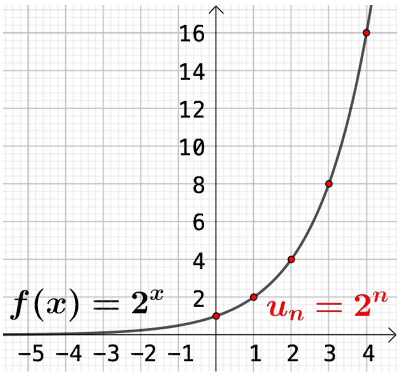
Chapitre 02
Fonctions exponentielles et logarithmes

I. Fonctions exponentielles de base a
1. Définition et propriétés

On considère la suite géométrique de raison $a > 0$ définie par $u_n = a^n$. Elle est définie pour tout entier naturel n. En prolongeant son ensemble de définition pour tout réel, on définit la **fonction exponentielle de base a**.

C'est la seule fonction continue sur R qui vérifie les deux conditions suivantes



- $\forall n \in N,\ f(n) = u_n = a^n$
- $\forall x, y \in R,\ f(x + y) = f(x) \times f(y)$

On note alors $f(x) = a^x$ et $f(y) = a^y$. La dernière égalité peut ainsi s'écrire

$$a^{x+y} = a^x \times a^y$$

Exemple

Pour une suite géométrique de raison $a = 2$ et de premier terme 1, $u_4 = 2^4$.

Pour la fonction correspondante, $f(4) = 2^4$ mais on note également

$$f(1,3) = 2^{1,3}$$

Et de façon générale, $f(x) = 2^x$ pour tout réel x positif.

La fonction f est appelée **fonction exponentielle de base 2**.

Remarque

Par définition, soit x un réel et n un entier,

$a^0 = 1$ $a^1 = a$ $\left(a^x\right)^n = a^{nx}$

Propriétés

Soient x et y deux réels.

■ $a^x \neq 0$ ■ $a^x > 0$ ■ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ ■ $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

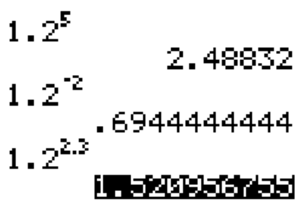
Preuve

Soient x et y deux réels.

- $a^x \times a^{-x} = a^{x-x} = a^0 = 1$
  Si a^x était nul, alors $a^x \times a^{-x}$ serait égal à 0 donc $a^x \neq 0$
- Par ailleurs, $a^0 = 1 > 0$ donc **la fonction exponentielle est (strictement) positive** car sinon, par continuité, la fonction exponentielle s'annulerait au moins une fois donc $a^x > 0$
- L'égalité précédente $a^x \times a^{-x} = 1$ permet d'affirmer directement que $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $a^{x-y} = a^x \times a^{-y} = a^x \times \frac{1}{a^y} = \frac{a^x}{a^y}$

Exemple

La fonction exponentielle de base 1,2 est définie sur R par $x \longmapsto 1,2^x$.



Remarque

Avec la calculatrice, il est possible de calculer des valeurs d'une fonction exponentielle.

Méthode

Simplifier une expression

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/PHTOZid0kzM**
Simplifier les expressions suivantes.

$A = 4^{-3} \times 4^{-5}$ $B = \frac{3^3 \times 3^{-2,5}}{9^5}$ $C = \left(4,8^{-2,1}\right)^3 \times 4,8^{6,2}$

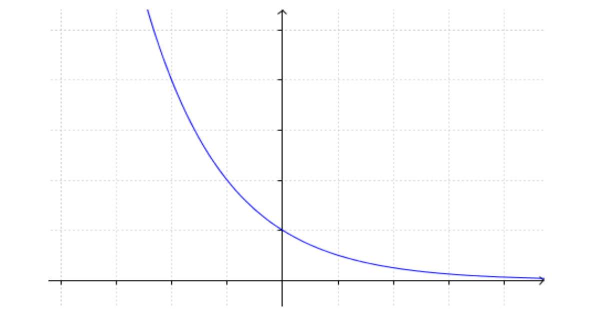
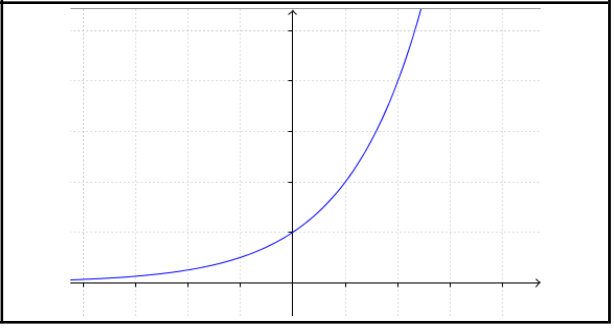
Solution

$A = 4^{-3} \times 4^{-5} = 4^{-3+(-5)} = 4^{-8}$ $B = \frac{3^3 \times 3^{-2,5}}{9^5} = \frac{3^3 \times 3^{-2,5}}{(3^2)^5} = \frac{3^{3-2,5}}{3^{2\times5}} = \frac{3^{0,5}}{3^{10}} = 3^{0,5-10} = 3^{-9,5} = \frac{1}{3^{9,5}}$

$C = \left(4,8^{-2,1}\right)^3 \times 4,8^{6,2} = 4,8^{-2,1\times3} \times 4,8^{6,2} = 4,8^{-6,3} \times 4,8^{6,2} = 4,8^{-6,3+6,2} = 4,8^{-0,1} = \frac{1}{4,8^{0,1}}$

2. Variations de la fonction exponentielle

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/YQoR7CFM_1U**

$0 < a < 1$	$a > 1$
$x \longmapsto a^x$ est **décroissante** sur R	$x \longmapsto a^x$ est **croissante** sur R
	

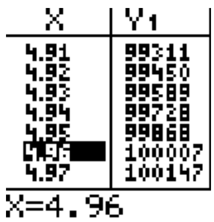
Remarques

- On retrouve les résultats établis pour la variation des suites géométriques.
- Si $a = 1$ alors la fonction exponentielle est **constante**. En effet, dans ce cas, $a^x = 1^x = 1$
- Quel que soit le réel $a > 0$, la courbe de la fonction exponentielle passe par le point $(0; 1)$. En effet, $a^0 = 1$

Méthode
Utiliser une fonction exponentielle
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/maK64g-y3gA**
Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0; 10]$ par

$$f(x) = 50\,000 \times 1,15^x$$

1. À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
2. Déterminer les variations de f sur $[0 ; 10]$.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a doublé ?
Solution



1. $f(3) = 50\,000 \times 1,15^3 \approx 76\,000$
$f(5,5) = 50\,000 \times 1,15^{5,5} \approx 108\,000$
2. $a = 1,15 > 1$ donc la fonction $x \longmapsto 1,15^x$ est strictement croissante sur $[0 ; 10]$. Il en est de même pour la fonction f.
3. Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100 000 bactéries, soit au bout d'environ 5h.

3. Taux d'évolution moyen

Méthode
Calculer un taux d'évolution moyen
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/8ocIhl-SFuQ**
Entre 2012 et 2015, le prix du gaz a augmenté de 25 %. Calculer le taux d'évolution moyen annuel.
Solution
On note t le taux d'évolution moyen annuel ($t > 0$). Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation **sur un an** est égal à $1 + t$. Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation **sur**

trois ans (de 2012 à 2015) est égal à $(1+t)^3$. Or, sur trois années, le prix a augmenté de 25 % donc ce coefficient multiplicateur est également égal à 1, 25. Ainsi,

$$(1+t)^3 = 1,25 \Leftrightarrow 1+t = 1,25^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow t = 1,25^{\frac{1}{3}} - 1 \approx 0,0772$$

Le taux d'évolution moyen annuel est environ égal **7,72%**.

Remarque
Si a désigne un nombre positif,

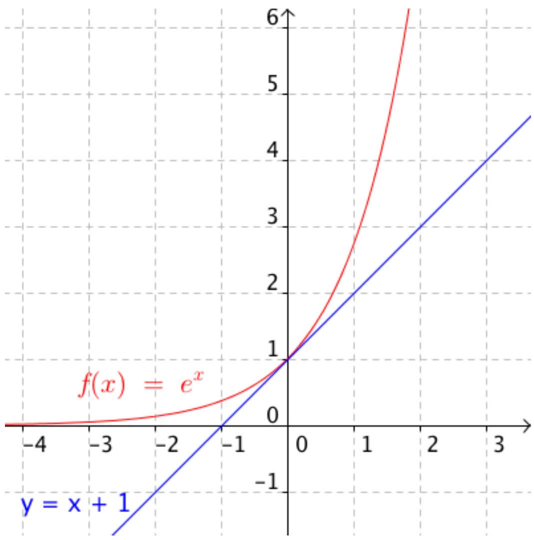
$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$$

$a^{\frac{1}{n}}$ est appelé la **racine énième** de a. On peut également noté $\sqrt[n]{a}$.

$$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$$

II. Fonction exponentielle de base e

1. Définition



Propriété
Soit $a>0$, parmi toutes les fonctions exponentielles de base a, il en existe une seule dont la tangente à la courbe représentative au point (0 ; 1) a pour coefficient directeur 1.

Définition
Cette fonction est la **fonction exponentielle de base *e***, notée **exp**, telle que pour tout réel x,

$$\exp exp\,(x) = e^x$$

Le réel e est environ égal à 2,718.

Remarques

- Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e.

```
e^1
        2.718281828
```

- Il est également possible d'observer l'allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle.
- La fonction exponentielle est croissante ($e>1$). Sa croissance est très rapide, ainsi e^7 dépasse 1000, e^{14} dépasse le million et e^{21} dépasse le milliard.

Propriété
La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Valeurs particulières à connaître
$e^0 = 1$ $e^1 = e$

2. Étude de la fonction exponentielle

Dérivabilité

Propriété
La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$(x) = \exp exp\,(x) = e^x$$

Limites aux bornes
On a constaté précédemment que la fonction exponentielle renvoie des valeurs de plus en plus grandes pourvu que x devienne de plus en plus grand. On dit dans ce cas, que la limite de x en $+\infty$ est égale à $+\infty$ et on note

$$e^x = +\infty$$

On cherche à conjecturer de même la limite de la fonction exponentielle en $-\infty$. Calculons quelques valeurs de la fonction exponentielle pour des valeurs de x de plus en plus petites.

$e^{-5} \approx 0,0067$ $e^{-20} \approx 2,061 \times 10^{-9}$ $e^{-100} \approx 3,72 \times 10^{-44}$

On constate que la fonction exponentielle prend des valeurs de plus en plus proches de 0 pourvu que x devienne de plus en plus petit. On dit dans ce cas, que la limite de x en $-\infty$ est égale à 0 et on note

$$e^{x} = 0$$

Propriété

$e^{x} = +\infty$ $e^{x} = 0$

Variations

Propriété

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En effet, soit $x \in R$, $(x) = \exp exp\,(x) = e^{x} > 0$

Méthode

Dériver une fonction exponentielle

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/XcMePHk6Ilk**

Dériver les fonctions suivantes.

$a.\ f(x) = 4x - 3e^{x}$ $b.\ g(x) = (x - 1)e^{x}$ $c.\ h(x) = \frac{e^{x}}{x}$

Solution

a. $f'(x) = 4 - 3e^{x}$

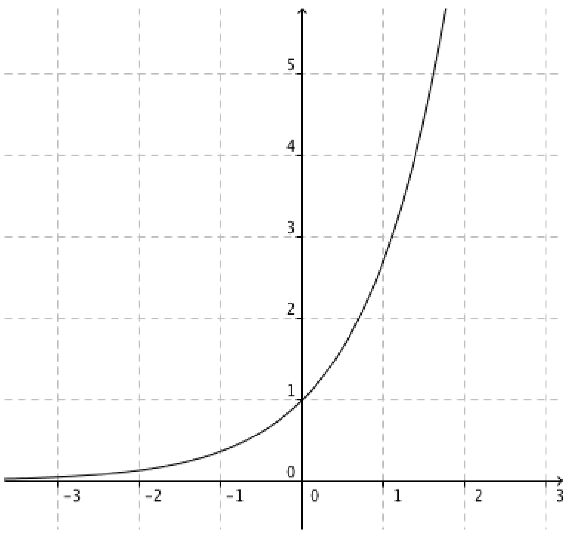
b. $g'(x) = 1 \times e^{x} + (x - 1)e^{x} = e^{x} + xe^{x} - e^{x} = xe^{x}$

$c.\ h'(x) = \frac{e^{x} \times x - e^{x} \times 1}{x^{2}} = \frac{e^{x}(x-1)}{x^{2}}$

Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction exponentielle.

x	$-\infty$ $+\infty$
$exp'(x)$	$+$
exp	$0 \nearrow +\infty$



3. Propriétés de la fonction exponentielle

Comme π, le nombre *e* est un nombre irrationnel, c'est à dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique. Ses premières décimales sont

e ≈ 2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995 9574966967 6277240766 3035354759 4571382178 5251664274…

Le nombre *e* est également un nombre **transcendant**. On dit qu'un nombre est transcendant s'il n'est solution d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers.

Le nombre $\sqrt{2}$ par exemple, est irrationnel mais n'est pas transcendant puisqu'il est solution de l'équation $x^{2} = 2$. Un tel nombre est dit **algébrique**.

Le premier à s'intéresser de façon sérieuse au nombre *e* est le mathématicien suisse ***Leonhard Euler*** **(**1707 − 1783**)**, ci-dessus. C'est à lui que nous devons le nom de ce nombre. Non pas qu'il s'agisse de l'initiale de son nom mais peut être car *e* est la première lettre du mot exponentiel. Dans « *Introductio in Analysin infinitorum* » publié en 1748, *Euler* explique que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

Rappelons que par exemple 5! se lit « **factorielle 5** » et est égal à 1×2×3×4×5. Par cette formule, il obtient une estimation de e avec 18 décimales exactes. Nous devons aussi à Euler la démonstration de l'irrationalité de e.

Propriétés

Soient x et y des réels,

■ $e^{x+y} = e^x e^y$ ■ $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ ■ $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ ■ $\left(e^x\right)^n = e^{nx}$, $n \in N$

Méthode

Simplifier les écritures

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/qDFjeFyA_OY**

Simplifier l'écriture des nombres suivants.

$A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$ $B = \left(e^5\right)^{-6} \times e^{-3}$ $C = \frac{1}{\left(e^{-3}\right)^2} + \frac{\left(e^4\right)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$ $D = \frac{\left(e^{2x}\right)^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}}$

Solution

$A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} = \frac{e^{7-4}}{e^{-5}} = \frac{e^3}{e^{-5}} = e^{3-(-5)} = e^8$

$B = \left(e^5\right)^{-6} \times e^{-3} = e^{5\times(-6)} \times e^{-3} = e^{-30} \times e^{-3} = e^{-30-3} = e^{-33}$

$C = \frac{1}{\left(e^{-3}\right)^2} + \frac{\left(e^4\right)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} = \frac{1}{e^{-3\times2}} + \frac{e^{4\times(-1)}}{e^{2-6}} = \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{-4}} = e^6 + 1$

$D = \frac{\left(e^{2x}\right)^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}} = \frac{e^{2x\times3}}{e^{3x+1-x-1}} = \frac{e^{6x}}{e^{2x}} = e^{6x-2x} = e^{4x}$

Propriétés

Soient a et b des réels,

■ $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ ■ $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Méthode

Résoudre une équation ou une inéquation

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/d28Fb-zBe4Y**

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x^2} = 0$

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$

Solution

a. $e^{x^2-3} - e^{-2x^2} = 0$

$\Leftrightarrow e^{x^2-3} = e^{-2x^2} \Leftrightarrow x^2 - 3 = -2x^2$

Donc $x = -1$ ou $x = 1$

$S = \{-1 ; 1\}$

b. $e^{4x-1} \geq 1$

$\Leftrightarrow e^{4x-1} \geq e^0$

$\Leftrightarrow 4x - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$

$S = [\frac{1}{4} ; +\infty[$

Méthode

Étudier une fonction exponentielle

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/_MA1aW8ldjo**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^x$

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

c. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

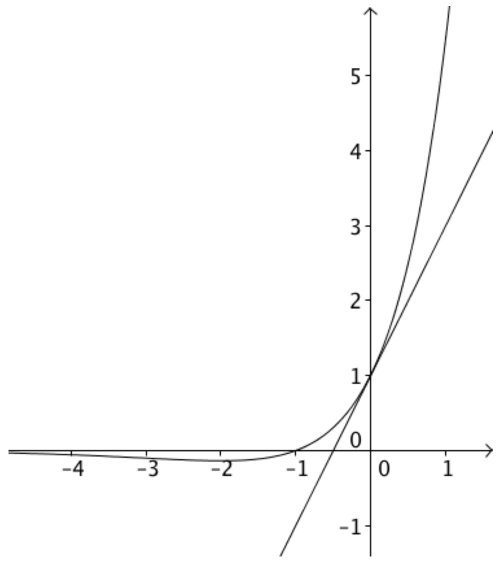
d. Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice.

Solution

a. $f'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$

b. Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x + 2$.
f' est donc négative sur l'intervalle $]-\infty\,;\ -2]$ et positive sur l'intervalle $[-2\,;\ +\infty[$.
f est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\ -2]$ et croissante sur l'intervalle $[-2\,;\ +\infty[$.
On dresse le tableau de variations.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
f	0	$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$



c. $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$
Une équation de la tangente à la courbe en 0 est donc

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

Soit

$$y = 2x + 1$$

d. On trace la courbe représentative de la fonction f en s'aidant d'un tableau de valeurs.

x	-4	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	$-0,05$	$-0,1$	$-0,14$	0	1	$5{,}44$

4. Fonctions de la forme $x \longmapsto e^{kx}$

Variations

Propriété
La fonction $x \longmapsto e^{kx}$, avec $k \in R$, est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est la fonction $x \longmapsto ke^{kx}$

Démonstration
On rappelle que la dérivée d'une fonction composée $x \longmapsto f(ax + b)$ est $x \longmapsto af'(ax + b)$.

En considérant $f(x) = e^x$, $a = k$ et $b = 0$, on a $\left(e^{kx}\right)' = ke^{kx}$

Exemple
Soit $f(x) = e^{-4x}$ alors $f'(x) = -4e^{-4x}$

Propriété
Si $k > 0$: la fonction $x \longmapsto e^{kx}$ est croissante.
Si $k < 0$: la fonction $x \longmapsto e^{kx}$ est décroissante.

Démonstration
On a $\left(e^{kx}\right)' = ke^{kx}$
Or, $e^{kx} > 0$ pour tout réel x et tout réel k. Donc le signe de la dérivée $x \longmapsto ke^{kx}$ dépend du signe de k.
Si $k > 0$ alors la dérivée est positive et donc la fonction $x \longmapsto e^{kx}$ est croissante.
Si $k < 0$ alors la dérivée est négative et donc la fonction $x \longmapsto e^{kx}$ est décroissante.

Méthode
Étudier les variations d'une fonction composée
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-3x}$
a. Calculer la dérivée de la fonction f.
b. En déduire les variations de la fonction f.
Solution
a. Soit x un réel, $\left(e^{-3x}\right)' = -3e^{-3x}$ donc
$f'(x) = 1 \times e^{-3x} + x \times \left(-3e^{-3x}\right) = (1 - 3x)e^{-3x}$

b. Soit x un réel, $e^{-3x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - 3x$ qui est positif si $x \leq \frac{1}{3}$

f' est donc positive sur l'intervalle $]-\infty\,;\frac{1}{3}]$ et négative sur l'intervalle $[\frac{1}{3}\,;\ +\infty[$.

f est donc croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\frac{1}{3}]$ et décroissante sur l'intervalle $[\frac{1}{3}\,;\ +\infty[$.

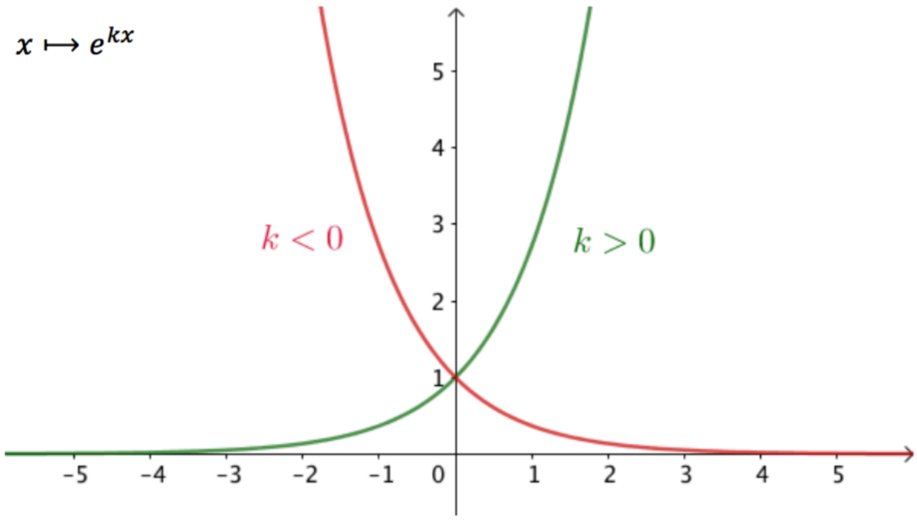
Limites

Propriétés

Si $k > 0$, $e^{kx} = +\infty$ et $e^{kx} = 0$

Si $k < 0$, $e^{kx} = 0$ et $e^{kx} = +\infty$

Représentation graphique



Méthode

Étudier une fonction $x \longmapsto e^{kx}$ dans une situation concrète

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/lsLQwiB9Nrg**

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0\,;10]$ par $f'(t) = 0,14f(t)$

1. Montrer que la fonction f définie sur $[0\,;10]$ par $f(t) = Ae^{0,14t}$ convient.

2. On suppose que $f(0) = 50\,000$. Déterminer A.

3. Déterminer les variations de f sur $[0\,;10]$.

4. a. À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a-t-il doublé. Arrondir à l'heure près.

Solution

1. Soit $t \in [0; 10]$, $f'(t) = A \times 0,14e^{0,14t} = 0,14 \times Ae^{0,14t} = 0,14f(t)$

La fonction f définie sur $[0\,;10]$ par $f(t) = Ae^{0,14t}$ vérifie bien l'égalité $f'(t) = 0,14f(t)$ donc elle convient.

2. $f(0) = Ae^{0,14\times 0} = Ae^{0} = A = 50\,000$

Une expression de la fonction f est donc, pour $t \in [0; 10]$, $f(t) = 50\,000e^{0,14t}$

3. Comme $k = 0,14 > 0$, on en déduit que la fonction $x \longmapsto e^{0,14t}$ est strictement croissante sur $[0\,;10]$. Il en est de même pour la fonction f.

4. a. $f(3) = 50\,000e^{0,14\times 3} = 50\,000e^{0,42} \approx 76\,000$

Après 3h, l'organisme contient environ 76 000 bactéries.

$f(5,5) = 50\,000e^{0,14\times 5,5} = 50\,000e^{0,77} \approx 108\,000$

Après 5h30, l'organisme contient environ 108 000 bactéries.

b. Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100 000 bactéries, soit au bout de 5h environ.

X	Y1
4.89	99149
4.9	99288
4.91	99427
4.92	99566
4.93	99706
4.94	99845
4.95	99985
4.96	100125
4.97	100266
4.98	100406
4.99	100547

Propriété
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de R, la fonction e^{u} **est dérivable sur I** et sa dérivée vaut $u^{'} \times e^{u}$

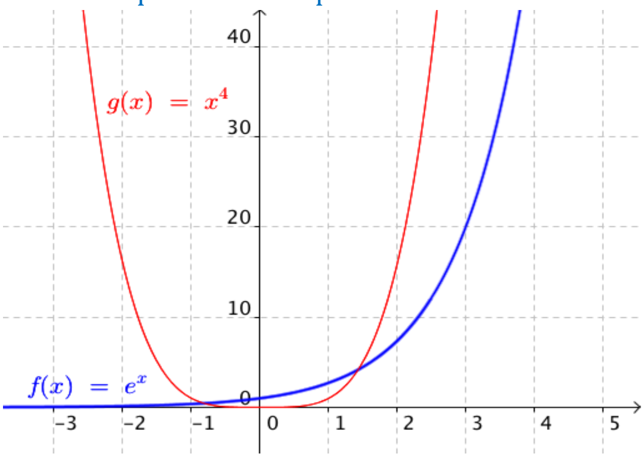
Par exemple, la dérivée de la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ définie sur R est la fonction $x \longmapsto -2xe^{-x^2}$

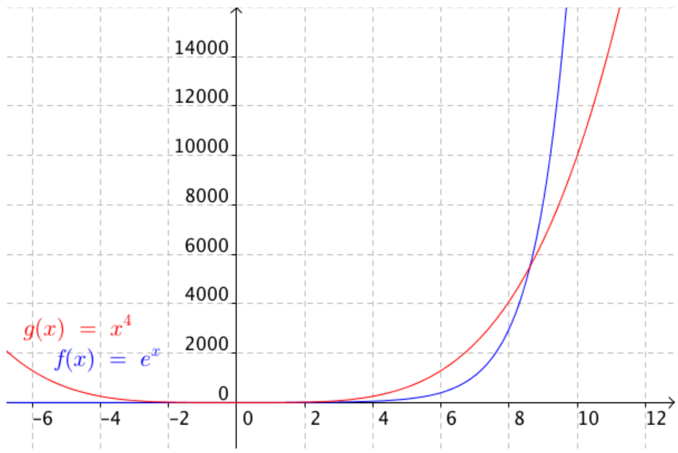
5. Croissance comparée des fonctions exponentielles et puissances

Propriétés (croissances comparées)
Pour tout entier n, $\frac{e^{x}}{x^{n}} \quad =+\infty$ *et* $e^{-x} \quad = 0$

Remarque
Dans le cas de limites infinies, la fonction exponentielle impose sa limite devant les fonctions puissances. Sa croissance est plus rapide.

Exemple
Comparaison de la fonction exponentielle et de la fonction $x \longmapsto x^{4}$ dans différentes fenêtres graphiques.
Dans la fenêtre de gauche, on pourrait croire que la fonction puissance a une croissance plus rapide que la fonction exponentielle. En élargissant la fenêtre graphique, on constate que pour x suffisamment grand, la fonction exponentielle dépasse la fonction $x \longmapsto x^{4}$.





Méthode
Calculer une limite par croissance comparée
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/LARFj4z8aok**
Déterminer les limites suivantes.
$\left(\frac{e^{x}}{x^{2}}\right)$ b. $\left(\frac{x^{3}}{e^{x}}\right)$ c. $\left(x^{2}e^{-x} + \frac{1}{e^{2x}}\right)$

Solution
a. Par croissance comparée,
$\left(\frac{e^{x}}{x^{2}}\right) \quad =+\infty$

b. Soit x un réel, $\frac{x^{3}}{e^{x}} = x^{3}e^{-x}$

Par croissance comparée, $\left(x^{3}e^{-x}\right) \quad = 0$ *donc* $\left(\frac{x^{3}}{e^{x}}\right) \quad = 0$

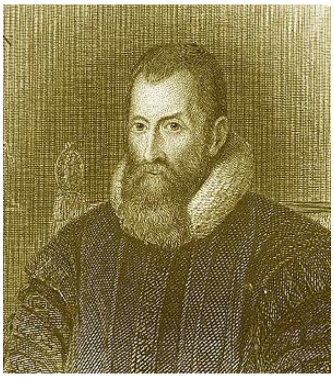
c. Par croissance comparée, $\left(x^{2}e^{-x}\right) \quad = 0$
De plus, $e^{2x} \quad =+\infty$. Donc

$$\left(\frac{1}{e^{2x}}\right) \quad = 0$$

comme fonction inverse d'une fonction qui tend vers $+\infty$. Donc,

$$\left(x^{2}e^{-x} + \frac{1}{e^{2x}}\right) \quad = 0 + 0 = 0$$

comme somme de fonctions qui tendent vers 0.



En 1614, un mathématicien écossais, *John Napier* $(1550 - 1617)$ ci-contre, plus connu sous le nom francisé de *Neper* publie « Mirifici logarithmorum canonis descriptio ». Dans cet ouvrage, qui est la finalité d'un travail de 20 ans, *Neper* présente un outil permettant de simplifier les calculs opératoires : le logarithme.
Neper construit le mot à partir des mots grecs « logos » (logique) et arithmos (nombre). Toutefois cet outil ne trouvera son essor qu'après la mort de Neper.
Les mathématiciens anglais *Henri Briggs* $(1561 - 1630)$ et *William Oughtred* ($1574 - 1660)$ reprennent et prolongent les travaux de Neper.
Les mathématiciens de l'époque établissent alors des tables de logarithmes de plus en plus précises. L'intérêt d'établir ces tables logarithmiques est de permettre de substituer une multiplication par une addition (paragraphe II). Ceci peut paraître dérisoire aujourd'hui, mais il faut comprendre qu'à cette époque, les calculatrices n'existent évidemment pas, les nombres décimaux ne sont pas d'usage courant et les opérations posées telles que nous les utilisons ne sont pas encore connues. Et pourtant l'astronomie, la navigation ou le commerce demandent d'effectuer des opérations de plus en plus complexes.

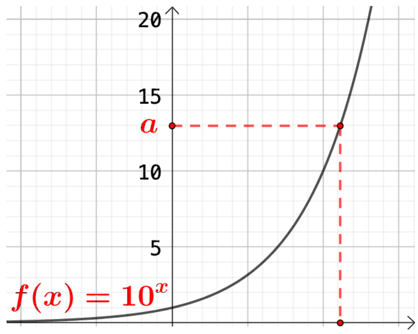
III. Fonction logarithme décimal

1. Définition

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 10^x$

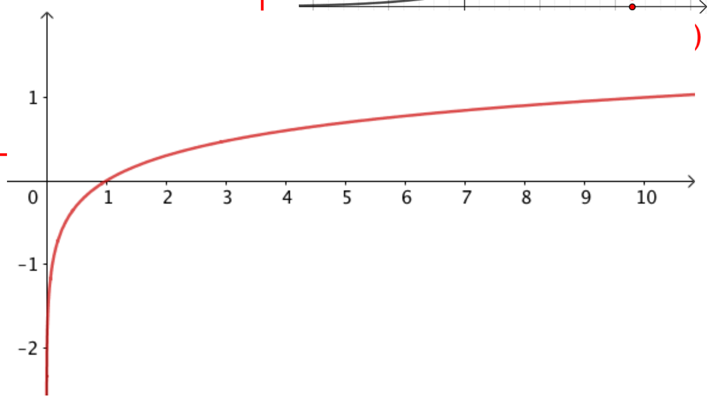
L'équation $10^x = b$, avec $b > 0$, admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. Cette solution se note $\log log\ b$.

Définition
On appelle **logarithme décimal** d'un réel strictement positif b, l'unique solution de l'équation $10^x = b$. On la note $\log log\ b$.
La **fonction logarithme décimal**, notée **log**, est la fonction
$\log log\ :\ ]0\ ;\ +\infty[\longrightarrow R\ \ x \longmapsto \log log\ x$



Conséquences
Soit x un réel,
- $\forall b \in R_+,\ 10^x = b \Leftrightarrow x = \log log\ b$
- $\log log\ 10^x = x$
- $\forall x \in R_+,\ 10^{\log log\ x} = x$

)



2. Sens de variation

Propriété
La fonction logarithme décimal $x \longmapsto \log log\ x$ est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$

Valeurs particulières

- $\log log\ 1 = 0$ ■ $\log log\ 10 = 1$ ■ $\log log\ \frac{1}{10}$

3. Propriétés de la fonction logarithme décimal

Méthode
Simplifier une expression contenant des logarithmes
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/qdYQQlbz-AQ**
Simplifier les expressions suivantes.
$A = \log log\ (2 - \sqrt{2}) + \log log\ (2 + \sqrt{2})$
$B = 2 \log log\ 3 + \log log\ 2 - 4$
$C = \log log\ 10^3 - \log log\ \frac{1}{5}$

Solution

Pour $a > 0$ et $b > 0$,
$\log log\ a + \log log\ b = \log log$

$A = \log log\left(2 - \sqrt{2}\right) + \log log\left(2 + \sqrt{2}\right)$
$A = \log log\left(\left(2 - \sqrt{2}\right) \times \left(2 + \sqrt{2}\right)\right)$
$A = \log log\ (4 - 2)\ 2$

Pour $a > 0$ et n entier naturel,
$\log log\ a^n = n \log log\ a$

$B = 2 \log log\ 3 + \log log\ 2 - 4 \log log\ 3$
$B = \log log\ 3^2 + \log log\ 2 - \log log\left(3^4\right)$

Pour $a > 0$ et $b > 0$,
$\log log\ a - \log log\ b = \log log$

$B = \log log\ (3^2 \times 2) - \log log\left(3^4\right)$
$B = \log log\left(\frac{3^2 \times 2}{3^4}\right)$
$B = \log log\left(\frac{2}{9}\right)$

Pour $b > 0$,
$\log log\ \frac{1}{b} = - \log log\ b$

$C = \log log\ 10^3 + \log log\left(\frac{1}{5}\right)$
$C = \log log\ 10^3 - \log log\ 5$
$C = 3 \log log\ 10 - \log log\ 5$
$C = 3 \times 1 - \log log\ 5$
$C = 3 - \log log\ 5$

x	$log(x)$
1	0
2	0,3010
3	0,4771
…	
34	1,5315
35	1,5441
36	1,5563
…	
62	1,7924
…	
2231	3,3485
2232	3,3487
2233	3,3489
…	

Remarque

La première formule permet de transformer un produit en somme. Ainsi, celui qui aurait à effectuer 36 x 62, appliquerait cette formule, soit

$log(36 \times 62) = log(36) + log(62) \approx 1,5563 + 1,7924$ (voir table ci-contre)

L'addition étant beaucoup plus simple à effectuer que la multiplication, on trouve facilement

$$log(36 \times 62) \approx 3,3487$$

En cherchant dans la table, le logarithme égal à 3,3487, on trouve 2232, soit

$$36 \times 62 = 2232$$

4. Équations et inéquations

Méthode

Résoudre une équation ou une inéquation

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/WD2J0woQom0**
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/scxbiV4VEak**

1. Résoudre dans R l'équation $6^x = 2$

2. Résoudre dans $]0 ; + \infty[$ l'équation $x^5 < 3$

3. 8 augmentations successives de t% correspondent à une augmentation globale de 30%. Donner une valeur approchée du taux moyen t.

Solution

1.

$\log log\ a = \log log\ b \Leftrightarrow$

$6^x = 2$

$\log log\ 6^{x} = \log log\ 2$

$x \log log\ 6 = \log log\ 2$

$x = \frac{\log log\ 2}{\log log\ 6}$

$\boxed{a < b \Leftrightarrow \log log\ a < \text{lo}}$

2. $x^{5} < 3$

$\log log\ (x^{5}) < \log log\ 3$

$\boxed{\log log\ a < \log log\ b \Leftrightarrow}$

$5 \log log\ x < \log log\ 3$

$\log log\ x < \frac{1}{5} \log log\ 3$

$\log log\ x < \log log\ 3^{\frac{1}{5}}$

$x < 3^{\frac{1}{5}}$

L'ensemble solution est $]0\ ;\ 3^{\frac{1}{5}}[$

Remarque

$3^{\frac{1}{5}}$ se lit « racine cinquième de 3 » et peut se noter $\sqrt[5]{3}$.

3. Le problème revient à résoudre dans $]0\ ;\ +\infty[$ l'équation $(1+t)^{8} = 1,3 \log log\ (1+t)^{8} = \log log\ 1,3$

$(1+t) = \log log\ 1,3$

$\log log\ (1+t) = \frac{1}{8} \log log\ 1,3$

$\log log\ (1+t) = \log log\ \left(1,3^{\frac{1}{8}}\right)$ On retrouve la propriété des fonctions exponentielles « Si alors »

$1 + t = 1,3^{\frac{1}{8}}$

$t = 1,3^{\frac{1}{8}} - 1$

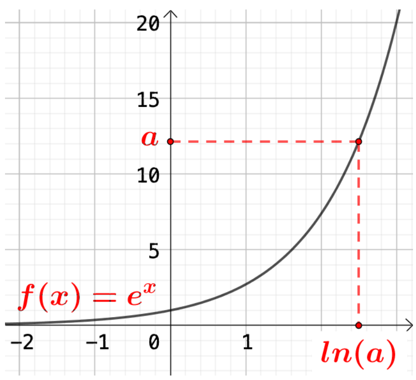
$t \approx 0,033 \approx \frac{3,3}{100}$

Une augmentation globale de 30 % correspond à 8 augmentations successives d'environ 3,3 %.

IV. Fonction logarithme népérien

1. Définition

Pour tout réel a de $]0\ ;\ +\infty[$ l'équation $e^{x} = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.



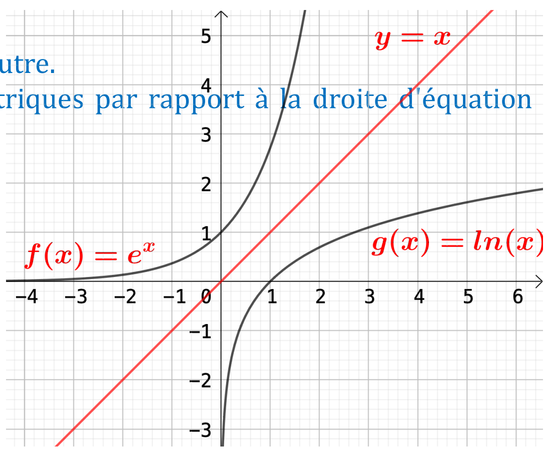
Définition

On appelle **logarithme népérien** d'un réel strictement positif a, l'unique solution de l'équation $e^{x} = a$. On la note $\ln ln\ a$. La **fonction logarithme népérien**, notée **ln**, est la fonction

$\ln ln : \ ]0\ ;\ +\infty[\longrightarrow R \quad x \longmapsto \ln ln\ x$

Remarques

- Les fonctions exp et ln sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.
- Les courbes représentatives des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$



Conséquences

■ $\forall x \in R_{+},\ y = \ln ln\ x \Leftrightarrow x = e^{y}$

■ $\ln ln\ 1 = 0$ ■ $\ln ln\ e = 1$ ■ $\ln ln\ \frac{1}{e} = -1$

■ $\ln ln\ e^{x} = x$

■ $\forall x \in R_+$, $e^{\ln ln\, x} = x$

2. Propriétés de la fonction logarithme népérien

Théorème
Soient a et b des réels strictement positifs,
$\ln ln\,(a\times b) = \ln ln\, a + \ln ln\, b$

Démonstration
$e^{\ln ln\,(a\times b)} = a\times b = e^{\ln ln\, a} \times e^{\ln ln\, b} = e^{\ln ln\, a + \ln ln\, b}$
Donc $\ln ln\,(a\times b) = \ln ln\, a + \ln ln\, b$

Corollaires
Soient a et b des réels strictement positifs,
■ $\ln ln\, \frac{1}{a} = -\ln ln\, a$ ■ $\ln ln\, \frac{a}{b} = \ln ln\, a - \ln ln\, b$ ■ $\ln ln\, \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln ln$

Méthode
Simplifier une expression contenant des logarithmes
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/HGrK77-SCl4**
Simplifier les expressions suivantes.
$A = \ln ln\,\left(3-\sqrt{5}\right) + \ln ln\,\left(3+\sqrt{5}\right)$ $B = 3\ln ln\, 2 + \ln ln\, 5 - 2\ln ln\, 3$ $C = \ln ln\, e^2 - \ln ln\,\left(\frac{2}{e}\right)$

Solution
$A = \ln ln\,\left(3-\sqrt{5}\right) + \ln ln\,\left(3+\sqrt{5}\right)$ $B = 3\ln ln\, 2 + \ln ln\, 5 - 2\ln ln\, 3$ $C = \ln ln\, e^2 - \ln ln\,\left(\frac{2}{e}\right)$ $A = \ln ln\,\left(3-\sqrt{\right.$

3. Équations et inéquations

Propriétés
Soient a et b des réels strictement positifs,
■ $\ln ln\, a = \ln ln\, b \Leftrightarrow a = b$ ■ $\ln ln\, a < \ln ln\, b \Leftrightarrow a < b$

Méthode
Résoudre une équation ou une inéquation avec des logarithmes
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/lCT-8ijhZiE**
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/_fpPphstjYw**
Résoudre dans I les équations et inéquations suivantes.

Intervalle I	$R_+^* =]0\,;\,+\infty[$	R	$R_+^* =]0\,;\,+\infty[$	$]\frac{1}{6}\,;\,+\infty[$	R
(In)équation	$\ln ln\, x = 2$	$e^{x+1} = 5$	$3\ln ln\, x - 4 = 8$	$\ln ln\,(6x-1) \geq 2$	$e^x + 5 > 4e^x$

Solution

$\ln ln\, x = 2\ln$ $S = \{e^2\}$	$e^{x+1} = 5 e^{x+1} = e^{\ln ln}$ $S = \{\ln ln\, 5 - 1\}$	$3\ln ln\, x - 4 = 8\ 3\ln$ $S = \{e^4\}$	$\ln ln\,(6x-1) \geq 2\ \ln l$ $S = [\frac{e^2+1}{6}; +\infty[$	$e^x + 5 > 4e^x$ $e^x - 4e^x > -5$ $-3e^x > -5$ $e^x < \frac{5}{3}$ $e^x < e^{\left(\frac{5}{3}\right)}$ $x < \ln ln\, \frac{5}{3}$ $S =]-\infty; \ln ln\, \frac{5}{3}[$

4. Étude de la fonction logarithme népérien

Dérivabilité

Propriété
La fonction **logarithme népérien** est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sa dérivée est la **fonction inverse** sur $]0\ ;\ +\infty[$.

$$(\ln ln\, x)' = \frac{1}{x}$$

Exemple
Dériver la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ *par* $f(x) = \frac{\ln ln\, x}{x}$

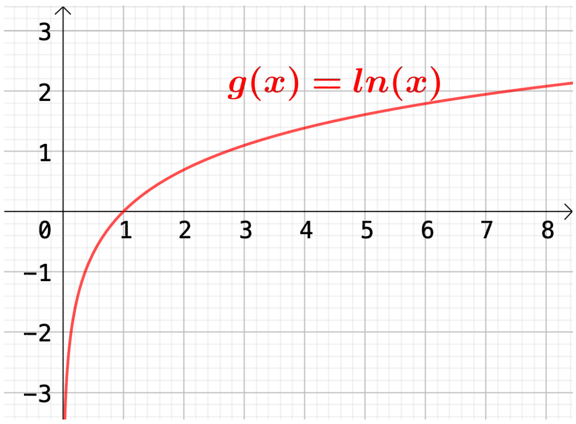
Solution
Soit $x \in]0\ ;\ +\infty[,\ f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln ln\, x \times 1}{x^2} = \frac{1-\ln ln\, x}{x^2}$

Variations
Propriété
La fonction **logarithme népérien** est **strictement croissante** sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Démonstration
$\forall x \in R_+^*, \frac{1}{x} > 0$

On dresse le tableau de variations de la fonction logarithme népérien.

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$+$
$f = ln$	$-\infty \nearrow +\infty$



Limites aux bornes
Propriété
$\ln ln\, x =+\infty \quad \ln ln\, x =-\infty$

Courbe représentative
Valeurs particulières
$\ln ln\, 1 = 0$
$\ln ln\, e = 1$

5. Études de fonctions contenant des logarithmes
Méthode
Étudier les variations d'une fonction
Déterminer les variations de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 3 - x + 2\ln ln\, x$

Solution
$\forall x \in R_+^*, f'(x) = -1 + \frac{2}{x} = \frac{2-x}{x}$

$x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2 - x$. La fonction f est donc **strictement croissante sur** $]0\,;2]$ et **strictement décroissante sur** $[2;+\infty[$. On dresse le tableau de variations.

$$f(2) = 3 - 2 + 2\ln ln\, 2 = 1 + 2\ln ln\, 2$$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$1+2\,ln(2)$	$\searrow$	$-\infty$

Méthode

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/0hQnOs_hcss**

Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation $y = x$

Solution

On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x - \ln ln\, x$

$$\forall x \in R_+^*,\ g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$x > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $x - 1$. On dresse le tableau de variations en notant que $g(1) = 1 - \ln ln\, 1 = 1$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

On en déduit que

$$\forall x \in R_+^*,\ g(x) = x - \ln ln\, x \geq 1 > 0 \Leftrightarrow x > \ln ln\, x$$

La courbe de la fonction logarithme est donc en-dessous de la droite d'équation $y = x$. On peut le visualiser sur le deuxième graphique du paragraphe 1.