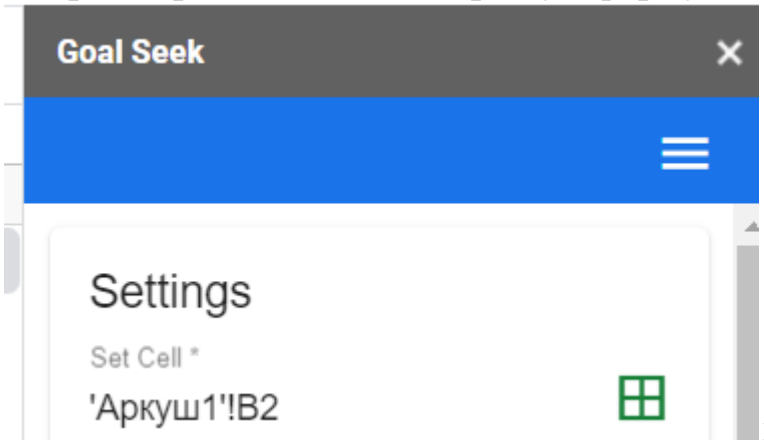


5) Після установки розширення, його можна відкрити і використовувати для розв'язання завдань:
Розширення → Доповнення → Goal Seek → Open

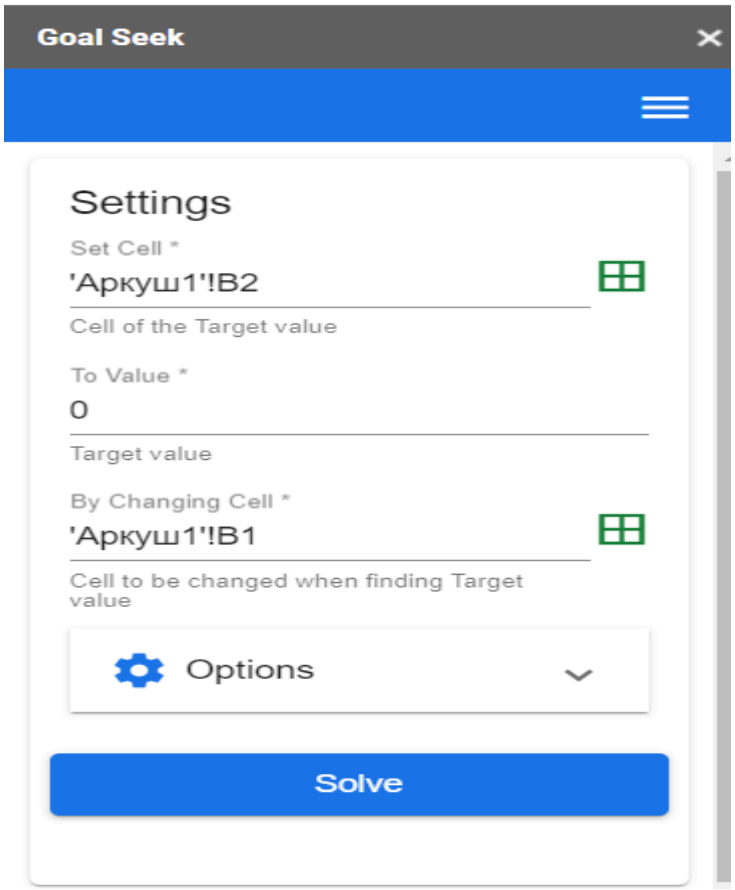


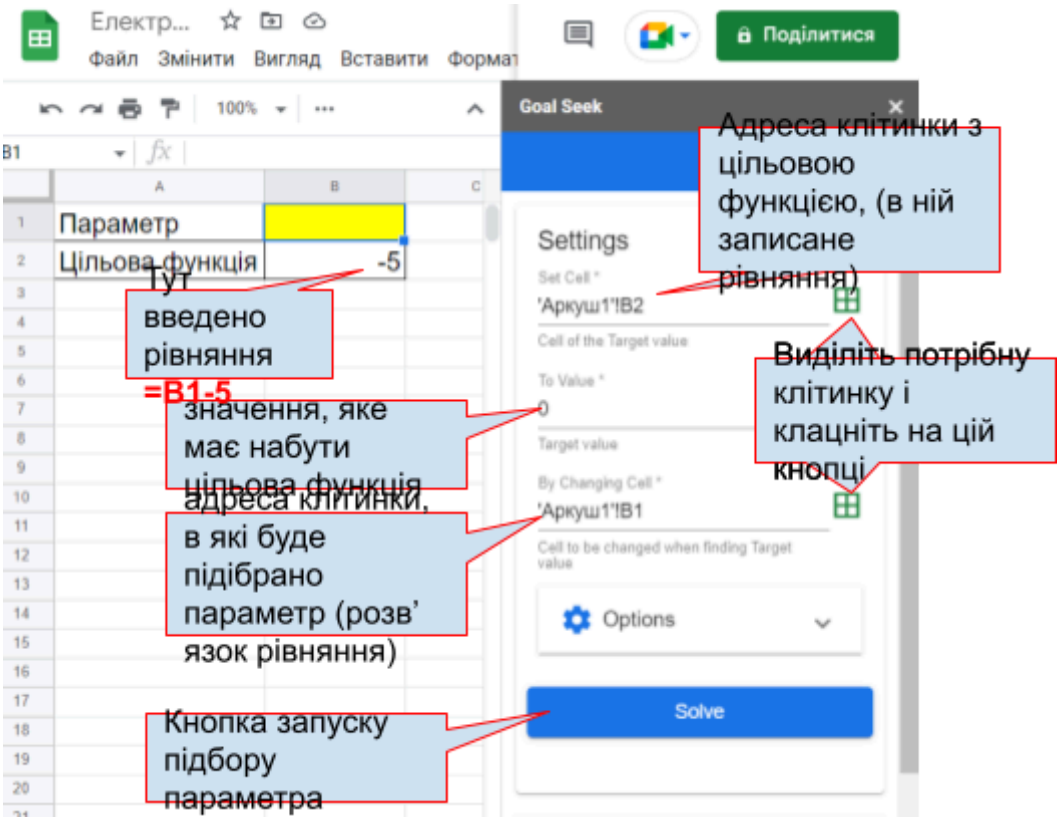
Після чого справа відкриється вікно для підбору параметра
Для прикладу розглянемо розв'язок методом підбору параметра для рівняння
x-5=0

В даному прикладі ***x-5*** - цільова функція, **0** - значення, яке вона набуває
Увага! При записі рівняння в цільову клітинку потрібно замість змінної ***x*** використовувати адресу клітинки для підбору параметра (в прикладі це клітинка B1), отже наша цільова функція матиме вигляд **=B1-5, тобто в клітинці B1 буде здійснено підбір і запис параметра при, якому цільова функція буде дорівнювати 0**
(Вводимо в клітинку B2 формулу =B1-5, запускаємо додаток Goal Seek в перший рядок вводимо адрессу з формулою

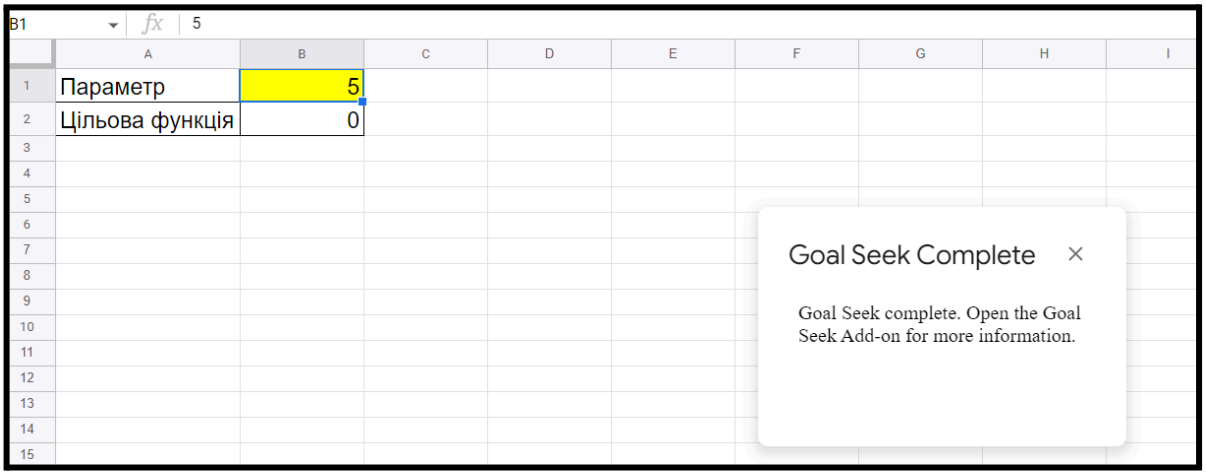


в 2й рядок числове значення яке має прийняти функція в прикладі це 0. В 3му рядку вводимо адресу коміруи де будуть проходити розрахунок параметра. Та натискаємо розв'язати.





Після завершення підбору, отримаємо результат:



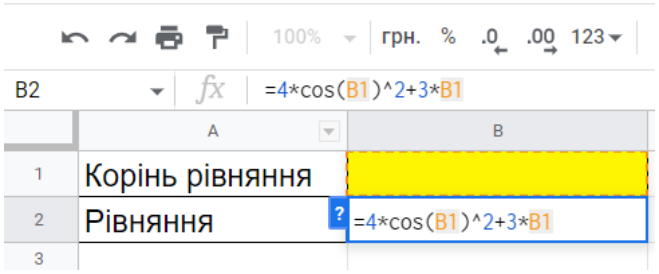
Задача №1

Розв'язання квадратного рівняння

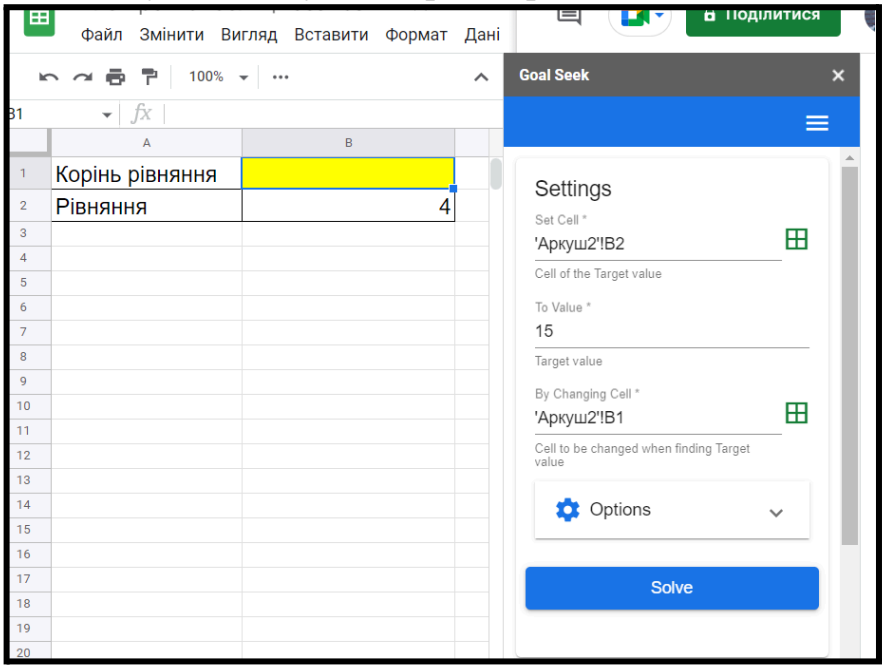
Виконуючи цю вправу, за допомогою засобу **Підбір параметра** ви розв'яжете рівняння **$4\cos^2 x + 3x = 15$**.

У нашій задачі **цільовою** є функція **$f(x) = 4\cos^2 x + 3x$, а 15 — це значення, якому вона має дорівнювати.**

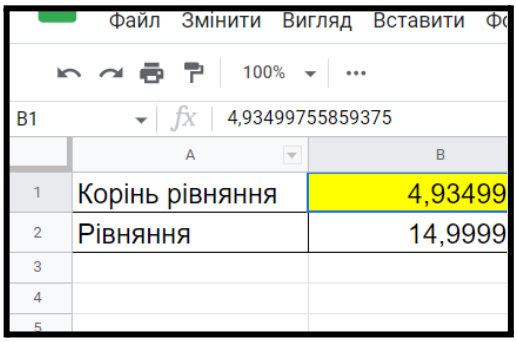
1) Запишемо цільову функцію у клітинку B2



2) Відкриємо розширення для підбору параметра **Розширення → Доповнення → Goal Seek → Open**
3) Налаштуємо і запустимо розширення **Goal Seek**



4) Отримаємо наступний результат



- Як видно з малюнка вище, знайдене вами значення є наближеним, ***оскільки отримано число 14,99956, а не 15.***

Задача №2

Розв’язати систему рівнянь

Необхідно розв'язати таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x1 + 4x2 - 2x3 = 3; \\ -x2 + 5x3 = 18; \\ 4x1 + 3x3 = 16. \end{cases}$$

Хід виконання

1. Запишемо задану систему лінійних рівнянь у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 16 \end{pmatrix}$$

2. **Створіть нову електронну таблицю (новий аркуш)** та введіть до неї дані за зразком, наведеним на рис. 1

Примітка **A^(-1)** - це **A^{-1} - обернена матриця**

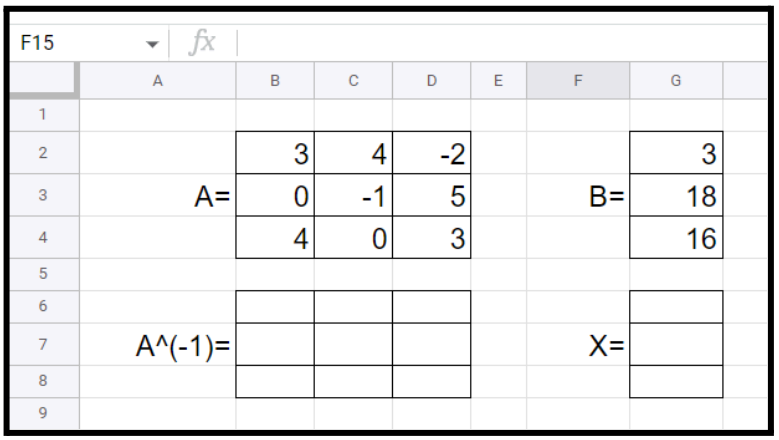
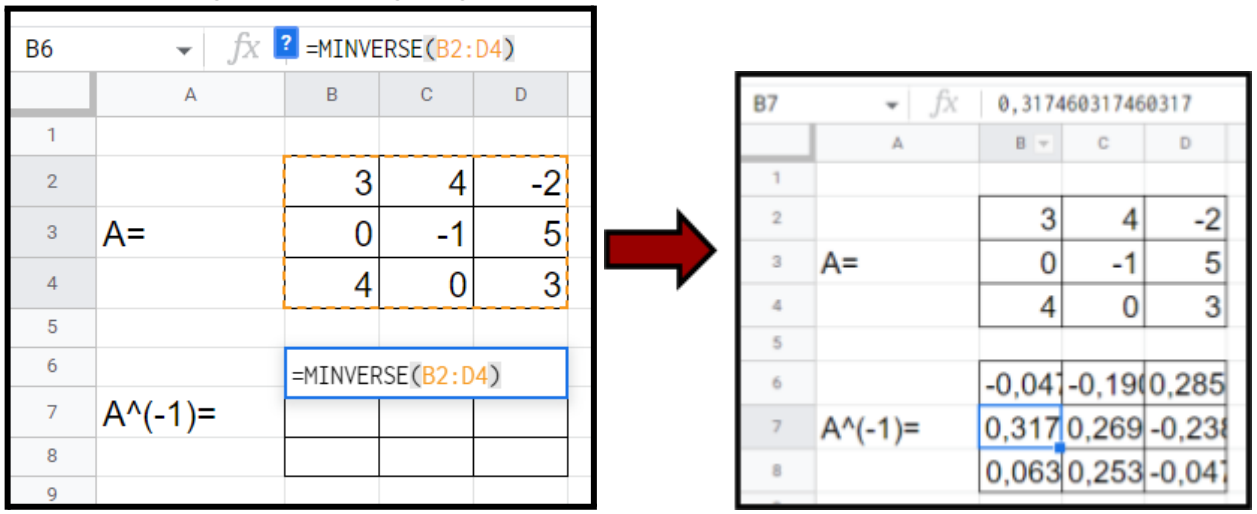


Рис. 1. Вихідні дані для системи лінійних рівнянь

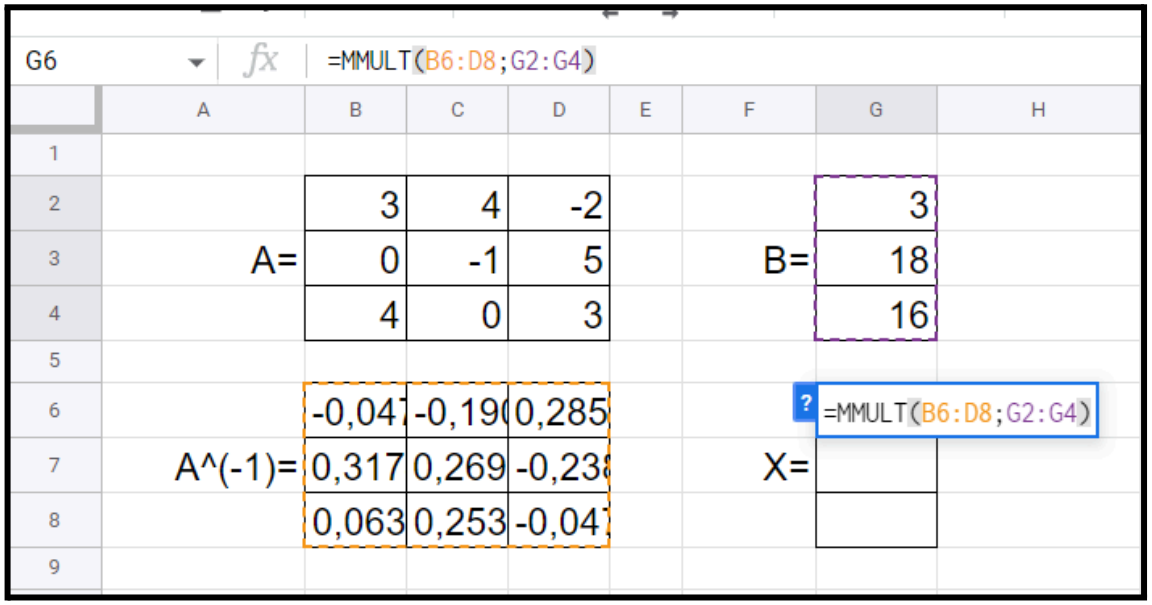
3. **Обчисліть матрицю A^{-1}** у діапазоні B6:D8**.** Для цього виділіть цей діапазон (або верхню праву клітинку цього діапазону B6), за допомогою кнопки Σ **(Вставка функції)** виберіть з категорії **Функції масивів даних** функцію

MINVERSE **або МОБР,** введіть діапазон B2:D4 як її аргумент та натисніть **Enter** **(можна ввести функцію вручну)**

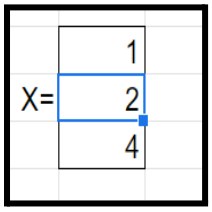


4. За допомогою функції **MMULT** або **МУМНОЖ** обчисліть у діапазоні G2:G4 добуток $A^{-1}B$ — це і буде розв'язок $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$.

Для цього необхідно виділити діапазон G2:G4 або клітинку G2 (там буде відображатися результат множення), за допомогою кнопки Σ **(Вставка функції)** виберіть з категорії **Функції масивів даних** функцію **MMULT,** введіть діапазон B6:D8 через крапку з комою (;) введіть діапазон G2:G4 та натисніть **Enter**.



Результатом буде набір чисел

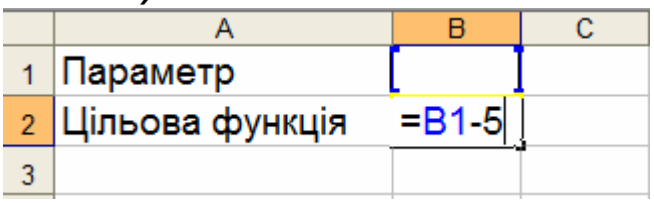


Це і будуть невідомі шукані значення: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$.
Збережіть електронну книгу.

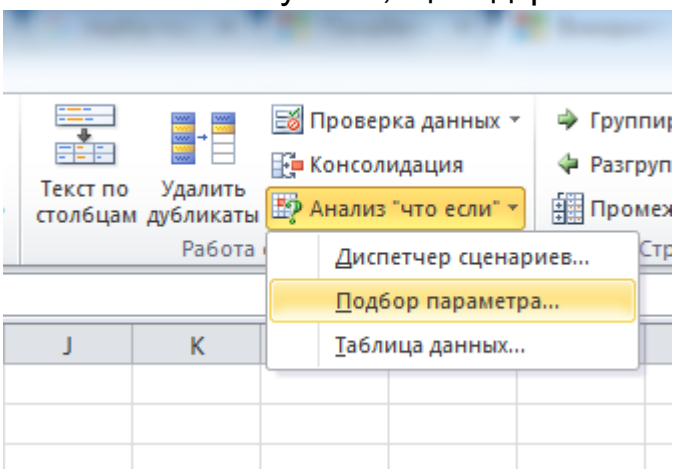
Розв’язування рівнянь і систем рівнянь у Excel

Підбір параметра в Excel

- ***В одну з клітинок електронної таблиці слід увести формулу цільової функції. Це буде цільова клітинка (на рис.1 — клітинка B2).***

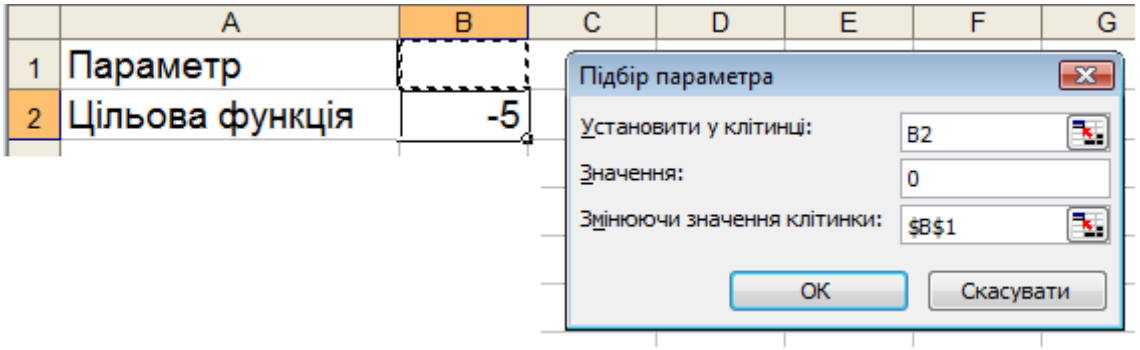


- Далі необхідно виконати команду **Дані ►Аналіз “что если”► Підбір параметра** та заповнити поля у вікні, що відкриється (рис. 2):

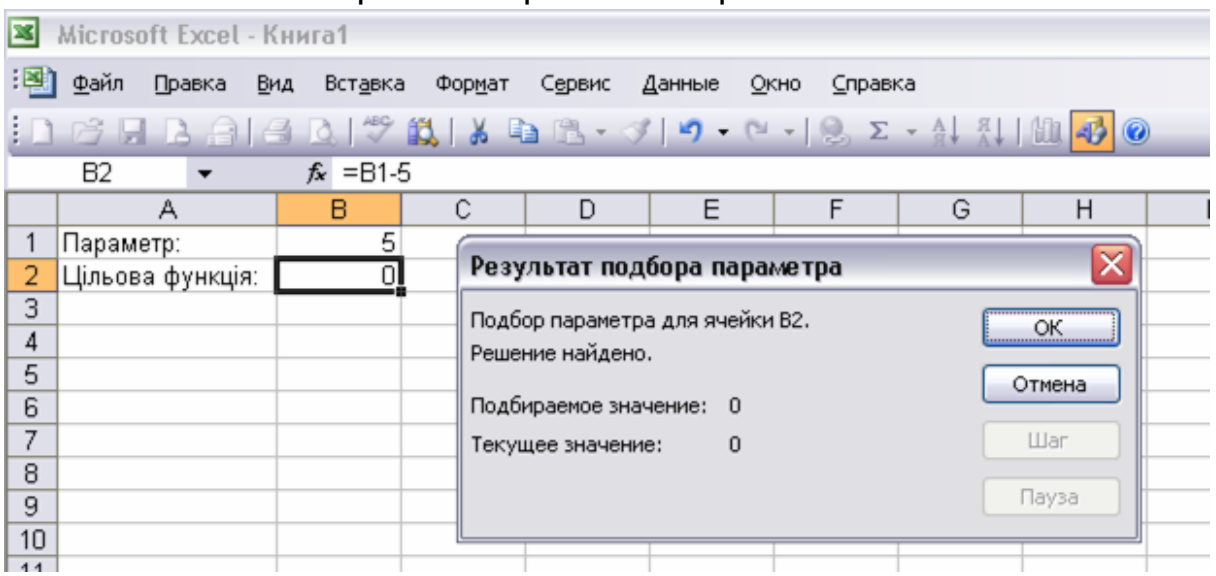


  - поле **Установити** у клітинці має містити адресу цільової клітинки;
  - у поле **Значення** слід ввести значення, якого має набути цільова функція;
  - у поле **Змінюючи** значення клітинки слід увести адресу клітинки-параметра.

- **Наприклад,** на рис. 1 параметр міститиметься у клітинці B1, і якщо в цільовій клітинці B2 потрібно отримати значення 0, вікно Підбір параметра слід заповнити так, як на рис. 2.



- На завершення потрібно клацнути кнопку ОК. У цільовій клітинці буде відображено значення, якого має набувати цільова функція, а в клітинці ***параметра*** — шукане значення параметра.
- Наприклад, на рис. 7.3 показано, як у клітинці B1 знайдено значення параметра (число 5), за якого цільова функція у клітинці B2 набуває значення 0. Тобто фактично розв'язано рівняння x - 5 = 0.



ПРИМІТКА. Підбір параметра майже завжди дає наближені значення результату. Тому, якщо в клітинці параметра після його підбору виводиться число 4,99999, то, скоріш за все, справжнім розв'язком задачі є число 5.

Використовуючи засіб **Підбір параметра**, клітинку параметра можна залишити порожньою, однак бажано попередньо визначити деяке початкове значення, адже від цього залежить швидкість отримання результату (особливо коли йдеться про складні цільові функції), а у деяких випадках і сам результат. Якщо цільова функція складна, може виникнути ситуація, коли не одне, а кілька значень параметра відповідають її шуканому значенню. Яке з них буде знайдено, залежить від початкового значення в клітинці параметра. У таких випадках, перш ніж підбирати параметр, доцільно побудувати графік цільової функції, щоб визначити початкове значення параметра наближено.

Вправа 1.

Розв'язання квадратного рівняння

Виконуючи цю вправу, за допомогою засобу **Підбір параметра** ви розв'яжете рівняння **$4\cos^2 x + 3x = 15$**.

У нашій задачі **цільовою** є функція **$f(x) = 4\cos^2 x + 3x$, а 15 — це значення, якому вона має дорівнювати.**

- Створіть нову електронну книгу. Цільовою вважатимемо клітинку A2 і припустимо, що значення параметра зберігається у клітинці A1. Уведіть у клітинку A2 формулу =4*C0S(A1)^2+3*A1.

- Виконайте команду **Дані ►Аналіз “что если”► Підбір параметра**, заповніть поля у вікні Підбір параметра (рис. 4, а) і клацніть ОК. У результаті у клітинці А1 (рис. 4, б) буде виведено значення змінної х, за якого функція набуває значення 15. Як видно з рис.4, б, знайдене вами значення є наближеним, ***оскільки отримано число 14,99956, а не 15.***

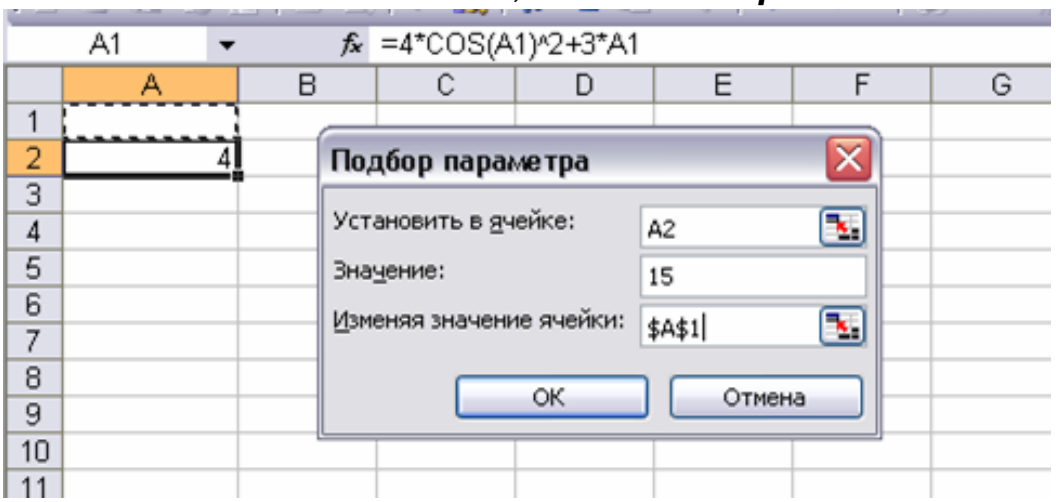


рис. 4, а

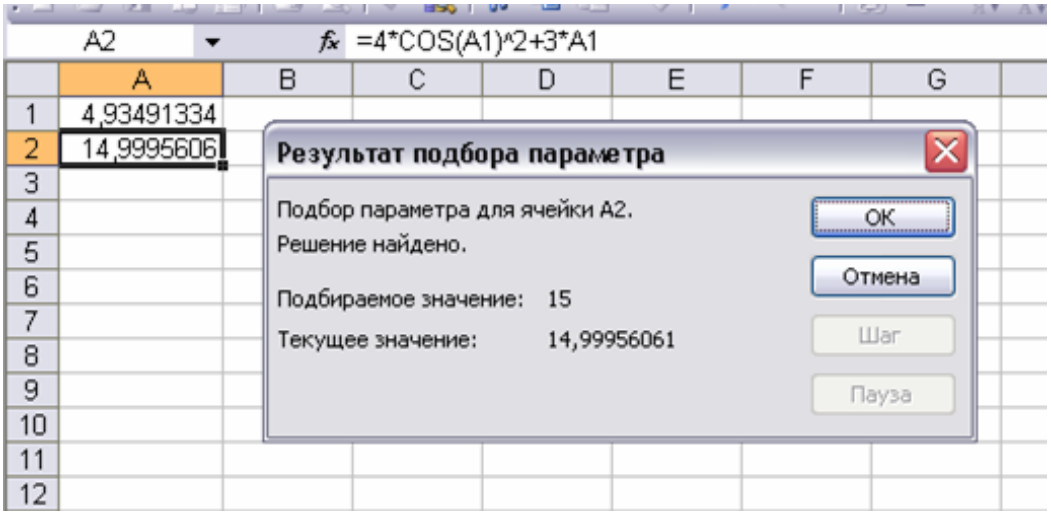


рис. 4 б

- Збережіть електронну книгу у файлі Вправа_13_1.xls.

Розв’язування систем рівнянь

Вправа 2.

Необхідно розв'язати таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x1 + 4x2 - 2x3 = 3; \\ -x2 + 5x3 = 18; \\ 4x1 + 3x3 = 16. \end{cases}$$

Хід виконання

1. Запишемо задану систему лінійних рівнянь у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 16 \end{pmatrix}$$

2. Створіть нову електронну книгу та введіть до неї дані за зразком, наведеним на рис. 1

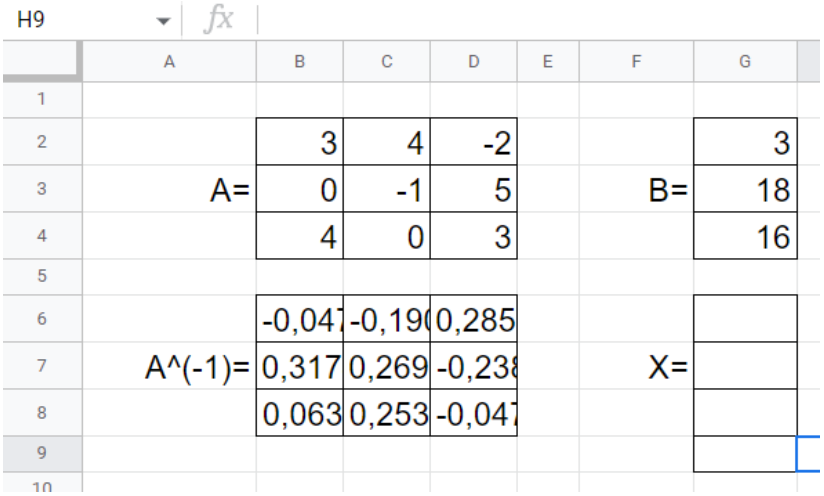
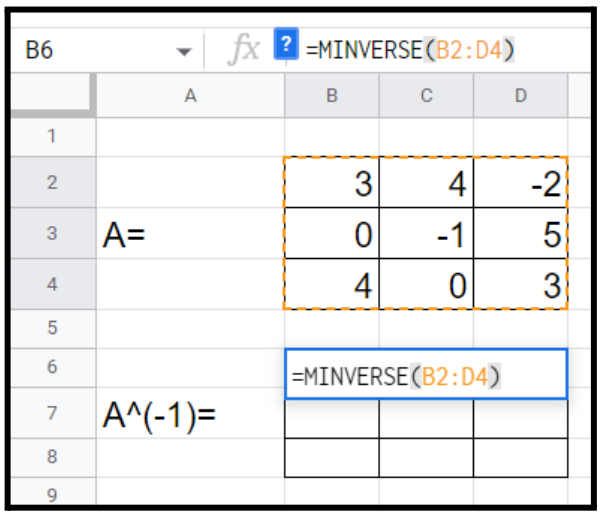
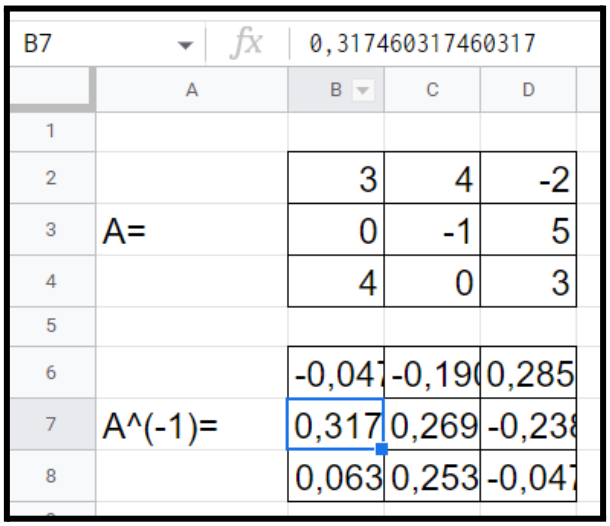


Рис. 1. Вихідні дані для системи лінійних рівнянь

3. Обчисліть матрицю A^{-1} у діапазоні B6:D8**.** Для цього виділіть цей діапазон (або верхню праву клітинку цього діапазону B6), за допомогою кнопки Σ **(Вставка функції)** виберіть з категорії **Функції масивів даних** функцію **МОБР або MINVERSE,** введіть діапазон B2:D4 як її аргумент та натисніть

➢ **Enter в Google таблицях**



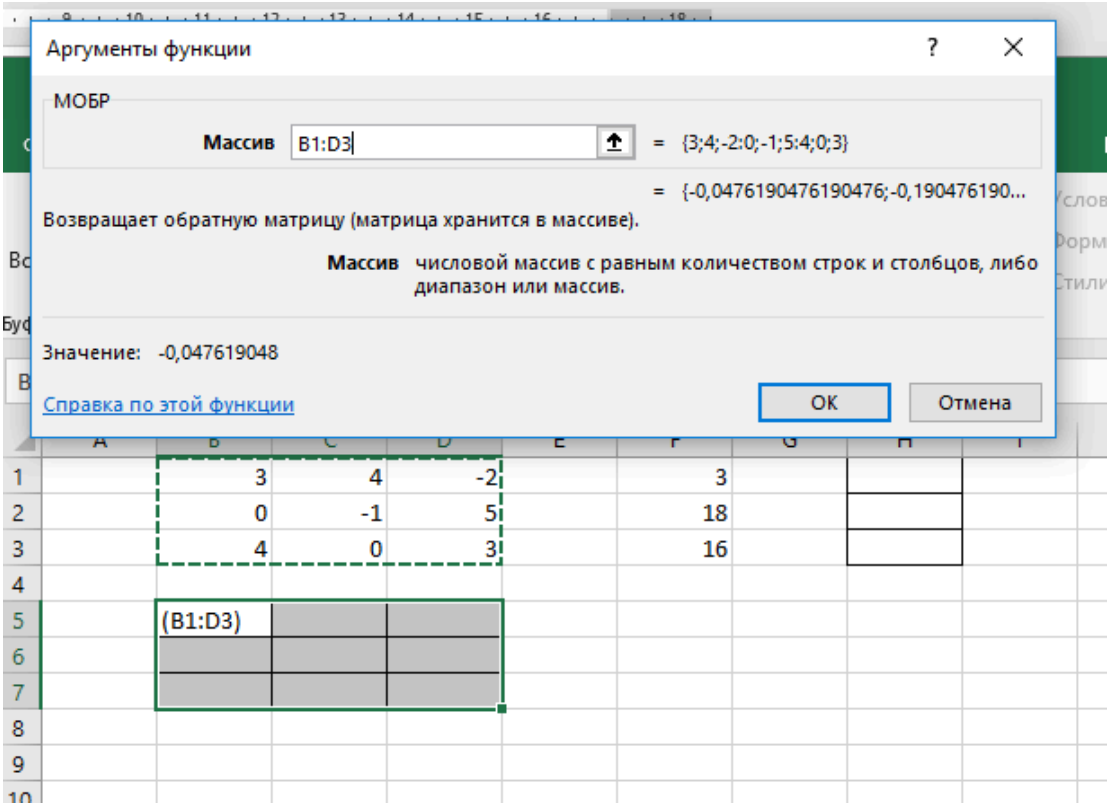


4. За допомогою функції **MMULT** або **МУМНОЖ** обчисліть у діапазоні G2:G4 добуток $A^{-1}B$ — це і буде розв'язок $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$.

Для цього необхідно виділити діапазон G2:G4 або клітинку G2 (там буде відображатися результат множення), за допомогою кнопки **(Вставка функції)** виберіть з категорії **Математичні** функцію **МУМНОЖ,** введіть діапазон B5:D7 як перший множник (Масив1), а діапазон F1:F3 як другий множник (Масив2) та натисніть клавіші **Ctrl+Shift+Enter**.

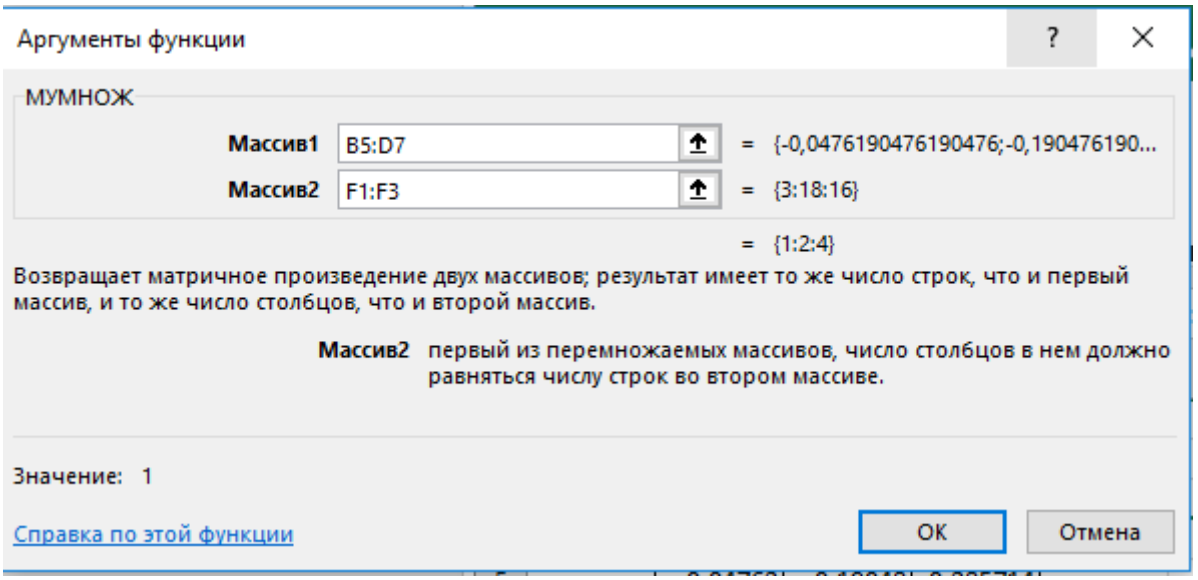
3. Обчисліть матрицю A^{-1} у діапазоні B6:D8**.** Для цього виділіть цей діапазон, за допомогою кнопки **(Вставка функції)** виберіть з категорії **Математичні** функцію **МОБР або MINVERSE,** введіть діапазон B2:D4 як її аргумент та натисніть

- або клавіші **Ctrl+Shift+Enter** **в Excel**



4. За допомогою функції **МУМНОЖ** обчисліть у діапазоні H1:H3 добуток $A^{-1}B$ — це і буде розв'язок $X = \left(x_1\ x_2\ x_3\right)$.

Для цього необхідно виділити діапазон H1:H3 (там буде відображатися результат множення), за допомогою кнопки **(Вставка функції)** виберіть з категорії **Математичні** функцію **МУМНОЖ,** введіть діапазон B5:D7 як перший множник (Масив1), а діапазон F1:F3 як другий множник (Масив2) та натисніть клавіші **Ctrl+Shift+Enter**.



Результатом буде набір чисел

1
2
4

Це і будуть невідомі шукані значення: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$.

Збережіть електронну книгу.