

Αυτόματος ποτιστής

Ο κεντρικός περιστρεφόμενος σωλήνας ενός αυτόματου ποτιστή, έχει μήκος $l = 10\text{cm}$, μάζα $m = 200\text{g}$ και καταλήγει σε δύο μικρά ακροφύσια, αμελητέου μήκους. Η διάμετρος του σωλήνα τροφοδοσίας όπως και του περιστρεφόμενου, είναι $\delta_1 = 2\text{cm}$, ενώ των δυο ακροφυσίων $\delta_2 = 0,5\text{cm}$. Τα ακροφύσια σχηματίζουν ίσες γωνίες $\theta = 30^\circ$, με τη διεύθυνση του σωλήνα και εκτοξεύουν το νερό οριζόντια. Ο σωλήνας μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές περί κατακόρυφο άξονα που περνάει από το μέσον του Κ και η ροπή



αδράνειάς του ως προς αυτόν τον άξονα είναι $I = \frac{1}{12}ml^2$. Κάποια στιγμή ανοίγουμε την παροχή και το νερό εισέρχεται στο μέσον του σωλήνα με ταχύτητα $v_1 = 2\text{m/s}$.

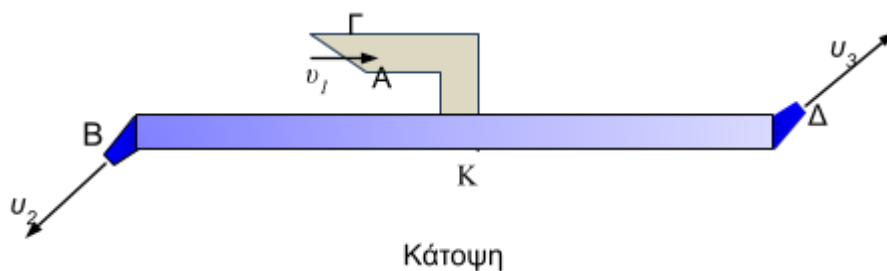
Η ροή θεωρείται στρωτή και μόνιμη και το νερό ιδανικό ρευστό.

- α) Με ποιες ταχύτητες εξέρχεται το νερό από τα ακροφύσια;
 - β) Εξηγήστε γιατί ο σωλήνας επιταχύνεται γωνιακά.
 - γ) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σωλήνα ως προς το Κ και η γωνιακή του επιτάχυνση;
 - δ) Υπολογίστε τη γωνιακή επιτάχυνση του σωλήνα.
 - ε) Αν η απόσταση των ακροφυσίων από το έδαφος είναι $h = 0,4\text{m}$, ποιο θα είναι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου που θα «καλύψει» ο ποτιστής;
- Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$, οι τριβές αμελητέες και ότι η μάζα του περιεχομένου στο σωλήνα νερού, είναι πολύ μικρή σε σχέση με τη μάζα του σωλήνα.

Απάντηση

- α) Ας σχεδιάσουμε μια κάτοψη του ποτιστή, όπως στο σχήμα 1.

σχήμα 1



Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli στην οριζόντια ρευματική γραμμή ΑΒ.

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli στην οριζόντια ρευματική γραμμή ΓΔ.

$$p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_3^2 \quad (2)$$

Επειδή $p_A = p_\Gamma$ οι εξισώσεις (1), (2) δίνουν

$$p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_3^2 \Leftrightarrow v_2 = v_3$$

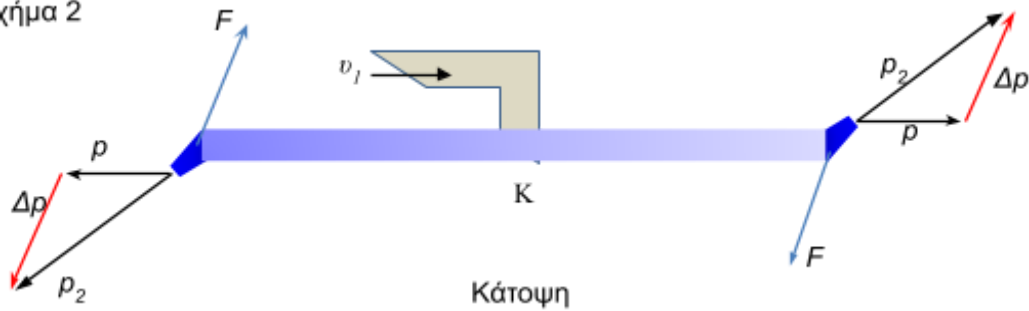
Εφαρμόζουμε την εξίσωση συνέχειας και λόγω της ισότητας των διατομών των ακροφυσίων έχουμε:

$$A_1 \cdot v_1 = 2 \cdot A_2 \cdot v_2 \Leftrightarrow \pi \cdot \frac{\delta_1^2}{4} \cdot v_1 = 2 \cdot \frac{\delta_2^2}{4} \cdot v_2 \Leftrightarrow v_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta_1^2}{\delta_2^2} \cdot v_1$$

$$\Leftrightarrow v_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{0,5} \right)^2 \cdot 2 \Leftrightarrow v_2 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 2 \Leftrightarrow v_2 = 16 \text{ m/s}$$

β)

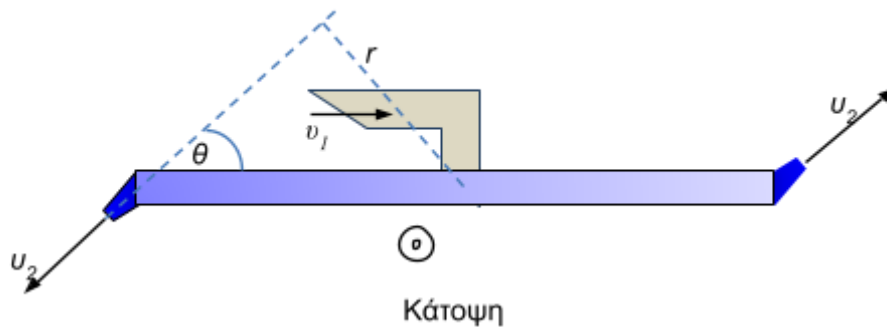
σχήμα 2



Μια στοιχειώδης μάζα νερού εξερχόμενη από το κάθε ακροφύσιο (σχήμα 2), μεταβάλλει την ορμή της και κατά μέτρο - αφού αυξάνεται το μέτρο της ταχύτητας σε σχέση με τον κεντρικό σωλήνα - και κατά διεύθυνση - αφού βγαίνει με γωνία $\theta = 30^\circ$ σε σχέση με τον κεντρικό σωλήνα. Για να μεταβληθεί η ορμή απαιτείται δύναμη, την οποία ασκούν στη μάζα νερού τα τοιχώματα του κεντρικού σωλήνα. Σύμφωνα με τον 3ο νόμο Newton ο σωλήνας θα δέχεται την αντίδραση, η οποία δε διέρχεται από τον άξονα περιστροφής και δημιουργεί ροπή, ως προς αυτόν. Λαμβάνοντας υπόψη και το άλλο ακροφύσιο, λόγω συμμετρίας, οι δυνάμεις θα έχουν ίδιο μέτρο F και θα σχηματίζουν ζεύγος, του οποίου η ροπή προσδίδει γωνιακή επιτάχυνση στο σωλήνα.

γ) Θεωρούμε μια στοιχειώδη μάζα νερού dm που εξέρχεται με ταχύτητα μέτρου v_2 από το ένα ακροφύσιο.

σχήμα 3



Δεδομένου ότι καθώς κινείται στον κεντρικό σωλήνα η στροφορμή της ως προς το Κ είναι μηδέν, η μεταβολή της στροφορμής της ως προς το Κ θα έχει αλγεβρική τιμή

$dL_l = dm \cdot v_2 \cdot r$, όπου $r = \frac{l}{2} \cdot \eta \mu \theta$ δηλαδή $dL_l = dm \cdot v_2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \eta \mu \theta$, θεωρώντας θετική τη φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη.

Επειδή το ίδιο συμβαίνει και στο άλλο ακροφύσιο, η μεταβολή της στροφορμής του εξερχόμενου νερού θα είναι:

$$dL = 2 \cdot dL_l \Leftrightarrow dL_v = dm \cdot v_2 \cdot l \cdot \eta \mu \theta$$

και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής θα είναι

$$\frac{dL_v}{dt} = \frac{dm \cdot v_2 \cdot l \cdot \eta \mu \theta}{dt} \Leftrightarrow \frac{dL_v}{dt} = \rho \cdot \frac{dV}{dt} \cdot v_2 \cdot l \cdot \eta \mu \theta \Leftrightarrow \frac{dL_v}{dt} = \rho \cdot \Pi \cdot v_2 \cdot l \cdot \eta \mu \theta \quad (1)$$

$$\Pi = A_2 \cdot v_2 = \pi \cdot \frac{\delta_2^2}{4} \cdot v_2 = \pi \cdot \frac{0,25 \cdot 10^{-4}}{4} \cdot 16 = \pi \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 / \text{s}$$

Η παροχή είναι

Με αντικατάσταση παίρνουμε

$$\frac{dL_v}{dt} = 10^3 \cdot \pi \cdot 10^{-4} \cdot 16 \cdot 0,1 \cdot \frac{l}{2} = 8\pi \cdot 10^{-2} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$$

δ) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του νερού που υπολογίσαμε ισούται με τη ροπή ζεύγους που δέχεται το νερό από τις δυνάμεις που του ασκούν τα τοιχώματα του σωλήνα. Σύμφωνα με το αξίωμα δράσης - αντίδρασης, ο σωλήνας θα δέχεται αντίθετη ροπή ίδιου

$$\text{μέτρου, δηλαδή } |\Sigma \tau_{\text{σωλ}}| = 8\pi \cdot 10^{-2} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$$

$$I = \frac{1}{12} m l^2 = \frac{1}{12} \cdot 0,2 \cdot 0,01 = \frac{1}{6} \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

Η ροπή αδράνειας του συστήματος θα είναι

Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης

$$|\Sigma \tau_{\text{σωλ}}| = I \cdot |\alpha_{\gamma \omega \nu}| \Leftrightarrow 8\pi \cdot 10^{-2} = \frac{1}{6} \cdot 10^{-3} \cdot |\alpha_{\gamma \omega \nu}| \Leftrightarrow |\alpha_{\gamma \omega \nu}| = 480\pi \text{ rad} / \text{s}^2$$

ε) Το νερό βγαίνοντας από τον ποτιστή εκτελεί οριζόντια βολή.

Το βεληνεκές της βολής θα είναι

$$s = v_2 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 16 \cdot \sqrt{\frac{0,8}{10}} = 16 \cdot \sqrt{0,08} = 16 \cdot 0,2\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ m}$$

Αυτό σημαίνει κάλυψη ενός κυκλικού δίσκου εμβαδού

$$A_\chi = \pi \cdot s^2 = \pi \cdot 64 \cdot 2 = 128\pi \text{ m}^2$$

Σχόλιο

Θεωρήσαμε αμελητέες τις τριβές. Κάτι τέτοιο φυσικά δεν ισχύει. Ακόμα και αν το νερό ήταν ιδανικό ρευστό, υπάρχουν τριβές στον άξονα περιστροφής και με τον αέρα. Το αποτέλεσμα είναι ο περιστρεφόμενος σωλήνας να αποκτήσει γρήγορα μια τελική - οριακή - γωνιακή ταχύτητα την οποία κρατάει σταθερή όσο δεν υπάρχει κάποια αλλαγή στην παροχή ή στις τριβές.

Τα ακροφύσια σε έναν ποτιστή δεν εκτοξεύουν το νερό οριζόντια. Έχουν κλίση προς τα πάνω ώστε η βολή να είναι πλάγια και να πετυχαίνουν μεγαλύτερο βεληνεκές.

Ανδρέας Ριζόπουλος

