

Câu 1. [2D1-5.5-4] (Chuyên Vinh Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	+	

Hàm số $y = \log_2(f(2x))$ đồng biến trên khoảng

- A.** $(1; 2)$ **B.** $(-\infty; -1)$ **C.** $(-1; 0)$ **D.** $(-1; 1)$

Lời giải

Tác giả: Vũ Danh Được; Fb: Danh Được Vũ

Chọn A

Đặt $y = g(x) = \log_2(f(2x))$.

Ta có
$$y' = g'(x) = (\log_2(f(2x)))' = \frac{(f(2x))'}{f(2x) \cdot \ln 2} = \frac{2 \cdot f'(2x)}{f(2x) \cdot \ln 2} = 0$$

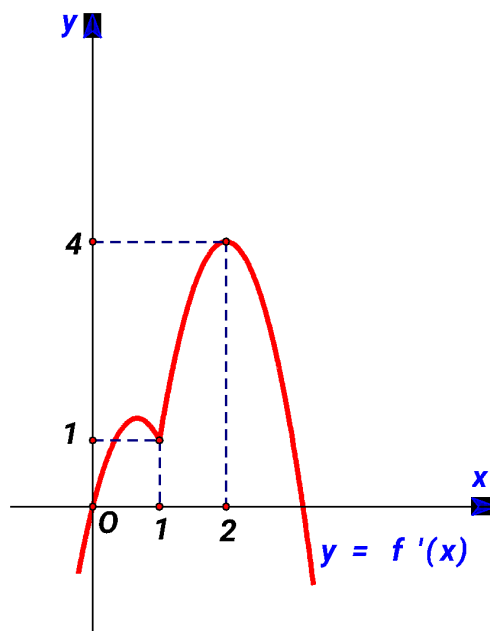
$$\Rightarrow f'(2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -1 \\ 2x = 0 \\ 2x = 1 \\ 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của $y = g(x)$

x	$-\infty$		-1/2		0		1/2		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$											

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = \log_2(f(2x))$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 2. [2D1-5.5-4] (Chuyên Vinh Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0) = 0$ và đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = |3f(x) - x^3|$ đồng biến trên khoảng

A. $(2; +\infty)$.

B. $(-\infty; 2)$.

C. $(0; 2)$.

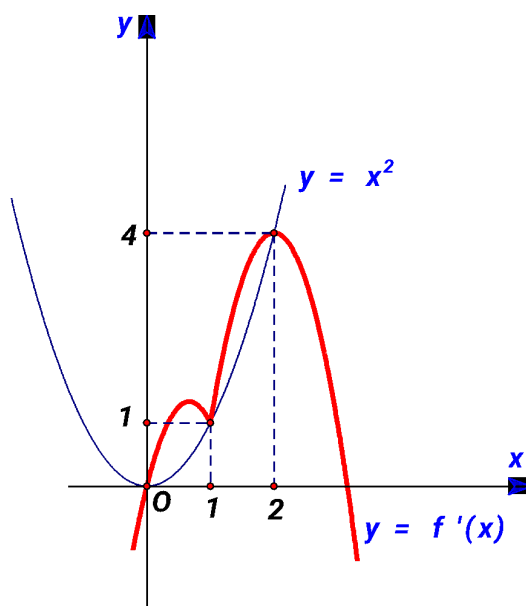
D. $(1; 3)$.

Lời giải

Tác giả: Vũ Nga; Fb: Nga Vu

Chọn C

Đặt $g(x) = 3f(x) - x^3$, ta có: $g'(x) = 3[f'(x) - x^2]$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ (hoành độ giao điểm của đồ thị hàm $y = f'(x)$ và $(P): y = x^2$)



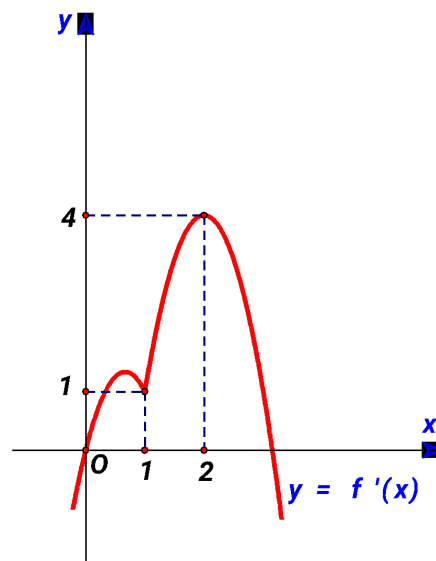
Do $f(0) = 0 \Rightarrow g(0) = 0$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |g(x)|$ như sau

x	$-\infty$	0		1	2		x_0		$+\infty$		
$g'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	-	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		0	$\nearrow$			$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$ g(x) $	$+\infty$	$\searrow$		0	$\nearrow$			$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng $(0; 2)$ và $(x_0; +\infty)$ với $x_0 > 2$, vậy chọn C.

Câu 3. [2D1-5.5-4] (Chuyên Vinh Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0) = 0$ và đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực đại của hàm số $y = |3f(x) - x^3|$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

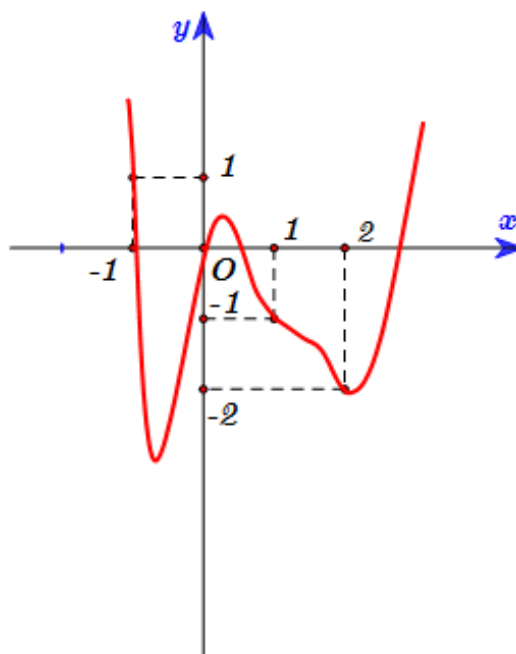
Lời giải

Tác giả: Vũ Nga; Fb: Nga Vu

Chọn B

Từ **Lời giải** Câu 36 suy ra hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu, chọn B.

Câu 4. [2D1-5.5-4] (Chuyên Vinh Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0) = \frac{1}{2}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = |2f(x+2) + (x+1)(x+3)|$ nghịch biến trên khoảng

- A.** $(-3; -2)$ **B.** $(0; 2)$ **C.** $(-\infty; -3)$ **D.** $(-2; -1)$

Lời giải

Tác giả: Vũ Nga; Fb: Nga Vu

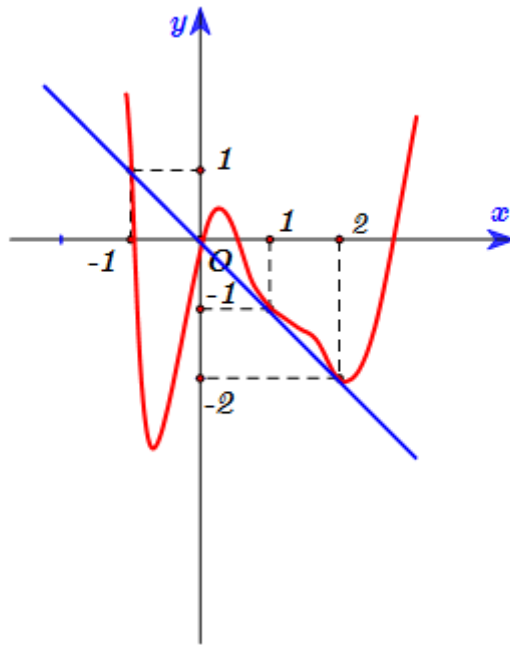
Chọn A

Đặt $g(x) = 2f(x+2) + (x+1)(x+3)$.

Ta có $g'(x) = 2[f'(x+2) + (x+2)]$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+2) = -(x+2)$

Đặt $t = x+2$ ta được $f'(t) = -t$ (1).

Nghiệm của phương trình (1) là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f'(t)$ và đường thẳng $d: y = -t$ (hình vẽ)



Dựa vào đồ thị của $y = f'(t)$ và đường thẳng $y = -t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Ta có : $f'(t) = -t$

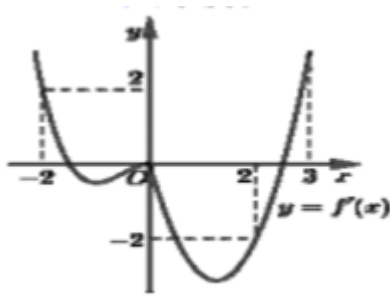
Do $f(0) = \frac{1}{2}$ nên $g(-2) = 2f(0) + (-2+1)(-2+3) = 0$

Bảng biến thiên của hàm số $y = |g(x)|$

x	$-\infty$		0		1		2		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	+	0	-		-	
$g(x)$	$+\infty$		0					0			
											$-\infty$
$ g(x) $	$+\infty$		0					0			$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; x_0)$ và $(-3; -2)$ với $x_0 < -3$, vậy chọn A.

Câu 5. [2D1-5.5-4] (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Hàm số $y = \left| f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0) \right|$ có nhiều nhất bao nhiêu cực trị trong khoảng $(-2; 3)$.

A.6.

B.2.

C.5.

D.3

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Huỳnh Tấn Trung ; Fb: Nguyễn Huỳnh Tấn Trung

Chọn D

Xét hàm số: $h(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2 - f(0)$.

Ta có $h'(x) = f'(x) + x$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x$

Nghiệm phương trình trên là hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = -x$ và $y = f'(x)$

Dựa vào đồ thị suy ra phương trình: $f'(x) = -x$ có ba nghiệm $\begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Trên khoảng $(-2; 3)$, hàm số $h(x)$ có một điểm cực trị là $x = 2$, (do qua nghiệm $x = 0$, $h'(x)$ không đổi dấu). Do đó đồ thị hàm số $y = h(x)$ cắt trục hoành tại tối đa 2 điểm.

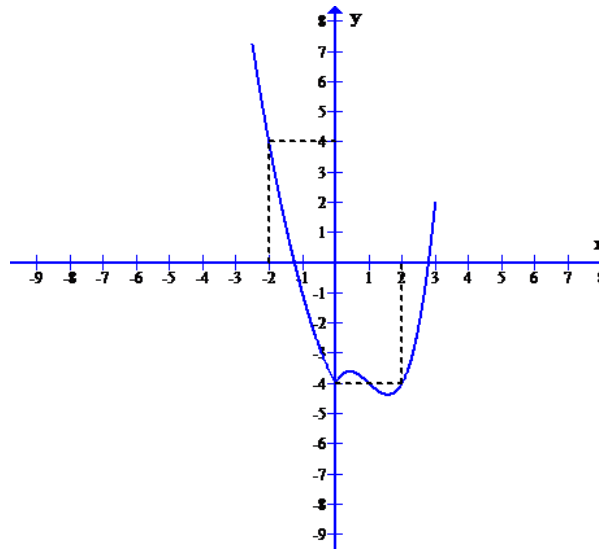
Suy ra hàm số $y = |h(x)|$ có tối đa $2 + 1 = 3$ điểm cực trị trong khoảng $(-2; 3)$.

PHÂN TÍCH VÀ PHÁT TRIỂN CÂU 44

Tác giả: Nguyễn Huỳnh Tấn Trung ; Fb: Nguyễn Huỳnh Tấn Trung

- Đây là bài toán hàm số có chứa dấu trị tuyệt đối.
- Đầu tiên, ta xét hàm số không chứa dấu trị tuyệt đối, và khảo sát hàm số đó.
- Sau đó, ta dựa vào sự tương giao với trục hoành, suy ra hàm số có chứa dấu trị tuyệt đối có tối đa bao nhiêu cực trị.

Câu 6. [2D1-5.5-4] (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Hàm số $y = |f(x) + x^2 - f(0)|$ có nhiều nhất bao nhiêu cực trị trong khoảng $(-3; 3)$.

A.6.

B.2.

C.5.

D.3

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Huỳnh Tấn Trung ; Fb: Nguyễn Huỳnh Tấn Trung

Chọn C

Xét hàm số: $g(x) = f(x) + x^2 - f(0)$.

Ta có $g'(x) = f'(x) + 2x$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2x$

Nghiệm phương trình trên là hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = -2x$ và $y = f'(x)$

Dựa vào đồ thị suy ra phương trình: $f'(x) = -2x$ có hai nghiệm $\begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Trên khoảng $(-3; 3)$, hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị là $x = 2, x = -2$. Do đó đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại tối đa 3 điểm.

Suy ra hàm số $y = |g(x)|$ có tối đa $3 + 2 = 5$ điểm cực trị trong khoảng $(-3; 3)$.

Câu 7. [2D1-5.5-4] (Chuyên Vinh Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$\nearrow 0$	$\searrow 0$	$\searrow 0$	$\nearrow 0$	$\nearrow 0$	

Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^2 x$ trên $[-1; 1]$ là

A. $f(-1)$.

B. $f(0)$.

C. $f(2)$.

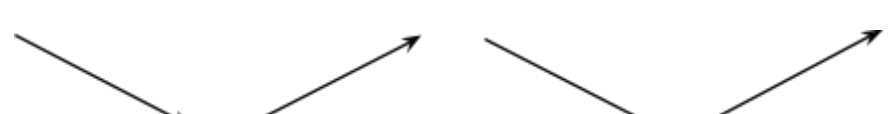
D. $f(1)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Trường Giang; Fb: Giang Nguyen

Chọn B

Ta có: $g(x) = f(2x) - \sin^2 x \leq f(2x), \forall x \in [-1; 1]$.Mặt khác, từ bảng biến thiên của $f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$									$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $f(2x) \leq f(0)$ với mọi $x \in [-1; 1]$, do đó giá trị lớn nhất của $g(x)$ trên $[-1; 1]$ là $f(0)$, đạt được khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} f(2x) = f(0) \\ \sin^2 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Câu 8. [2D1-5.5-4] (Chuyên Vinh Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		0		0		0	
		$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	

Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^4(2x)$ trên $[-1; 1]$ là

A. $f(-1)$.

B. $f(0)$.

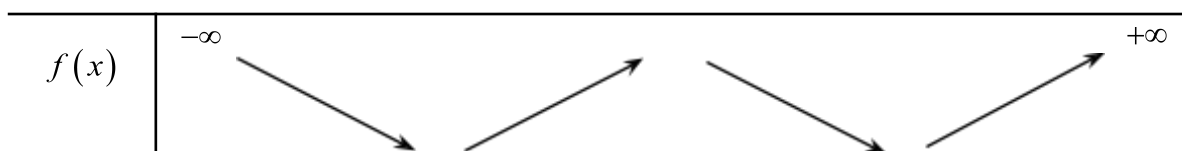
C. $f(2)$.

D. $f(1)$.

Lời giải

Ta có: $g(x) = f(2x) - \sin^4(2x) \leq f(2x), \forall x \in [-1; 1]$.Mặt khác, từ bảng biến thiên của $f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:

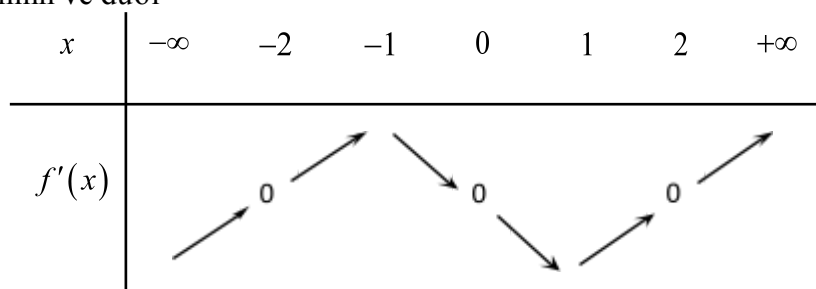
x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	



Từ bảng biến thiên ta có: $f(2x) \leq f(0)$ với mọi $x \in [-1; 1]$, do đó giá trị lớn nhất của $g(x)$

trên $[-1; 1]$ là $f(0)$, đạt được khi và chỉ khi: $\begin{cases} f(2x) = f(0) \\ \sin^4(2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$.

Câu 9. [2D1-5.5-4] (Chuyên Vinh Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(2x) + (x-1)^2$ trên $[0; 2]$ là

A. $f(-1)$.

B. $f(0)$.

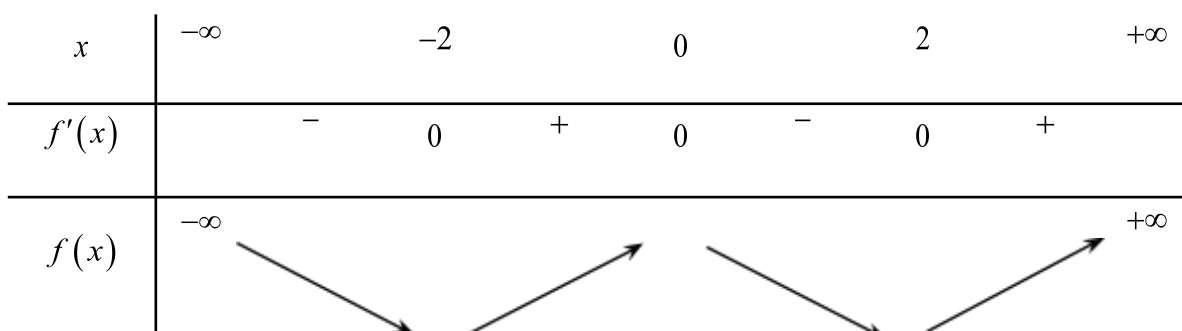
C. $f(2)$.

D. $f(1)$.

Lời giải

Ta có: $g(x) = f(2x) + (x-1)^2 \geq f(2x)$, $\forall x \in [0; 2]$.

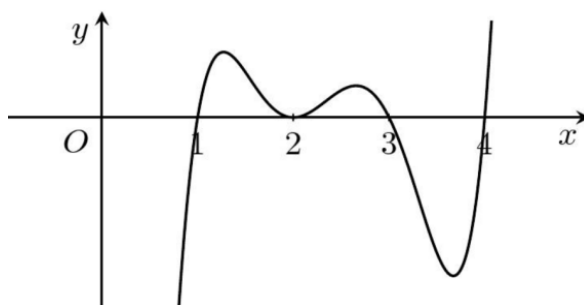
Mặt khác, từ bảng biến thiên của $f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:



Từ bảng biến thiên ta có: $f(2x) \geq f(2)$ với mọi $x \in [0; 2]$, do đó giá trị nhỏ nhất của $g(x)$

trên $[0; 2]$ là $f(2)$, đạt được khi và chỉ khi: $\begin{cases} f(2x) = f(2) \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Câu 10. [2D1-5.5-4] (Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x^2 - 2) - \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 4\right)$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?
A. $(-\infty; -\sqrt{3})$ **B.** $(-3; 0)$ **C.** $(1; \sqrt{3})$ **D.** $(-\sqrt{3}; +\infty)$

Lời giải

Tác giả: Hoàng Thị Hồng Hạnh.

Chọn C

Chọn $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)(x-4)$

Đặt $y = g(x) = f(x^2 - 2) - \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 4\right)$

Khi đó $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 2) - (x^2 + 2x - 3)$

$$= 2x \cdot (x^2 - 2 - 1)(x^2 - 2 - 2)^2(x^2 - 2 - 3)(x^2 - 2 - 4) - (x^2 + 2x - 3)$$

$$= 2x \cdot (x^2 - 3)(x^2 - 4)^2(x^2 - 5)(x^2 - 6) - (x^2 + 2x - 3)$$

$$g'(-2) = 3 > 0 \text{ nên loại phương án A và B.}$$

$$g'(3) = 10788 > 0 \text{ nên loại phương án D.}$$

Cách 2: (TV phản biện)

Ta có $y' = g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 2) - (x^2 + 2x - 3)$

Từ đồ thị ta có $f'(x^2 - 2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 < 1 \\ 3 < x^2 - 2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \\ x \in (-\sqrt{6}; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; \sqrt{6}) \end{cases}$

$$\text{Suy ra } 2xf'(x^2 - 2) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{6}) \cup (-\sqrt{5}; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{5}; \sqrt{6})$$

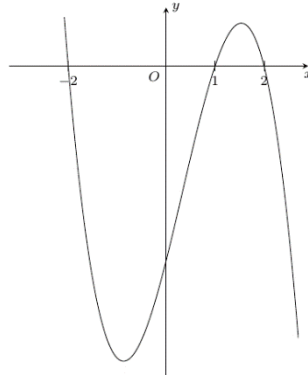
Nên ta lập được bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-3	$-\sqrt{6}$	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{3}$	0	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$+\infty$
$2xf'(x^2 - 2)$	-	-	0	+	0	-	0	+	0	-	+
$-x^2 - 2x + 3$	-	0	+	+	+	+	+	-	-	-	-
y'	-	0	0	+	0	0	+	0	0	-	

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$, $(1; \sqrt{3})$ và $(\sqrt{5}; \sqrt{6})$.

Vậy đáp án đúng là đáp án C.

Câu 11. [2D1-5.5-4] (Sở Thanh Hóa 2019) Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên và $f(2) = f(-2) = 0$.



Hàm số $g(x) = [f(3-x)]^2$ nghịch biến trong khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $(1; 2)$. B. $(2; 5)$. C. $(5; +\infty)$. D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Tác giả: Võ Thanh Phong ; Fb: Võ Thanh Phong.

Chọn B

Ta có: $g'(x) = -2f(3-x)f'(3-x)$.

Từ đồ thị của $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	0	0	0	$-\infty$

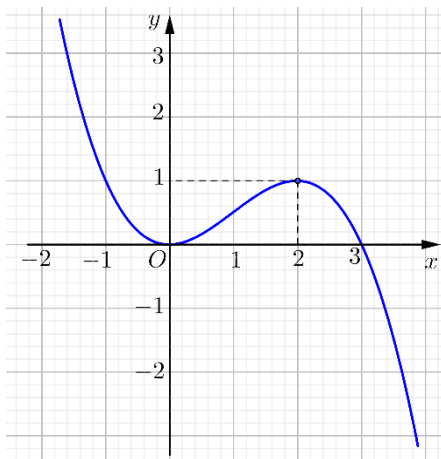
Từ bảng biến thiên ta suy ra $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(3-x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số $g(x) = [f(3-x)]^2$ nghịch biến khi và chỉ khi

$$g'(x) = -2f(3-x)f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 3-x < 1 \\ 3-x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 5 \\ x < 1 \end{cases}$$

Câu 12. [2D1-5.5-4] (Sở Điện Biên) Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + k$ với $(a, b, c, d, k \in \mathbb{R})$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, đạt cực trị tại điểm $O(0; 0)$

và cắt trục hoành tại $A(3;0)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5;5]$ để phương trình $f(-x^2 + 2x + m) = k$ có bốn nghiệm phân biệt?



A. 0.

B. 2.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta thấy $f'(x)$ không thể có bậc nhỏ hơn bằng 2, do đó $a \neq 0$.

Ta suy ra $f'(x) = ax^2(x-3)$, đồ thị của nó đi qua $A(2;1)$ nên $1 = a \cdot 2^2 \cdot (2-3) = - \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$.

Suy ra $f'(x) = -\frac{x^2}{4}(x-3)$, do đó $f(x) = -\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{4} + k$.

Ta có $f(x) = k \Leftrightarrow -\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{4} + k = k \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$.

Suy ra $f(-x^2 + 2x + m) = k \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x + m = 0 \\ -x^2 + 2x + m = 4 \end{cases}$.

Phương trình $-x^2 + 2x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta'_1 = 1 + m > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Phương trình $-x^2 + 2x + m = 4$ có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta'_2 = 1 + m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > 3$.

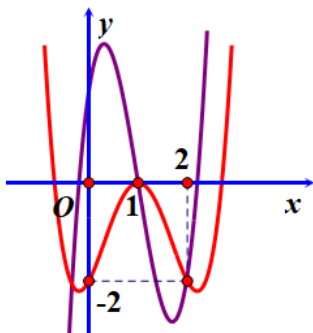
Hai phương trình nếu như có nghiệm chung x_0 thì $\begin{cases} -x_0^2 + 2x_0 + m = 0 \\ -x_0^2 + 2x_0 + m = 4 \end{cases} \Rightarrow 4 = 0$.

Do vậy để phương trình $f(-x^2 + 2x + m) = k$ có 4 nghiệm phân biệt thì $\begin{cases} m > -1 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$.

Do m nguyên và $m \in [-5;5]$ nên $m \in \{4;5\}$. Vậy có 2 giá trị của m .

Câu 13. [2D1-5.5-4] (Đặng Thành Nam Đề 6) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức hệ số thực. Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$. Phương trình $f(x) = me^x$ có

hai nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0;2]$ khi và chỉ khi m thuộc nửa khoảng $[a;b)$. Giá trị của $a+b$ gần nhất với giá trị nào dưới đây?



A. 0,27

B. -0,54

C. -0,27

D. 0,54

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Châu Vinh ; Fb: Vinhchaunguyen

Chọn C

Phương trình: $f(x) = m.e^x \Leftrightarrow m = \frac{f(x)}{e^x}$.

Xét $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ với $x \in [0;2]$, có:

$$g'(x) = \frac{f'(x).e^x - e^x.f(x)}{e^{2x}} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x).e^x - e^x.f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = f(x) \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \text{ với } x \in [0;2].$$

Dựa vào đồ thị hàm số hàm số ta suy ra được $y = f(x)$ là đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ âm, $y = f'(x)$ có đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.

Từ đó ta có bảng biến thiên:

x	0	1	2
y'	+	0	-
y	$g(0)$	$g(1)$	$g(2)$

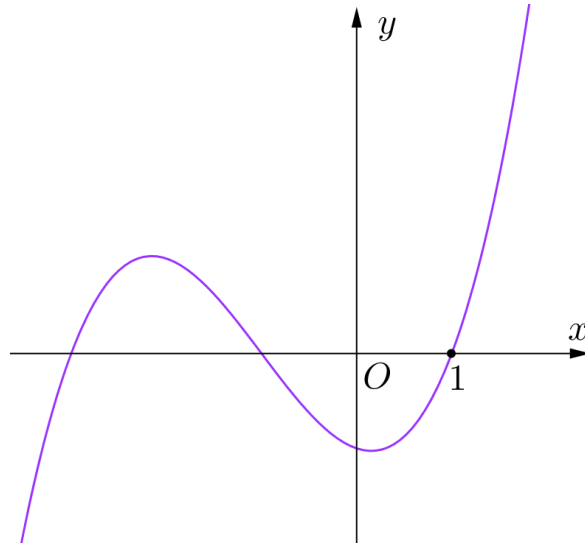
Với: $g(1) = \frac{f(1)}{e^1} = \frac{0}{e} = 0$, $g(0) = \frac{f(0)}{e^0} = -2$, $g(2) = \frac{f(2)}{e^2} = -\frac{2}{e^2}$.

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình $m = \frac{f(x)}{e^x}$ có hai nghiệm thực phân biệt thuộc

$$[0;2] \text{ khi và chỉ khi } g(2) \leq m < g(1) \Leftrightarrow -\frac{2}{e^2} \leq m < 0.$$

Hay $m \in \left[-\frac{2}{e^2}; 0\right) \Rightarrow a+b = -\frac{2}{e^2} + 0 = -\frac{2}{e^2} \approx 0,27$.

Câu 14. [2D1-5.5-4] (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị được cho trong hình vẽ. Tìm điều kiện của m để hàm số $g(x) = f(2019^x) - mx + 2$ đồng biến trên $[0;1]$



- A. $m \leq \ln 2019$. B. $0 < m < \ln 2019$. C. $m > \ln 2019$. **D. $m \leq 0$.**

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Như Tùng; Fb: Nguyễn Như Tùng

Chọn D

Ta có $g'(x) = 2019^x \ln 2019 \cdot f'(2019^x) - m$.

Phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2019^x \ln 2019 \cdot f'(2019^x) = m$, (1)

Đặt $t = 2019^x$, ta có $t \in [1; 2019]$ và $2019^x \ln 2019 \cdot f'(2019^x) = t \cdot \ln 2019 \cdot f'(t)$

Đặt $h(t) = t \cdot \ln 2019 \cdot f'(t)$, $t \in [1; 2019]$.

Phương trình (1) trở thành $h(t) = t \cdot \ln 2019 \cdot f'(t) = m$, (2)

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ suy ra $f'(x)$ đồng biến trên $[1; 2019]$, do đó $f''(x) \geq 0$ trên $[1; 2019]$. Hơn nữa, từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta cũng có $f'(x) \geq 0$ trên $[1; 2019]$.

Do đó $h'(t) = \ln 2019 [f'(t) + t \cdot f''(t)] \geq 0 \quad \forall t \in [1; 2019]$, $h'(t) = 0$ tại hữu hạn điểm, nên $h(t)$ đồng biến trên $[1; 2019]$. Từ đó (2) có số nghiệm là hữu hạn trên $[1; 2019]$, nên phương trình $g'(x) = 0$ có số nghiệm hữu hạn trên $[1; 2019]$.

Như vậy: Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[0;1]$

$$\Leftrightarrow g'(x) \geq 0 \text{ với mọi } x \in [0;1] \Leftrightarrow m \leq 2019^x \cdot \ln 2019 \cdot f'(2019^x) \quad \forall x \in [0;1]$$

$$\Leftrightarrow m \leq t.\ln 2019.f'(t) \quad \forall t \in [1;2019] \quad \Leftrightarrow m \leq \min_{[1;2019]} h(t) = h(1) = 1.\ln 2019.f'(1) = 0$$

Vậy $m \leq 0$.