Corrigé

Concours Communs Polytechniques

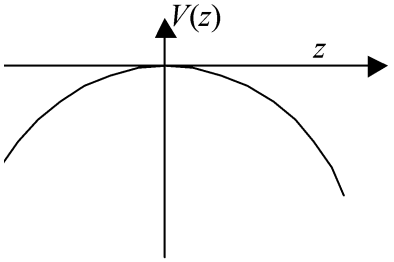
SECONDE ÉPREUVE DE PHYSIQUE - FILIÈRE MP

Document rédigé par Paul Roux, Saint-Etienne (paul.roux@prepas.org)

A. Pièges électroniques en 1D, 2D, 3D

I. Piège 1D

1. De façon immédiate $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ conformément aux lois de l'électrostatique dans le vide.
2. Il s'agit d'une parabole avec la concavité vers le bas :



Dans le plan *Oxy*, $V(x,y) = -\frac{V_0}{4d^2}\left(x^2 + y^2\right) = -\frac{V_0}{4d^2}\rho^2$ et les équipotentielles sont des cercles de centre *O*.

Dans un plan quelconque passant par *Oz*, $V(x,y) = -\frac{V_0}{2d^2}\left(\rho^2 - z^2\right)$ et les équipotentielles sont des hyperboles équilatères dont *Oz* est une asymptote.
Finalement, les surfaces équipotentielles sont des hyperboloïdes de révolution, d'axe *Oz*. On reconnaît d'ailleurs certaines de ces surfaces dans les électrodes proposées à la question suivante.

3. La continuité du potentiel à la surface des électrodes permet de déterminer le potentiel des coupelles $z^2 - \rho^2 = z_0^2$ sous la forme $V_c = \frac{V_0}{2d^2} z_0^2$; de même l'électrode annulaire $z^2 - \rho^2 = -r_0^2$ a pour potentiel $V_a = -\frac{V_0}{2d^2} r_0^2$. Enfin, les connexions imposent $V_0 = V_c - V_a$ donc $z_0^2 + r_0^2 = 2d^2$.
4. **a)** En l'absence de toute autre force, $m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -e\left(-\mathbf{grad}\Phi\right)$ s'écrit :

$$m\ddot{x} = -\frac{eV_0}{2d^2}x \quad m\ddot{y} = -\frac{eV_0}{2d^2}y \quad m\ddot{z} = \frac{eV_0}{d^2}z$$

Le mouvement axial est donc confiné si $z(t)$ est bornée, donc si $V_0 < 0$.

b) La pulsation correspondante est $\omega_z = \sqrt{-\frac{eV_0}{md^2}} = 1{,}56.10^8\,\text{rad.s}^{-1}$ avec pour fréquence correspondante $f_z = \frac{\omega_z}{2\pi} = 24{,}9\text{MHz}$.

II. Pièges 2D

1. **a)** Le principe fondamental de la dynamique s'écrit $m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ soit encore $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \omega_c \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v}$ avec $\omega_c = 8{,}79.10^8\,\text{rad.s}^{-1}$ et $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 140\text{MHz}$.

b) Les conditions initiales s'écrivant $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ et $v_{0x} = v_0 \sin\theta_0$, $v_{0y} = 0$, $v_{0z} = v_0 \cos\theta_0$, on commence par résoudre en projection sur Oz l'équation $\ddot{z} = 0$ qui fournit $z = v_0 \cos\theta_0\, t$; on écrit encore les équations du mouvement projetées dans le plan Oxy sous la forme $\ddot{x} = -\omega_c \dot{y} \Rightarrow \dot{x} = -\omega_c y + v_0 \sin\theta_0$ et $\dot{y} = \omega_c \dot{x} \Rightarrow \dot{y} = \omega_c y + v_0$. On en déduit $\ddot{y} + \omega_c^2 y = \omega_c v_0 \sin\theta_0$ soit compte tenu des conditions initiales $y = \frac{v_0 \sin\theta_0}{\omega_c}\left(1 - \cos\omega_c t\right)$; on en déduit immédiatement $x = \frac{v_0 \sin\theta_0}{\omega_c}\sin\omega_c t$ et le mouvement est circulaire de rayon $\frac{v_0 \sin\theta_0}{\omega_c}$.

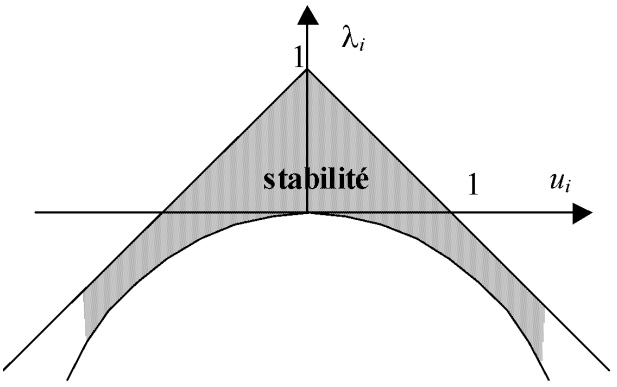
c) Il s'agit d'un piège 2D puisque la trajectoire de l'électron en projection dans le plan Oxy est un cercle de rayon maximal $r_{\max} = \frac{v_0}{\omega_c} = 0{,}11\text{mm}$.

2. **a)** Dans l'approximation des régimes quasi-permanents, on néglige le champ magnétique du aux variations temporelles du champ électrique qui est donné par $\mathbf{E} = -\,\mathbf{grad}\,\Phi$ d'où les équations :

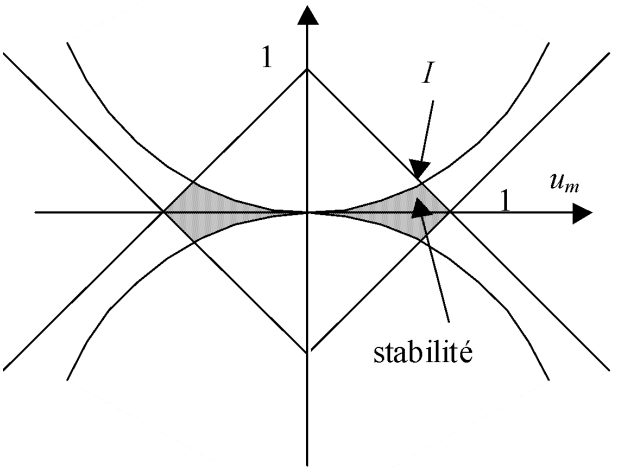
$$m\ddot{x} = \frac{ex}{r_0^2}\left(V_s + U_m \cos\Omega t\right) \quad m\ddot{y} = 0 \quad m\ddot{z} = -\frac{ez}{r_0^2}\left(V_s + U_m \cos\Omega t\right)$$

Le changement de variable demandé se fait selon $\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{\Omega^2}{4}\frac{d^2q}{d\theta^2}$ soit, après substitution, $\frac{d^2x}{d\theta^2} + \left[-2\frac{V_s}{\alpha} + \frac{U_m}{\alpha}\cos\theta\right]x = 0$ et $\frac{d^2z}{d\theta^2} + \left[2\frac{V_s}{\alpha} - \frac{U_m}{\alpha}\cos\theta\right]z = 0$ soit enfin $\lambda_x = -2\frac{V_s}{\alpha} = -2u_s = -\lambda_z$ et $u_x = \frac{U_m}{\alpha} = u_m = -u_z$. θ étant sans dimension, λ_i et u_i le sont aussi et α est une tension, mesurée en volt.

b) Le graphe demandé est immédiat, si on remarque que $-u^2/2$ et $1 - |u|$ ne se coupent jamais puisque l'équation $u^2 - 2u + 2 = 0$ n'a pas de solution réelle. La zone de stabilité est comprise entre les courbes représentant $-u^2/2$ (parabole vers le bas) et $1 - |u|$ (affine par morceaux.)



Si maintenant on impose à la fois que 2 v_s et son opposé vérifient la condition de stabilité (en x et z), il vient $-0{,}5u_m^2 \le \pm 2v_s \le 1-|u_m|$ qui se représente comme sur la figure ci-après :



Les coordonnées de I vérifient $1-u_I = 0{,}5u_I^2$ soit $u_I = \sqrt{3}-1$ donc $v_I = 1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Comme on choisit $u_m = u_I$, il vient $\alpha = \dfrac{U_m}{u_m} = 6{,}83\text{V}$ puis $\Omega = \sqrt{\dfrac{2e\alpha}{m_e r_0^2}}$ soit $\Omega = 7{,}75.10^8\text{rad.s}^{-1}$ donc $\dfrac{\Omega}{2\pi} = 123\text{MHz}$. Enfin, on impose $v_s = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ d'où $V_s = \alpha v_s = 0{,}45\text{V}$.

III. Piège 3D

1. La somme des forces déjà considérées mène à $\ddot{x} = \dfrac{1}{2}\omega_z^2 x - \omega_c \dot{y}$, $\ddot{y} = \dfrac{1}{2}\omega_z^2 y + \omega_c \dot{x}$ et $\ddot{z} = -\omega_z^2 z$. On en déduit immédiatement $\ddot{\zeta} = \dfrac{1}{2}\omega_z^2 \zeta + i\omega_c \dot{\zeta}$.

2. L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle a pour discriminant $\delta = 2\omega_z^2 - \omega_c^2 < 0$ et les deux racines de cette équation caractéristique sont imaginaires pures, à savoir $r = i\,\omega_1$ et $r = i\,\omega_2$ avec $\omega_1 = \omega_c + \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}$ et $\omega_2 = \omega_c - \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}$; on en déduit $\zeta = \zeta_1 \exp(i\omega_1 t) + \zeta_2 \exp(i\omega_1 t)$ et les solutions x et y sont des combinaisons linéaires de solutions harmoniques de pulsations ω_1 et ω_2 avec $\omega_1 = 1{,}73.10^9 \text{rad.s}^{-1}$, $f_1 = 275\text{MHz}$; $\omega_2 = 2{,}8.10^7 \text{rad.s}^{-1}$ et $f_2 = 4{,}5\text{MHz}$.

B. Faisceau gaussien

1. a) On a immédiatement $I(z,\rho) = C^2(z)\exp\left(-2\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right)$. Le tracé de cette fonction gaussienne est classique.

On définit ici la largeur à mi-hauteur comme le *rayon* de la zone telle que $I(z, \rho)$ reste supérieur à la moitié de sa valeur maximale $C^2(z)$, soit $\Delta\rho_{1/2} = w(z)\sqrt{\frac{\ln 2}{2}}$.

b) Le flux total est donné par $\Phi_l = \int_0^\infty C^2(z)\exp\left(-2\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right)2\pi\rho d\rho$ qui se calcule aisément par le changement de variable $u = \rho^2$ soit $\Phi_l = \frac{\pi}{2}C^2(z)w^2(z)$. On pourra noter que la conservation de l'énergie impose que Φ_l reste indépendant de z.

c) La fraction demandée vaut $\phi = \frac{\int_0^{w^2}\exp\left(-2\frac{u}{w^2}\right)du}{\int_0^\infty \exp\left(-2\frac{u}{w^2}\right)du}$ soit $\phi = 1 - \exp(-2) = 0{,}87$. On pourra adopter pour w le nom de *rayon du faisceau* puisque 87% de l'énergie sont concentrées dans un cercle de rayon w.

L'éclairement demandé est soit l'*éclairement moyen* $\frac{\Phi_l}{\pi w^2} = 2{,}75\text{kW.m}^{-2}$, soit l'éclairement *local* à la distance ρ de l'axe $I = \frac{2\Phi_l}{\pi w^2}\exp\left(-2\frac{\rho^2}{w^2}\right)$ ou, numériquement, $I = 6{,}37\text{kW.m}^{-2}\exp\left(-2\rho^2_{\text{mesuré en mm}}\right)$.

2. a) On rappelle ici le principe de HUYGENS ET FRESNEL dans les conditions de la diffraction à l'infini (diffraction de FRAUNHOFER) : on peut considérer l'onde diffractée par une pupille plane comme une *somme cohérente* d'ondelettes émises par les différents éléments d'aire *dx dy* de la pupille diffractante. L'onde émise par l'élément d'aire *dx dy* est proportionnelle à cette aire et à l'amplitude de l'onde incidente. Enfin, ces ondelettes reconstruisent l'onde totale en *P* compte tenu de

leur différence de phase, due à la propagation du point $M(x, y)$ jusqu'en P. Cette phase, si on prend pour origine l'onde diffractée au voisinage de O, s'écrit :

$$\phi = -\frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{OM}\cdot\mathbf{u} = -\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y)$$

d'où les relations demandées, $u = \frac{\alpha}{\lambda}$ $v = \frac{\beta}{\lambda}$.

Le calcul demandé est immédiat, sous la forme :

$$\hat{t}(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right)\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\alpha x\right)dx \times \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{y^2}{w_0^2}\right)\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\beta y\right)dx$$

Les deux intégrales se calculent de la même façon ; on pose $x = \sqrt{\pi}\xi w_0$ puis $a = \frac{\sqrt{\pi}\alpha w_0}{\lambda}$ avec les notations de l'énoncé pour obtenir une répartition d'onde diffractée produit de deux gaussiennes :

$$\hat{t}(\alpha,\beta) = \pi w_0^2\exp\left(-\frac{\pi w_0^2}{\lambda^2}\alpha^2\right)\exp\left(-\frac{\pi w_0^2}{\lambda^2}\beta^2\right) = \pi w_0^2\exp\left(-\frac{\pi w_0^2}{\lambda^2}\left[\alpha^2+\beta^2\right]\right)$$

b) L'intensité de l'onde lumineuse est alors $I(\alpha,\beta) = \left|\hat{t}(\alpha,\beta)\right|^2$ soit, à une constante multiplicative près, $I(\alpha,\beta) = \pi^2 w_0^4\exp\left(-2\frac{\pi w_0^2}{\lambda^2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right)$. La demi-largeur à mi-hauteur est la valeur de α (ou β) pour laquelle cette intensité prend une valeur moitié de celle atteinte en $\alpha = 0$, à savoir $\frac{\Delta\theta_{1/2}}{2} = \frac{\lambda}{w_0}\sqrt{\frac{\ln 2}{2\pi}}$. On remarquera qu'un ordre de grandeur satisfaisant est obtenu en écrivant $\Delta\theta_{1/2} \cong 2\frac{\lambda}{w_0}$, conformément aux résultats usuels de la diffraction de Fraunhofer.

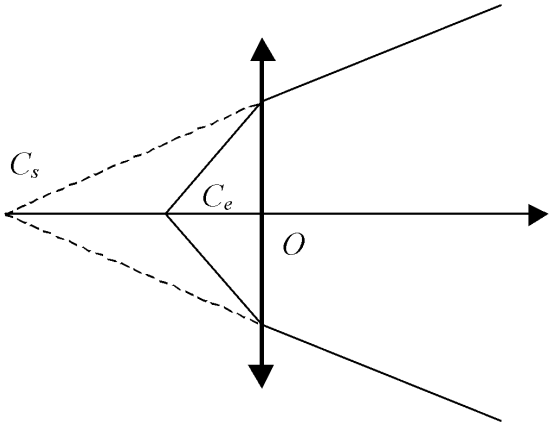
Numériquement, on trouve $\Delta\theta_{1/2} = 4{,}2.10^{-5}\text{rad} = 0{,}14'$ (minute d'arc).

3. **a)** Une onde sphérique divergente peut s'écrire $\underline{\psi}_s = \frac{\psi_0}{r}\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}r\right)$.

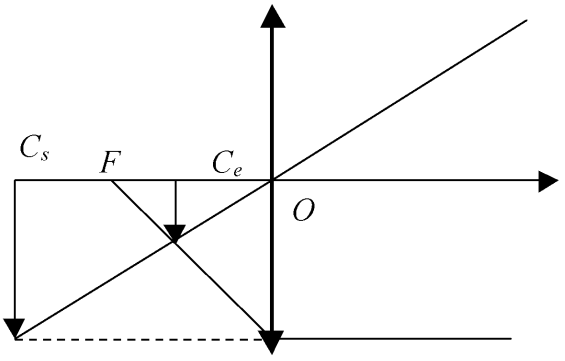
b) Le développement limité sera effectué pour $z > 0$ (onde divergente), ce qui permet d'écrire $r = \sqrt{z^2+\rho^2} \cong z\left(1+\frac{\rho^2}{2z^2}\right)$. Les variations du terme d'enveloppe $1/r$ étant beaucoup plus lentes que celles du terme de phase, nous écrirons donc l'onde sphérique $\underline{\psi}_s \cong \frac{\psi_0}{z}\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z\right)\exp\left(i\frac{\pi}{\lambda z}\rho^2\right)$.

c) Il faut et il suffit que C_s soit l'image de C_e soit $-\frac{1}{\overline{OC_e}} + \frac{1}{\overline{OC_s}} = \frac{1}{f} = -\frac{1}{\overline{OF}}$ où O est le centre optique de la lentille et Fs on foyer objet, puisque les questions posées par l'énoncé concernent la formation de l'image C_s de l'objet C_e.

Si on veut que les deux ondes soient divergentes dès leur passage par la lentille, il faut que C_e et C_s soient situés avant la lentille, donc que C_e soit situé entre F et O, comme sur le schéma ci-après. Notons toutefois qu'une onde convergente finit toujours, après passage par son point de convergence, par être divergente.
Enfin, l'onde de sortie est une onde plane si le centre de divergence à l'entrée est confondu avec le foyer objet C_e.



Remarquons que la donnée de C_e et C_s permet de déterminer, au moyen d'une construction auxiliaire, la position de F ; si C_e est entre F et O, C_s est situé avant F sur l'axe optique :

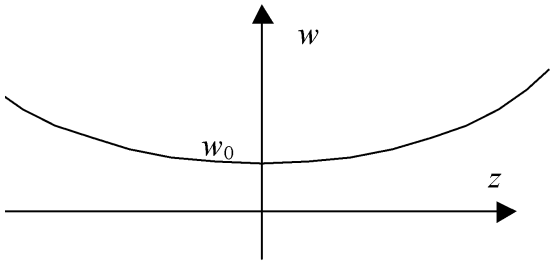


d) Ici, l'entrée et la sortie du système optique sont au même point et on aura $\overline{OC_e} = -OC_e = -R_e$ et $\overline{OC_s} = -OC_s = -R_s$ donc $-\frac{1}{-R_e} + \frac{1}{-R_s} = \frac{1}{f}$ donc encore $R_s = \frac{R_e}{1 - \frac{R_e}{f}}$, fonction homographique *abcd* avec $a = 1$, $b = 0$, $c = -1/f$ et $d = 1$.

4. a) On peut d'abord rappeler l'expression proposée en **3.a)** pour une onde sphérique ayant, au point considéré, un rayon de courbure R : $\underline{\psi}_s(\rho, z) = \frac{F(z)}{z} \exp\left(i\pi \frac{\rho^2}{\lambda} \frac{1}{R}\right)$
. Si on remplace dans cette expression $1/R$ par l'expression de $1/q$ proposée par

l'énoncé, on obtient $\underline{\psi}_g(\rho,z)=\frac{F(z)}{z}\exp\left(i\pi\frac{\rho^2}{\lambda}\frac{1}{R}\right)\exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2}\right)$ qui est bien une onde gaussienne.

On a immédiatement $w=w_0\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$ dont le tracé est classique :



b) Remarquons d'abord qu'on peu écrire $\zeta=\frac{z^2+z_R^2}{z_R}$ et $R=\frac{z^2+z_R^2}{z}$. On a alors immédiatement $q=\frac{R\zeta}{R^2+\zeta^2}(\zeta-iR)$ ou, après simplifications, $q=z-iz_R$, soit $K=z_R$.

c) Numériquement, $z_{Re}=\frac{\pi w_0^2}{\lambda}=1{,}24\text{m}$. L'application de la règle *abcd* doit se faire avec soin, les abscisses z (pour le faisceau d'entrée) et z' (pour le faisceau de sortie) étant comptées respectivement depuis les positions du waist en entrée (z_e) et en sortie (z_s) selon $q_e=(z-z_e)-iz_{Re}$ et $q_s=(z-z_s)-iz_{Rs}$ pour les rayons de courbure complexes des faisceaux gaussien d'entrée et de sortie. On écrira alors la règle *abcd* (relation de conjugaison), écrite seulement là où elle s'applique c'est-à-dire à la position ($z=0$) du centre optique de la lentille, par exemple sous la forme $\frac{1}{q_e}-\frac{1}{q_s}=\frac{1}{f}$ soit $\frac{1}{z_s+iz_{Rs}}=\frac{1}{z_e+iz_{Re}}+\frac{1}{f}$. On peut indifféremment l'écrire sous la forme homographique

$$-z_s-iz_{Rs}=\frac{-z_e-iz_{Re}}{1-\frac{-z_e-iz_{Re}}{f}}$$

soit encore $z_s+iz_{Rs}=f\frac{z_e+iz_{Re}}{f+z_e+iz_{Re}}=f\frac{(z_e+iz_{Re})(f+z_e-iz_{Re})}{(f+z_e)^2+z_{Re}^2}$. L'égalité des parties réelles de ces deux nombres complexes donne $z_s=f\frac{(f+z_e)z_e+z_{Re}^2}{(f+z_e)^2+z_{Re}^2}$ tandis que l'égalité des parties imaginaires permet d'écrire $z_{Rs}=z_{Re}\frac{f^2}{(f+z_e)^2+z_{Re}^2}$; cette relation sera utilisée plus bas.

d) Le rapport demandé peut s'écrire $\frac{w_{0s}}{w_{0e}} = \sqrt{\frac{z_{Rs}}{z_{Re}}}$ soit $\frac{w_{0s}}{w_{0e}} = \frac{f}{\sqrt{(f+z_e)^2 + z_{Re}^2}}$. Il suffit de prendre z_e = - 0,1m et f = 0,1m pour obtenir z_s = + 0,1m et $\frac{w_{0s}}{w_{0e}} = 0{,}08$.
La divergence du faisceau de sortie a été fortement réduite en plaçant le waist du faisceau d'entrée sur le foyer objet de la lentille, ce qui est conforme au rôle attendu du foyer objet de cette lentille convergente.

e) Au niveau de la lentille (z = 0), on a $R_e = -z_e\left(1+\frac{z_{Re}^2}{z_e^2}\right) = 15{,}5\text{m}$ > 0 pour un faisceau divergent ainsi que $R_s = -z_s\left(1+\frac{z_{Rs}^2}{z_s^2}\right) = -0{,}10\text{m}$ < 0 pour ce faisceau qui est convergent. Finalement, les abscisses des divers points considérés sont :

point	W_e	W_s	C_e	C_s
z	- 0,10m	+ 0,10m	-15,5m	+ 0,10m

W_e et W_s ne sont pas conjugués ; par contre, C_e (qui est *presque* à l'infini) admet *presque* pour conjugué C_s (qui est au foyer image de la lentille).
Ainsi, une onde qui semble diverger très peu en entrée va, après la lentille, converger au foyer image, comme dans le cadre des ondes sphériques : ce résultat est encore conforme au rôle attendu du foyer image d'une lentille.