

RUMUS-RUMUS MATEMATIKA

Oleh
Ade Maulana Yusup
Math Q&A

1. EKSPONEN

- $a^n = a \times a \times \dots \times a$ (n kali)
- $a^0 = 1$, $a \neq 0$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

2. ALGEBRA

- $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
- $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$
- $\sqrt{(a+b) \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

3. PERTIDAKSAMAAN

Sifat-Sifat Pertidaksamaan
Jika $a > b$

- $a \pm p > b \pm p$
- $ap > bp$, untuk p positif
- $ap < bp$, untuk p negatif (tanda berubah)

Jika $a > b > 0$

- $a^2 > b^2$
- $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Penyelesaian Pertidaksamaan

- Tentukan HP₁ dari syarat fungsi
- Nol kan ruas kanan
- Tentukan pembuat nol
- Tulis kedalam garis bilangan
- Lakukan uji titik pada selang batas-batas pembuat nol
- HP₂ berada pada :
 - Jika $f(x) > 0$
Berada pada selang positif
 - Jika $f(x) < 0$
Berada pada selang negatif
- HP = HP₁ $\cap$ HP₂

Bentuk Akar

$$\sqrt{a} > \sqrt{b}$$

- Syarat domain, $a \geq 0$ dan $b \geq 0$
- Kuadratkan kedua ruas
- HP = HP₁ $\cap$ HP₂

Harga Mutlak

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

- $|x| < a \leftrightarrow -a < x < a$
- $|x| > a \leftrightarrow x > a \cup x < -a$

Cara lain, dengan mengkuadratkan kedua ruas:

$$\begin{aligned} |x| &> |y| \\ x^2 &> y^2 \\ x^2 - y^2 &> 0 \\ (x+y)(x-y) &> 0 \end{aligned}$$

Pertidaksamaan Eksponen

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

Jika $a > 1$, maka $f(x) > g(x)$

Jika $0 < a < 1$, maka $f(x) < g(x)$

Pertidaksamaan Logaritma

$${}^a \log f(x) > {}^a \log g(x)$$

Jika $a > 1$, maka $f(x) > g(x)$

Jika $0 < a < 1$, maka $f(x) < g(x)$

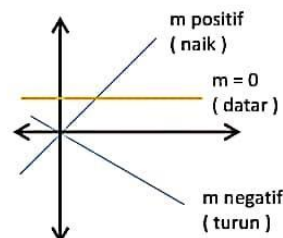
4. PERSAMAAN GARIS

Persamaan Garis

- $y = mx + c$
- $\frac{y_2 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
- $y - y_1 = m(x - x_1)$

Gradien (m)

Kemiringan suatu garis



- $y = mx + c$, gradien = m

- $Ax + By + c = 0$, $m = -\frac{A}{B}$

- Diketahui 2 titik, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

- Diketahui sudut, $m = \tan \alpha$

Hubungan Antar Garis

Garis $y = m_1 x + c_1$
 $y = m_2 x + c_2$

- Sejajar : $m_1 = m_2$
- Tegak Lurus : $m_1 m_2 = -1$
- Berpotongan : $\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$

Jarak Titik ke Garis

Jarak titik (x_1, y_1) ke garis $ax + by + c = 0$

$$d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

5. FUNGSI KUADRAT

Bentuk Umum

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Titik puncak/ekstrem/min./maks.

$$(x_p, y_p) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{D}{-4a} \right)$$

x_p = sumbu simetri ; x = absis

y_p = nilai ekstrim ; y = ordinat

Menentukan Pers. Fungsi Kuadrat

Diketahui:

- Tiga titik sembarang
 $y = ax^2 + bx + c$ (eliminasi)

2. Titik puncak

$$y - y_p = a(x - x_p)^2$$

3. Titik potong dengan sumbu x

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Hubungan a, b, c, dan D dengan Kurva

Nilai a

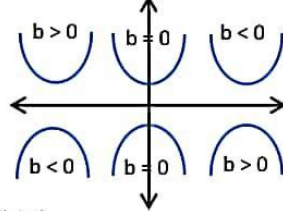


Terbuka ke atas
 $a > 0$



Terbuka ke bawah
 $a < 0$

Nilai b



Nilai c*

- ◆ $C > 0$ memotong sumbu y positif
 - ◆ $C < 0$ memotong sumbu y negatif
 - ◆ $C = 0$ memotong sumbu y di nol
- *ketika parabola memotong sumbu y, maka $x=0$, sehingga $y=c$

Nilai D

- ◆ $D > 0$ memotong sumbu x
- ◆ $D = 0$ menyinggung sumbu x
- ◆ $D < 0$ tidak memotong sumbu x

Note: Untuk mengetahui hubungan antara garis dengan parabola, substitusi persamaan garis kedalam parabola, tentukan nilai D.

Definite

Definite positif : $a > 0$ dan $D < 0$

Definite negatif : $a < 0$ dan $D < 0$

6. PERSAMAAN KUADRAT

Bentuk Umum

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

Akar-Akar Persamaan Kuadrat

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D \geq 0 : \text{Akar real}$$

$$D > 0 : \text{Akar real berbeda}$$

$$D = 0 : \text{Akar real kembar}$$

$$D < 0 : \text{Akar imajiner}$$

$$D = k^2 : \text{Akar rasional}$$

Operasi Akar-Akar

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 - x_2 = \pm \frac{\sqrt{D}}{a}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$

Sifat Akar-Akar

Dua Akar Positif

$$x_1 + x_2 > 0; x_1 x_2 > 0; D \geq 0$$

Dua Akar Negatif

$$x_1 + x_2 < 0; x_1 x_2 > 0; D \geq 0$$

Saling Berlawanan

$$x_1 x_2 < 0; D > 0$$

Saling Berkebalikan

$$x_1 x_2 = 1; D > 0$$

Persamaan Kuadrat Baru

Menyelesaikan PKB:

1. Misalkan akar-akar barunya p dan q
2. Tentukan p+q
3. Tentukan pq
4. Substitusi kedalam PKB

$$x^2 - (p + q)x + pq = 0$$

7. LINGKARAN

Persamaan Lingkaran

$$\text{Berpusat } (0,0) : x^2 + y^2 = r^2$$

$$\text{Berpusat } (a, b) : (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

$$\text{Umum : } x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$\text{Pusat} = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2} \right), R = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$$

Hubungan Garis dan Lingkaran

Substitusi pers. Garis ke lingkaran

$$\text{Berpotongan di 2 titik} : D > 0$$

$$\text{Bersinggungan} : D = 0$$

$$\text{Tidak berpotongan} : D < 0$$

Persamaan Garis Singgung

1. PGSL untuk $x^2 + y^2 = R^2$;

$$x_1 x + y_1 y = R^2$$

$$y = mx \pm R\sqrt{m^2 + 1}$$

2. PGSL untuk $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$;

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = R^2$$

$$y - b = m(x - a) \pm R\sqrt{m^2 + 1}$$

3. PGSL untuk $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

$$x_1 x + y_1 y + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + C = 0$$

Panjang Garis Singgung 2 Lingkaran

• Garis singgung luar

$$GL = \sqrt{l^2 - (R - r)^2}$$

• Garis singgung dalam

$$GD = \sqrt{l^2 - (R + r)^2}$$

8. LOGIKA MATEMATIKA

Tabel Kebenaran

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
B	B	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	S	S
S	B	B	B	S	B	S
S	S	B	S	S	B	B

Negasi

- $\sim (\text{semua}) = \text{beberapa}$
- $\sim (\text{beberapa}) = \text{semua}$
- $\sim (p \rightarrow q) = p \wedge \sim q$

Ekuivalensi

- $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p) \equiv (\sim p \vee q)$
- $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
- $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
- $\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

Konvers, Invers, dan Kontraposisi

Diketahui $p \rightarrow q$ (implikasi), maka

- $q \rightarrow p$: konvers
- $\sim p \rightarrow \sim q$: invers
- $\sim q \rightarrow \sim p$: kontraposisi

Penarikan Kesimpulan

1. Modus Ponens 2. Modus Tollen

$$p \rightarrow q$$

$$\frac{p}{\therefore q}$$

$$p \rightarrow q$$

$$\frac{\sim q}{\therefore \sim p}$$

3. Silogisme

$$p \rightarrow q$$

$$q \rightarrow r$$

$$\therefore p \rightarrow r$$

9. SUKU BANYAK

Bentuk Umum

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Note : n = derajat suku banyak

Pembagian Suku Banyak

$$f(x) = h(x) \cdot p(x) + s(x)$$

Note(s) : $f(x)$ = suku banyak

$h(x)$ = hasil bagi

$p(x)$ = pembagi

$s(x)$ = sisa

Teorema Sisa

- Jika suatu suku banyak $f(x)$ dibagi oleh $(x - k)$, maka sisanya adalah $f(k)$
- Jika pembagi berderajat n maka sisanya berderajat $n - 1$
- Jika suku banyak berderajat m dan pembagi berderajat n , maka hasil baginya berderajat $m - n$

Teorema Vieta

- Jumlah 1 akar ($x_1 + x_2 + \dots + x_n$) : $-\frac{b}{a}$
- Jumlah 2 akar ($x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots$) : $\frac{c}{a}$
- Jumlah 3 akar ($x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots$) : $-\frac{d}{a}$
- Selanjutnya ikuti pola

10. FUNGSI

Domain

Daerah asal dari suatu fungsi

- $f(x) = \sqrt{a}$ domain $a \geq 0$
- $f(x) = \frac{a}{b}$ domain $b \neq 0$
- $f(x) = {}^a \log b$ domain $a > 0, a \neq 1, b > 0$

Fungsi Invers

Invers $f(x)$ dinotasikan $f^{-1}(x)$

$$f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$$

- $f(x) = ax + b \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$
- $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$
- $f(x) = a^{bx+c} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{{}^a \log(x)-c}{b}$
- $f(x) = {}^a \log(bx+c) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{a^x - c}{b}$

Fungsi Komposisi

- $f \circ g(x) = f(g(x))$
- $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$
- $(f \circ g)^{-1}(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$
- $f^{-1} \circ f(x) = f \circ f^{-1}(x) = x$

11. LIMIT

Sifat Limit, jika fungsi memiliki limit

- $\lim_{x \rightarrow a} k = k$
- $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
- $\lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n$
- $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$

Limit Bentuk $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 8x - 9}{x^2 - 1} = \dots$$

• Metode Memfaktorkan

Memfaktorkan pembilang dan penyebut sehingga memiliki faktor yang sama

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+9)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+9}{x+1} \\ &= 5 \end{aligned}$$

• Metode L'Hospital

Mendiferensialkan pembilang dan penyebut hingga tak berbentuk tak tentu

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+8}{2x} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Limit Bentuk $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_1 x^m + a_2 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_1 x^n + b_2 x^{n-1} + \dots + b_n} =$$

Penyelesaian, jika :

- $m > n$, maka $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$
- $m = n$, maka $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_1}{b_1}$
- $m < n$, maka $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Limit Bentuk $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r}) = \dots$$

Penyelesaian, jika :

- $a > p$, maka $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = \infty$
- $a = p$, maka $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = \frac{b}{p}$
- $a < p$, maka $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = -\infty$

Limit Trigonometri

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$

Persamaan yang sering digunakan

- $1 - \cos A = 2 \sin^2 \left(\frac{A}{2} \right)$
- $1 - \cos^2 A = \sin^2 A$
- $\cos A = \frac{\sin A}{\tan A}$

12. STATISTIKA

Rata - Rata / Mean

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum x_i}{n} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \\ \bar{x} &= x_0 + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = x_0 + \left(\frac{\sum f_i c_i}{\sum f_i} \right) p \end{aligned}$$

Note : $\bar{x}$ = Rata - rata

x_s = Rata - rata sementara

x_0 = Tanda kelas

f = Frekuensi

d = Deviasi ($d_i = x_i - x_s$)

p = Panjang kelas

c = Sandi tanda kelas, $c = 0$ untuk

Modus

$$M_o = t_{mo} + \left(\frac{L_1}{L_1 + L_2} \right) p$$

Note : M_o = Modus

t_{mo} = Tepi bawah kelas modus

L_1 = f kelas modus - f kelas sebelum

L_2 = f kelas modus - f kelas sesudah

Median

$$M_e = t_{me} + \left(\frac{\frac{n}{2} - f_k}{f_{me}} \right) p$$

Note : M_e = Median

t_{me} = Tepi bawah kelas median

f_k = Frekuensi kumulatif

sebelum kelas median

f_{me} = Frekuensi kelas median

Quartil

$$Q_i = t_q + \left(\frac{\frac{i}{4}n - f_k}{f_q} \right) p$$

Note : Q_i = Quartilke - i

t_q = Tepi bawah kelas quartil

f_q = Frekuensi kelas quartil

Untuk Desil : $\frac{i}{10}n$

Persentil : $\frac{i}{100}n$

Ukuran Penyebaran

- Jangkauan

$$J = x_{\text{besar}} - x_{\text{kecil}}$$

- Ragam

$$R = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

- Simpangan Baku

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

- Simpangan Rata-Rata

$$S_R = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

- Simpangan Quartil

$$Q_d = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$$

13. PELUANG

Kombinatorik

Jika suatu masalah diselesaikan dengan m cara dan masalah lain dengan n cara, maka gabungannya dapat diselesaikan dengan **m x n** cara.

Contoh : ada 2 baju dan 3 celana, banyaknya cara berpakaian yang mungkin, $2 \times 3 = 6$ cara

Permutasi

Susunan elemen dalam urutan tanpa ada pengulangan elemen.

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n \quad \text{dan} \quad 0! = 1$$

- Permutasi n elemen dari n elemen

$$P_n^n = n!$$

- Permutasi r elemen dari n elemen

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- Permutasi dari elemen yang sama

$$P_{(k,l,m)}^n = \frac{n!}{k!l!m!}$$

- Permutasi Siklis

$$P_S^n = (n-1)!$$

Kombinasi

Susunan dari semua/bagian elemen dari suatu himpunan yang tidak mementingkan urutan.

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Penyebaran Binomial, pola bilangan segitiga pascal

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n a^{n-k} b^k$$

Frekuensi Harapan

$$F(A) = n \cdot P(A)$$

14. BARISAN DAN DERET

Deret Aritmatika

$$b = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \dots = U_n - U_{n-1}$$

$$b = \frac{U_n - U_p}{n - p}$$

$$U_n = a + (n-1)b$$

$$U_n = U_p + (n-p)b$$

$$U_n = S_n - S_{n-1}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n) = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$

$$U_t = \frac{a + U_n}{2}$$

Deret Geometri

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \dots = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

$$r = \frac{n-p}{p} \sqrt{\frac{U_n}{U_p}}$$

$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$

$$U_n = U_p \cdot r^{n-p}$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$U_t = \sqrt{a \cdot U_n}$$

Deret Geometri Tak Hingga

1. Divergen

$$r \leq -1 \cup r \geq 1$$

Jumlah deret ini tidak bisa ditentukan

2. Konvergen

$$-1 < r < 1$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

- Deret Tak Hingga Ganjil

$$U_1 + U_3 + U_5 + \dots = \frac{a}{1-r^2}$$

- Deret Tak Hingga Genap

$$U_2 + U_4 + U_6 + \dots = \frac{ar}{1-r^2}$$

15. MATEMATIKA KEUANGAN

Bunga

1. Bunga Tunggal

$$I = M \times i \times n$$

I = Bunga yang diperoleh

M = Modal awal

i = Persentase bunga

n = Jangka waktu

2. Bunga Majemuk

$$M_n = M(1+i)^n$$

M_n = Modal setelah dibungakan

M = Modal awal

i = Persentase bunga

n = Jangka waktu

Anuitas

- Anuitas A = Anuitas

M = Pinjaman

i = Bunga

n = Periode pinjaman

- Angsuran a_n = Angsuran ke-n

a_1 = Angsuran pertama

i = Bunga

n = Periode pinjaman

- Sisa

S_n = Sisa pembayaran

b = Bunga periode

i = Bunga

16. LOGARITMA

$$a^c = b$$

$${}^a \log b = c, a > 0, a \neq 0, b > 0$$

Sifat - Sifat Logaritma

$$1. {}^a \log a = 1$$

$$2. {}^a \log bc = {}^a \log b + {}^a \log c$$

$$3. {}^a \log \frac{b}{c} = {}^a \log b - {}^a \log c$$

$$4. {}^a \log b^m = \frac{m}{n} {}^a \log b$$

$$5. {}^a \log b = \frac{1}{{}^b \log a}$$

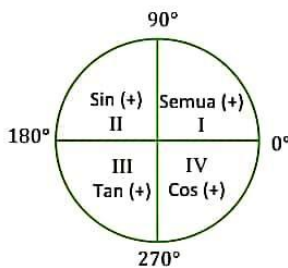
$$6. {}^a \log b = \frac{{}^c \log b}{{}^c \log a}$$

$$7. {}^a \log b = b$$

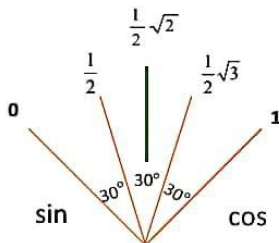
$$8. {}^a b^{\log c} = c^{{}^b \log a}$$

$$9. {}^a \log b \cdot {}^b \log c = {}^a \log c$$

17. TRIGONOMETRI



Sudut Istimewa



Setiap garis jingga membentuk sudut kelipatan 30° , dan garis hijau kelipatan 45° . Contoh:

1. $\sin 60^\circ = \dots$ Pada gambar, sin terletak di sebelah kiri. Maka hitunglah 60° dari sebela kiri, sehingga diperoleh $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

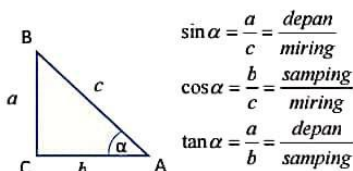


2. $\cos 150^\circ = \dots$ Pada gambar, cos terletak di sebelah kanan. Maka hitunglah 150° dari sebela kanan, sehingga diperoleh $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (-, kuadran 2)



- $\sin x = \sin \alpha$
 $x = \alpha \pm k \cdot 360^\circ$
 $x = (180 - \alpha) \pm k \cdot 360^\circ$
- $\cos x = \cos \alpha$
 $x = \alpha \pm k \cdot 360^\circ$
 $x = -\alpha \pm k \cdot 360^\circ$
- $\tan x = \tan \alpha$
 $x = \alpha \pm k \cdot 180^\circ$

Aturan Segitiga Siku-Siku



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{depan}}{\text{miring}}$$

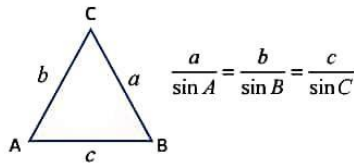
$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{samping}}{\text{miring}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{depan}}{\text{samping}}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

Aturan sinus



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Aturan cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

Luas segitiga

$$\text{Luas} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$\text{Luas} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{dengan } s = \frac{a+b+c}{2}$$

Jumlah dan Selisih Dua Sudut

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

Sudut Kembar

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= 2 \cos^2 A - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 A$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

Jumlah dan Selisih Fungsi

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

Perkalian

$$2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$2 \cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

$$2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

$$-2 \sin A \sin B = \cos(A+B) - \cos(A-B)$$

Sudut Paruh

$$\sin \frac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\cos \frac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$\tan \frac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

$$\tan \frac{1}{2} A = \frac{1 - \cos A}{\sin A}$$

$$\tan \frac{1}{2} A = \frac{\sin A}{1 + \cos A}$$

Untuk menentukan + (positif) atau - (negatif), lihatlah dikuadran berapa sudut tersebut berada

Persamaan Trigonometri

$$a \sin x + b \cos x = R \sin(x + \alpha)$$

$$a \cos x + b \sin x = R \cos(x - \alpha)$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{dengan, } \tan \alpha = \frac{b}{a}$$

18. VEKTOR

Vektor Posisi

Vektor posisi adalah suatu vektor dengan titik pangkal 0.

$A(x, y, z)$, vektor posisi A adalah $\vec{a}$

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = xi + yj + zk = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Vektor Satuan

$\hat{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ Vektor satuan adalah suatu vektor yang panjangnya satu

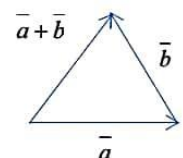
Panjang Vektor

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos \alpha}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos \alpha}$$

Operasi Vektor



Jika arah vektor berlawanan, vektor bernilai negatif dari vektor sebelumnya

$$\begin{aligned} \bullet \bar{a} \pm \bar{b} &= \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a \pm x_b \\ y_a \pm y_b \\ z_a \pm z_b \end{pmatrix} \\ \bullet \bar{a} \cdot \bar{b} &= |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos \alpha \\ \bullet \bar{a} \cdot \bar{b} &= x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b \end{aligned}$$

Proyeksi Ortogonal

Proyeksi $\bar{a}$ pada $\bar{b}$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Panjang Proyeksi : } |\bar{a}_b| &= \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} \\ \bullet \text{ Proyeksi Vektor : } \bar{a}_b &= \left(\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \right) \cdot \bar{b} \end{aligned}$$

19. TURUNAN

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Rumus - Rumus Dasar

NO	$f(x)$	$f'(x)$
1	k	0
2	ax^n	$an \cdot x^{n-1}$
3	$af'(x)$	$af'(x)$
4	$f(u)$	$f'(u) \cdot u'$
5	$u \pm v$	$u' \pm v'$
6	uv	$u'v + uv'$
7	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Rumus - Rumus Turunan

NO	$f(x)$	$f'(x)$
1	e^x	e^x
2	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
3	$a \log x$	$\left(a \log e \right) \frac{1}{x}$
4	$\sin x$	$\cos x$
5	$\cos x$	$-\sin x$
6	$\tan x$	$\sec^2 x$
7	$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
8	$\cos^{-1} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
9	$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Chain Rule

$$y = f(u) \quad u = u(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \frac{du}{dx}$$

Contoh :

Jika $y = \sin(x^2 + 3)$, tentukan $\frac{dy}{dx}$!

Misalkan $u = 2x + 3$ sehingga, $\frac{du}{dx} = 2x$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \cos(u) \cdot 2x \\ &= 2x \cos(x^2 + 3) \end{aligned}$$

Aplikasi Turunan

- Gradien kurva pada titik (a, b)
 $m = f'(a)$
- Fungsi turun : $f'(x) < 0$
- Fungsi naik : $f'(x) > 0$
- Maks : $f'(x) = 0; f''(x) < 0$
- Min : $f'(x) = 0; f''(x) > 0$
- Titik belok : $f''(x) = 0$

20. INTEGRAL

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$F(x)$ disebut anti turunan (integral) dari $f(x)$

Integral Fungsi Aljabar

$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C, n \neq -1$$

Sifat Linear Integral

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Integral Tentu

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Sifat - Sifat Integral Tentu

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx, a < b < c$$

Rumus - Rumus Integral

NO	$f(x)$	$F(x)$
1	k	kx
2	$\frac{1}{x}$	$\ln x $
3	e^{ax}	$\frac{1}{a} e^{ax}$
4	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
5	$\tan x$	$-\ln \cos x $
6	$\cot x$	$\ln \sin x $
7	$\sec^2 x$	$\tan x$
8	$\csc^2 x$	$-\cot x$
9	$\tan x \sec x$	$\sec x$
10	$\cot x \csc x$	$-\csc x$

Integral Parsial

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Integral Substitusi

$$\int f(g(x))g'(x) dx$$

misalkan,

$$u = g(x)$$

$$du = g'(x) dx$$

Sehingga

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$$

Menentukan Luas Daerah

$$L = \int_a^b (y_{atas} - y_{bawah}) dx$$

$$L = \int_a^b (x_{kanan} - x_{kiri}) dy$$

Menentukan Volume

$$V_x = \pi \int_a^b (y_{atas}^2 - y_{bawah}^2) dx$$

$$V_y = \pi \int_a^b (x_{kanan}^2 - x_{kiri}^2) dy$$

21. MATRIKS

Ordo Matriks

Ordo matriks $m \times n$
(jumlah baris x jumlah kolom)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{Ordo } 2 \times 4$$

Operasi Matriks

$$1. \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \pm p & b \pm q \\ c \pm r & d \pm s \end{bmatrix}$$

$$2. k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

$$3. \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix}$$

Syarat perkalian matriks, jumlah kolom matriks 1 = jumlah baris matriks 2

Matriks ordo 2x3 . Matriks ordo 3x4 menghasilkan matriks ordo 2x4

Determinan Matriks

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \det(M) = |M| = ad - bc$$

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \rightarrow \det(M) = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

Sifat Determinan Matriks

- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det(kA) = k^n \cdot \det(A)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^k) = (\det(A))^k$

Matriks Transpos

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \rightarrow M^T = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

Invers Matriks

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \text{adj}(M)$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Persamaan Matriks

$$A \cdot B = C$$

$$A = C \cdot B^{-1}$$

$$B = A^{-1} \cdot C$$

22. TRANSFORMASI GEOMETRI

Translasi

$$T = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Rotasi

Pusat rotasi (a, b) sebesar α berlawanan arah jarum jam. **Bila searah jarum jam, maka α bernilai negatif**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Refleksi

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Terhadap sumbu x : $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- Terhadap sumbu y : $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Terhadap $y = x$: $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Terhadap $y = -x$: $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

• Terhadap $y = mx + c$; $\tan \alpha = m$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y-c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}$$

Jika α sulit didapatkan, gunakan persamaan:

$$\sin 2\alpha = \frac{2m}{1+m^2} ; \cos 2\alpha = \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

- Terhadap $x = c$: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c-x \\ y \end{bmatrix}$
- Terhadap $y = c$: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2c-y \end{bmatrix}$

Dilatasi

Pusat Dilatasi (a, b)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Buku Kumpulan Rumus Matematika untuk SMA sederajat ini belum sempurna. Kritik dan saran bisa dikirimkan melalui kontak yang tertera pada cover. Jangan lupa gabung bersama kami di Math Q&A !

