

Розв'язування рівнянь, систем рівнянь, оптимізаційних задач

Розв'язування рівнянь

Використання засобу Підбір параметра

У багатьох задачах певний результат є відомим, а от значення параметрів, за яких цей результат досягається, — ні. Як приклад можна навести задачу, у якій потрібно визначити, **через скільки годин скисне молоко або за якого обсягу випуску продукції фірма отримає прибуток у 1 000 000 грн.** У математиці клас таких задач є найширшим. Це, зокрема, задачі на розв'язання алгебраїчних рівнянь та нерівностей або на пошук екстремумів.

У всіх подібних задачах використовується **поняття цільової функції** — вона має досягти певного значення або оптимізуватися (мінімізуватися чи максимізуватися). В електронній книзі формулу обчислення цільової функції записують у певну клітинку, яку також називають **цільовою**. Цільова функція залежить від параметрів (часто — від одного параметра), значення яких зберігаються в інших клітинках електронної таблиці. Власне кажучи, **задача полягає у підборі таких значень параметрів, за яких у цільовій клітинці буде отримано бажаний результат.**

У табличному процесорі Excel є спеціальні засоби, які автоматично підбирають потрібні значення у клітинках параметрів. Вони називаються

Підбір параметра та Пошук розв'язку.

1. Перший із них дозволяє отримати в цільовій клітинці певне значення,
2. Другий — оптимізувати значення цільової функції.

Приклади наведено з використанням гугл таблиць та Microsoft excel.

Практична робота №4

Розв'язування рівнянь і систем рівнянь у Google Таблицях

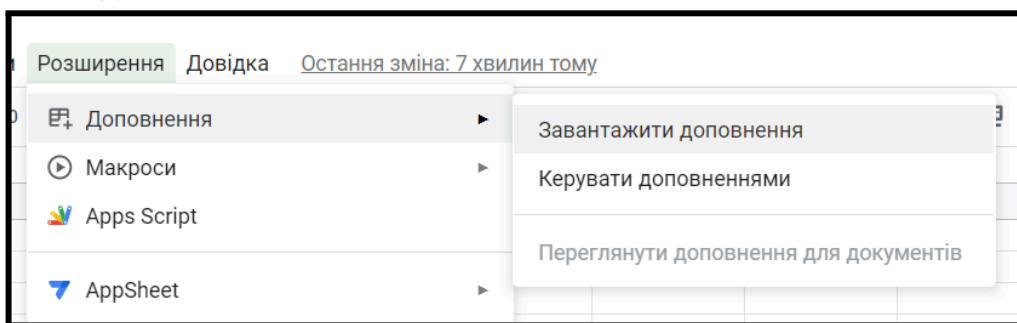
Підготовчий етап:

Відеоінструкція:

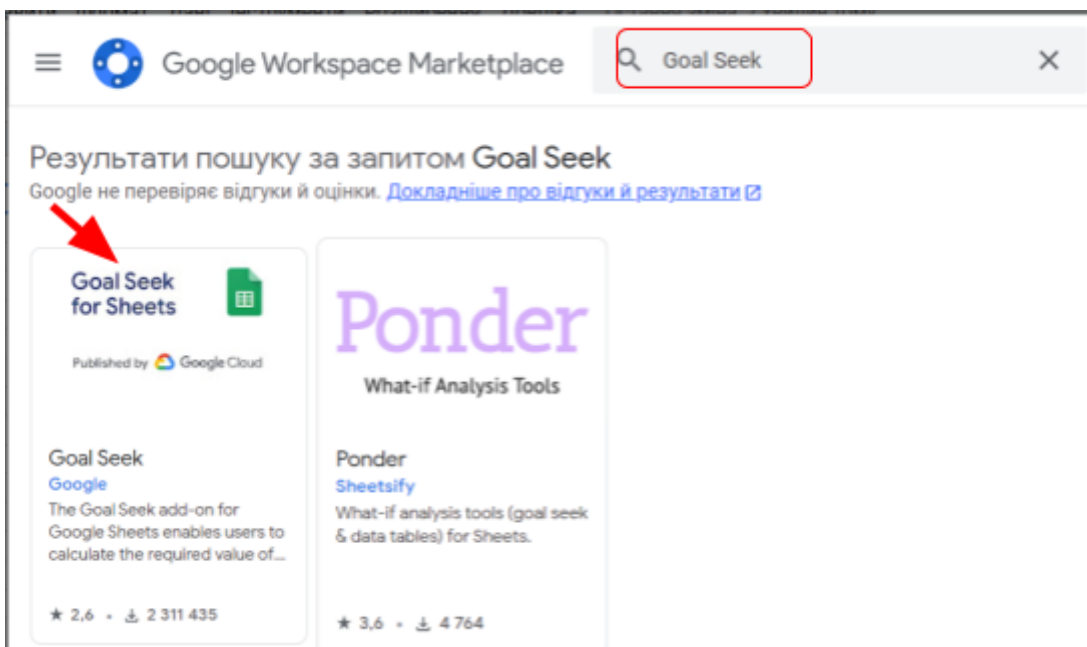
<https://www.youtube.com/watch?v=LCSpRDn0iYg>

Встановіть розширення Goal Seek, за допомогою якого можна розв'язувати рівняння в Google таблиці методом підбору параметра. Для цього:

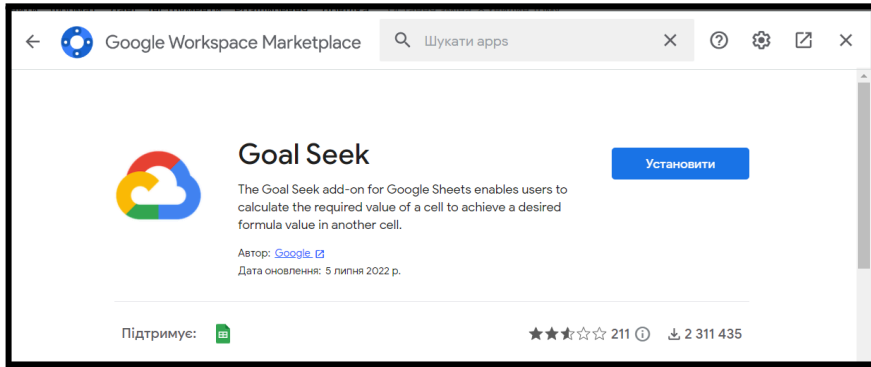
- 1) Виберіть вкладку **Розширення** → **Доповнення** → **Завантажити доповнення**



- 2) В рядку пошуку введіть назву розширення **Goal Seek**
- 3) Із запропонованих варіантів, клацніть на назві потрібного розширення **Goal Seek**

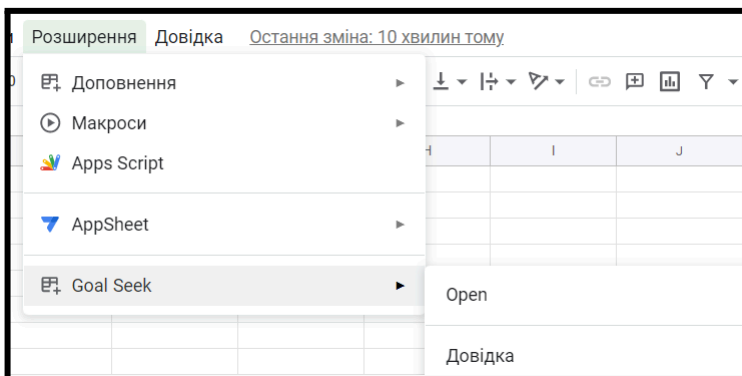


- 4) Натисніть кнопку **Установити**, далі потрібно буде підтвердити обліковий запис, у якому бажаєте встановити дане розширення та надати відповідні дозволи.



5) Після установки розширення, його можна відкрити і використовувати для розв'язання завдань:

Розширення → Доповнення → Goal Seek → Open



Після чого справа відкриється вікно для підбору параметра

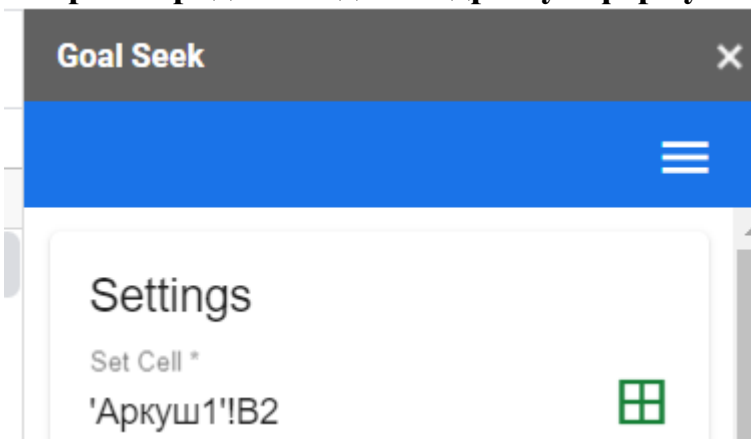
Для прикладу розглянемо розв'язок методом підбору параметра для рівняння

$x-5=0$

В даному прикладі **$x-5$** - цільова функція, **0** - значення, яке вона набуває

Увага! При записі рівняння в цільову клітинку потрібно замість змінної **x** використовувати адресу клітинки для підбору параметра (в прикладі це клітинка B1), отже наша цільова функція матиме вигляд **$=B1-5$** , тобто в клітинці B1 буде здійснено підбір і запис параметра при, якому цільова функція буде дорівнювати 0

(Вводимо в клітинку B2 формулу **$=B1-5$** , запускаємо додаток Goal Seek в перший рядок вводимо адресу з формулою



в 2й рядок числове значення

яке має прийняти функція в прикладі це 0. В 3му рядку вводимо адресу коміру де будуть проходити розрахунок параметра. Та натискаємо розв'язати.

Goal Seek

Settings

Set Cell *

'Аркуш1'!B2

Cell of the Target value

To Value *

0

Target value

By Changing Cell *

'Аркуш1'!B1

Cell to be changed when finding Target value

Options

Solve

Електр...

Файл

Змінити

Вигляд

Вставити

Формат

100%

...

	A	B	C
1	Параметр		
2	Цільова функція	-5	
3	Тут		
4	введено		
5	рівняння		
6	=B1-5		
7	значення, яке		
8	має набути		
9	цільова функція		
10	адреса клітинки,		
11	в якій буде		
12	підібрано		
13	параметр (розв'		
14	язок рівняння)		
15			
16			
17			
18	Кнопка запуску		
19	підбору		
20	параметра		

Goal Seek

Settings

Set Cell *

'Аркуш1'!B2

Cell of the Target value

To Value *

0

Target value

By Changing Cell *

'Аркуш1'!B1

Cell to be changed when finding Target value

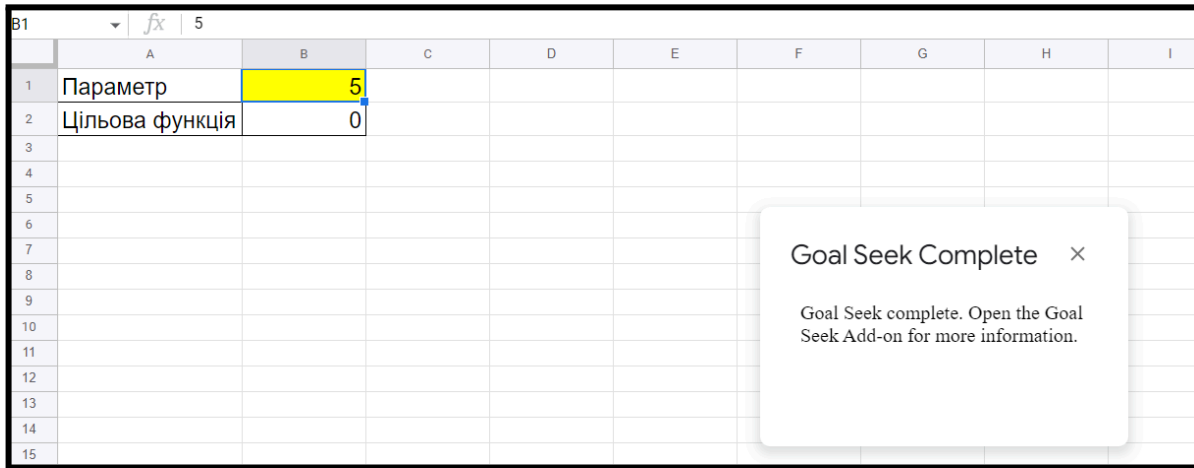
Options

Solve

Адреса клітинки з цільовою функцією, (в ній записане рівняння)

Виділіть потрібну клітинку і клацніть на цій кнопці

Після завершення підбору, отримаємо результат:



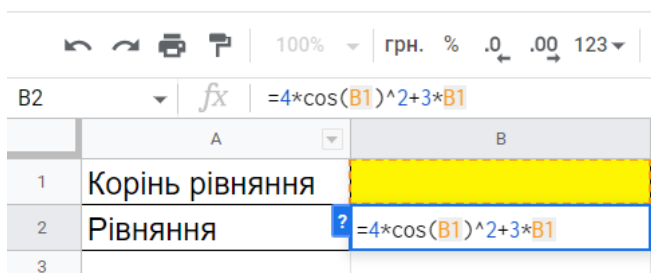
Задача №1

Розв'язання квадратного рівняння

Виконуючи цю вправу, за допомогою засобу Підбір параметра ви розв'яжете рівняння $4\cos^2 x + 3x = 15$.

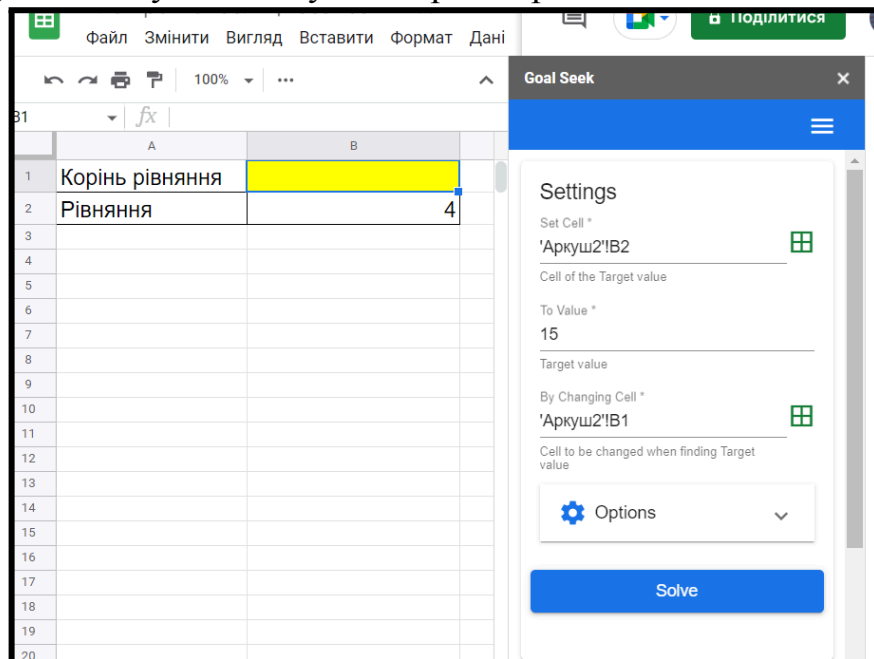
У нашій задачі цільовою є функція $f(x) = 4\cos^2 x + 3x$, а 15 — це значення, якому вона має дорівнювати.

1) Запишемо цільову функцію у клітинку B2



2) Відкриємо розширення для підбору параметра **Розширення** → **Доповнення** → **Goal Seek** → **Open**

3) Налаштуємо і запустимо розширення **Goal Seek**



4) Отримаємо наступний результат

Файл Змінити Вигляд Вставити Ф...		
100% ...		
B1	$\sum$	4,93499755859375
	A	B
1	Корінь рівняння	4,93499
2	Рівняння	14,9999
3		
4		
5		

- Як видно з малюнка вище, знайдене вами значення є наближеним, **оскільки отримано число 14,99956, а не 15.**

Задача №2

Розв'язати систему рівнянь

Необхідно розв'язати таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3; \\ -x_2 + 5x_3 = 18; \\ 4x_1 + 3x_3 = 16. \end{cases}$$

Хід виконання

1. Запишемо задану систему лінійних рівнянь у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 16 \end{pmatrix}$$

2. Створіть нову електронну таблицю (новий аркуш) та введіть до неї дані за зразком, наведеним на рис. 1

Примітка $A^{(-1)}$ - це A^{-1} - обернена матриця

F15	$\sum$							
	A	B	C	D	E	F	G	
1								
2		3	4	-2			3	
3	A=	0	-1	5		B=	18	
4		4	0	3			16	
5								
6								
7	$A^{(-1)}$ =					X=		
8								
9								

Рис. 1. Вихідні дані для системи лінійних рівнянь

3. Обчисліть матрицю A^{-1} у діапазоні B6:D8. Для цього виділіть цей діапазон

(або верхню праву клітинку цього діапазону B6), за допомогою кнопки $\sum$ (Вставка функції) виберіть з категорії **Функції масивів даних** функцію

MINVERSE або **МОБР**, введіть діапазон B2:D4 як її аргумент та натисніть **Enter** (можна ввести функцію вручну)

B6				
	A	B	C	D
1				
2		3	4	-2
3	A=	0	-1	5
4		4	0	3
5				
6		=MINVERSE(B2:D4)		
7	A ⁽⁻¹⁾ =			
8				
9				



B7				
	A	B	C	D
1				
2		3	4	-2
3	A=	0	-1	5
4		4	0	3
5				
6		-0,041	-0,190	0,285
7	A ⁽⁻¹⁾ =	0,317	0,269	-0,238
8		0,063	0,253	-0,041
9				

4. За допомогою функції **MMULT** або **МУМНОЖ** обчисліть у діапазоні G2:G4 добуток $A^{-1}B$ — це і буде розв'язок $X = (x_1 \ x_2 \ x_3)$.

Для цього необхідно виділити діапазон G2:G4 або клітинку G2 (там буде

відображатися результат множення), за допомогою кнопки Σ (Вставка функції) виберіть з категорії **Функції масивів даних** функцію **MMULT**, введіть діапазон B6:D8 через крапку з комою (;) введіть діапазон G2:G4 та натисніть

Enter.

G6								
	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		3	4	-2			3	
3	A=	0	-1	5		B=	18	
4		4	0	3			16	
5								
6		-0,041	-0,190	0,285			=?=MMULT(B6:D8;G2:G4)	
7	A ⁽⁻¹⁾ =	0,317	0,269	-0,238		X=		
8		0,063	0,253	-0,041				
9								

Результатом буде набір чисел

	1
X=	2
	4

Це і будуть невідомі шукані значення: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$.
Збережіть електронну книгу.

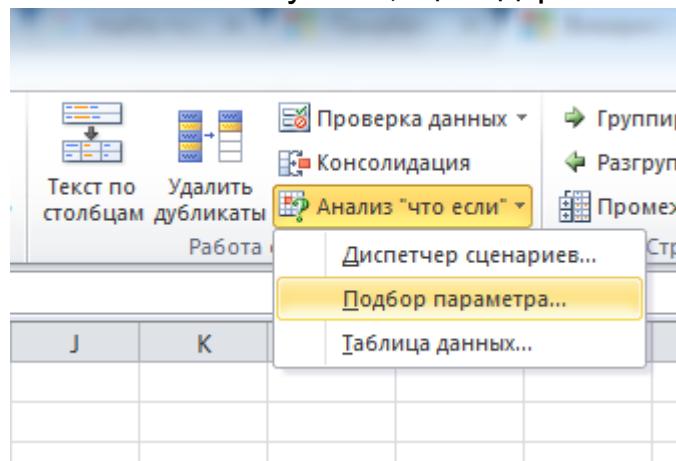
Розв'язування рівнянь і систем рівнянь у Excel

Підбір параметра в Excel

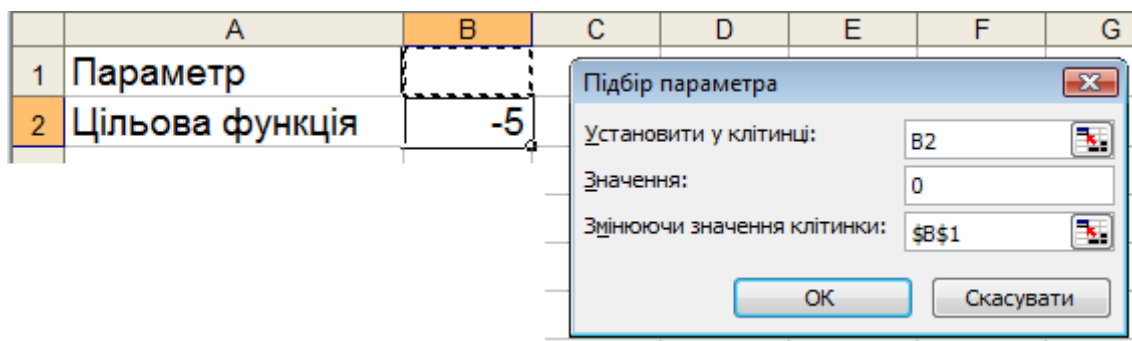
- В одну з клітинок електронної таблиці слід увести формулу цільової функції. Це буде **цільова клітинка** (на рис.1 — клітинка B2).

	A	B	C
1	Параметр		
2	Цільова функція	=B1-5	
3			

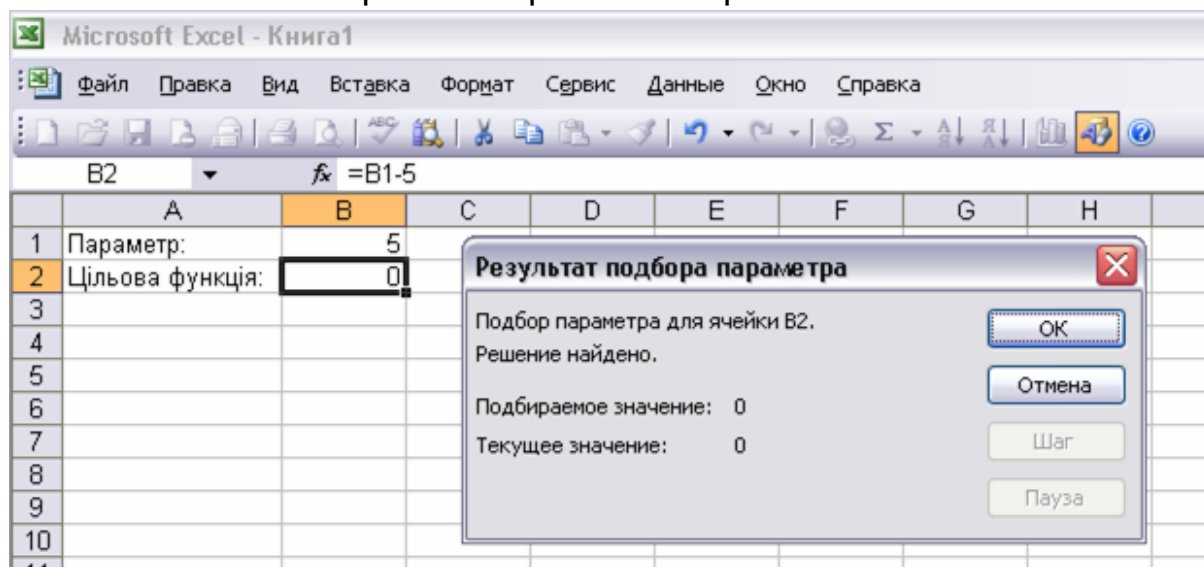
- Далі необхідно виконати команду **Дані ► Аналіз "что если" ► Підбір параметра** та заповнити поля у вікні, що відкриється (рис. 2):



- поле **Установити** у клітинці має містити адресу цільової клітинки;
 - у поле **Значення** слід ввести значення, якого має набути цільова функція;
 - у поле **Змінюючи** значення клітинки слід ввести адресу клітинки-параметра.
- Наприклад**, на рис. 1 параметр міститиметься у клітинці B1, і якщо в цільовій клітинці B2 потрібно отримати значення 0, вікно Підбір параметра слід заповнити так, як на рис. 2.



- На завершення потрібно клацнути кнопку ОК. У цільовій клітинці буде відображено значення, якого має набувати цільова функція, а в клітинці **параметра** — шукане значення параметра.
- Наприклад, на рис. 7.3 показано, як у клітинці B1 знайдено значення параметра (число 5), за якого цільова функція у клітинці B2 набуває значення 0. Тобто фактично розв'язано рівняння $x - 5 = 0$.



ПРИМІТКА. Підбір параметра майже завжди дає наближені значення результату. Тому, якщо в клітинці параметра після його підбору виводиться число 4,99999, то, скоріш за все, справжнім розв'язком задачі є число 5.

Використовуючи засіб **Підбір параметра**, клітинку параметра можна залишити порожньою, однак бажано попередньо визначити деяке початкове значення, адже від цього залежить швидкість отримання результату (особливо коли йдеться про складні цільові функції), а у деяких випадках і сам результат. Якщо цільова функція складна, може виникнути ситуація, коли не одне, а кілька значень параметра відповідають її шуканому значенню. Яке з них буде знайдено, залежить від початкового значення в клітинці параметра. У таких випадках, перш ніж підбирати параметр, доцільно побудувати графік цільової функції, щоб визначити початкове значення параметра наближено.

Вправа 1.

Розв'язання квадратного рівняння

Виконуючи цю вправу, за допомогою засобу **Підбір параметра** ви розв'яжете рівняння $4\cos^2 x + 3x = 15$.

У нашій задачі **цільовою** є функція $f(x) = 4\cos^2 x + 3x$, а 15 — це значення, якому вона має дорівнювати.

- Створіть нову електронну книгу. Цільовою вважатимемо клітинку A2 і припустимо, що значення параметра зберігається у клітинці A1. Уведіть у клітинку A2 формулу $=4*\text{COS}(A1)^2+3*A1$.

- Виконайте команду **Дані ► Аналіз “что если” ► Підбір параметра**, заповніть поля у вікні Підбір параметра (рис. 4, а) і клацніть ОК. У результаті у клітинці A1 (рис. 4, б) буде виведено значення змінної x, за якого функція набуває значення 15. Як видно з рис.4, б, знайдене вами значення є наближеним, **оскільки отримано число 14,99956, а не 15.**

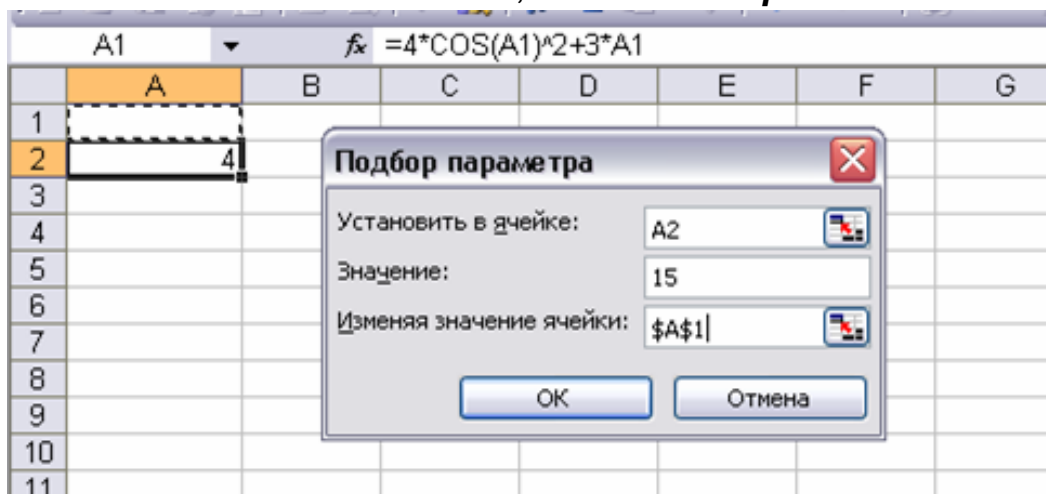


рис. 4, а

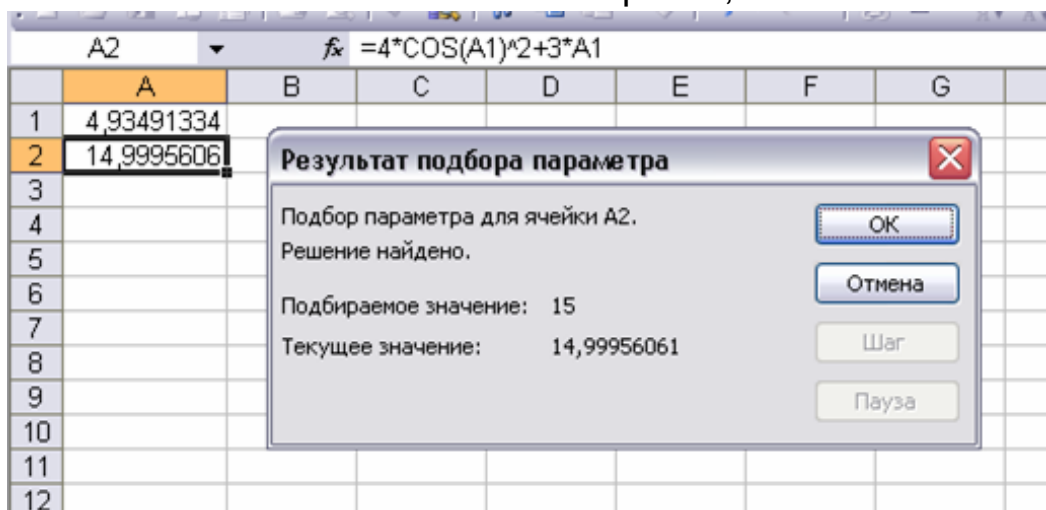


рис. 4 б

- Збережіть електронну книгу у файлі Вправа_13_1.xls.

Розв'язування систем рівнянь

Вправа 2.

Необхідно розв'язати таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3; \\ -x_2 + 5x_3 = 18; \\ 4x_1 + 3x_3 = 16. \end{cases}$$

Хід виконання

1. Запишемо задану систему лінійних рівнянь у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 16 \end{pmatrix}$$

2. Створіть нову електронну книгу та введіть до неї дані за зразком, наведеним на рис. 1

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		3	4	-2			3
3	A=	0	-1	5		B=	18
4		4	0	3			16
5							
6		-0,047	-0,190	0,285			
7	A ⁽⁻¹⁾ =	0,317	0,269	-0,238		X=	
8		0,063	0,253	-0,047			
9							
10							

Рис. 1. Вихідні дані для системи лінійних рівнянь

3. Обчисліть матрицю A^{-1} у діапазоні B6:D8. Для цього виділіть цей діапазон (або верхню праву клітинку цього діапазону B6), за допомогою кнопки Σ (Вставка функції) виберіть з категорії **Функції масивів даних** функцію **МОБР** або **MINVERSE**, введіть діапазон B2:D4 як її аргумент та натисніть

➤ **Enter** в Google таблицях

B6		A	B	C	D
1					
2			3	4	-2
3	A=		0	-1	5
4			4	0	3
5					
6					
7	A ⁽⁻¹⁾ =				
8					
9					

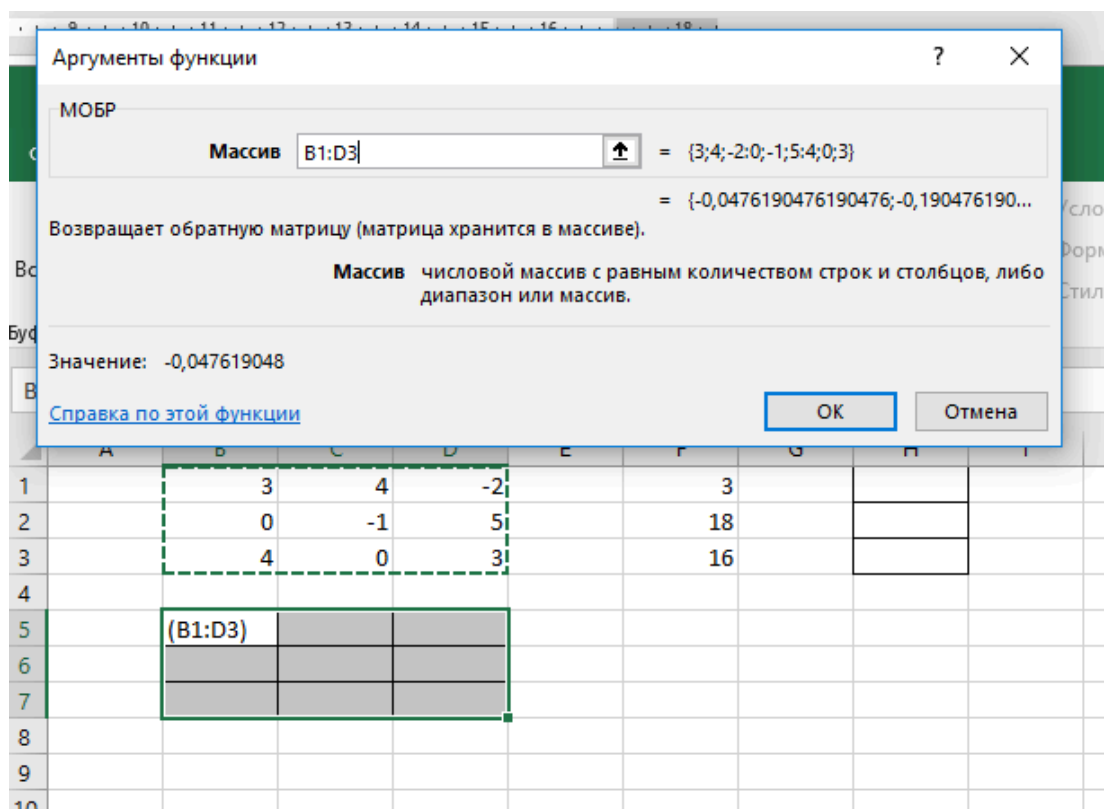
B7		A	B	C	D
1					
2			3	4	-2
3	A=		0	-1	5
4			4	0	3
5					
6			-0,047	-0,190	0,285
7	A ⁽⁻¹⁾ =		0,317	0,269	-0,238
8			0,063	0,253	-0,047
9					

4. За допомогою функції **ММУЛТ** або **МУМНОЖ** обчисліть у діапазоні G2:G4 добуток $A^{-1}B$ — це і буде розв'язок $X = (x_1 \ x_2 \ x_3)$.

Для цього необхідно виділити діапазон G2:G4 або клітинку G2 (там буде відображатися результат множення), за допомогою кнопки  (**Вставка функції**) виберіть з категорії **Математичні** функцію **МУМНОЖ**, введіть діапазон B5:D7 як перший множник (Масив1), а діапазон F1:F3 як другий множник (Масив2) та натисніть клавіші **Ctrl+Shift+Enter**.

3. Обчисліть матрицю A^{-1} у діапазоні B6:D8. Для цього виділіть цей діапазон, за допомогою кнопки  (**Вставка функції**) виберіть з категорії **Математичні** функцію **МОБР** або **MINVERSE**, введіть діапазон B2:D4 як її аргумент та натисніть

➤ або клавіші **Ctrl+Shift+Enter** в Excel



4. За допомогою функції **МУМНОЖ** обчисліть у діапазоні H1:H3 добуток $A^{-1}B$ — це і буде розв'язок $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$.

Для цього необхідно виділити діапазон H1:H3 (там буде відображатися результат множення), за допомогою кнопки  (**Вставка функції**) виберіть з категорії **Математичні** функцію **МУМНОЖ**, введіть діапазон B5:D7 як перший множник (Масив1), а діапазон F1:F3 як другий множник (Масив2) та натисніть клавіші **Ctrl+Shift+Enter**.

Аргументы функции

МУМНОЖ

Массив1

B5:D7

↑

= {-0,0476190476190476;-0,190476190...

Массив2

F1:F3

↑

= {3;18;16}

= {1;2;4}

Возвращает матричное произведение двух массивов; результат имеет то же число строк, что и первый массив, и то же число столбцов, что и второй массив.

Массив2 первый из перемножаемых массивов, число столбцов в нем должно равняться числу строк во втором массиве.

Значение: 1

[Справка по этой функции](#)

OK

Отмена

1
2
4

Результатом буде набір чисел

Це і будуть невідомі шукані значення: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$.

Збережіть електронну книгу.