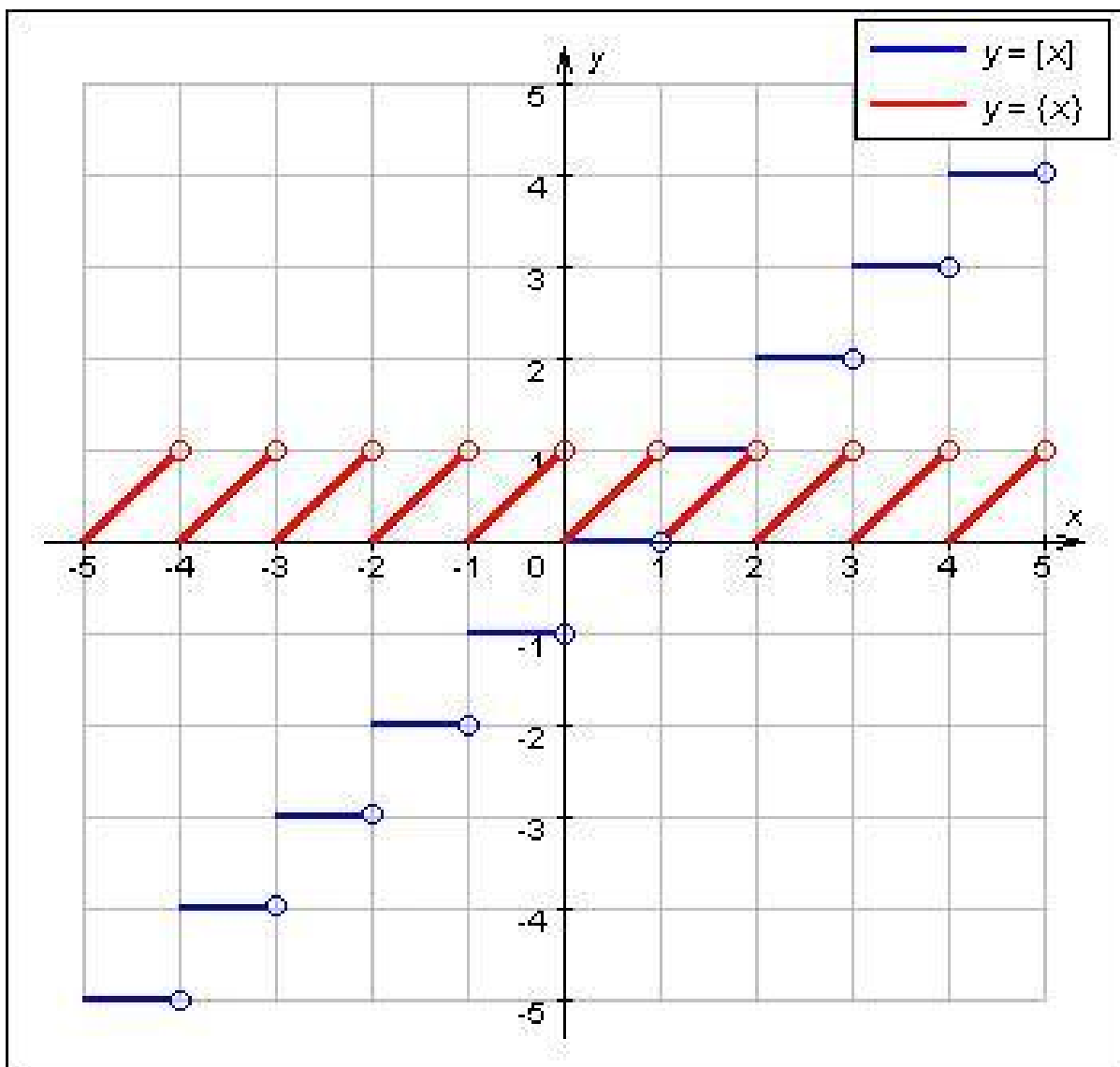




Розина Т.А

*Задачи, содержащие целую  
или дробную часть числа*

**Дорогие старшеклассники!**

Вы приступаете к углубленному изучению темы «Целая и дробная части числа». Данное пособие позволит вам расширить свои знания о математических функциях при решении уравнений и неравенств разной степени сложности. В представленном пособии содержатся теоретические сведения справочного характера, объясняются преобразования графиков, содержащих целую или дробную часть числа, рассмотрены решения простейших уравнений. А также методы решения квадратных, дробно – рациональных уравнений и неравенств, систем уравнений. В пособии приведены задания для самостоятельного решения. Учебное пособие поможет вам систематизировать и обобщить полученные знания по теме «Целая и дробная части числа».

**Успехов!**

## *Содержание.*

|                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------|----|
| §1. Знакомство с функциями $y = [x]$ и $y = \{x\}$ .....                  | 4  |
| §2. Уравнения, содержащие целую или дробную часть числа.....              | 7  |
| 2.1 Простейшие уравнения.....                                             | 7  |
| 2.2 Решение уравнений вида $[f(x)] = g(x)$ .....                          | 8  |
| 2.3 Графический способ решения уравнений.....                             | 10 |
| 2.4 Решение уравнений введением новой переменной.....                     | 11 |
| 2.5 Системы уравнений.....                                                | 12 |
| §3. Преобразования графиков функций, содержащих целую<br>часть числа..... | 13 |
| 3.1 Построение графиков функций вида $y = [f(x)]$ .....                   | 13 |
| 3.2 Построение графиков функций вида $y = f([x])$ .....                   | 15 |
| §4. Неравенства, содержащие целую или дробную часть числа...<br>.....     | 17 |
| §5. Целая или дробная часть числа в олимпиадных заданиях.....             | 20 |
| ...<br>Ответы на задания для самостоятельного решения.....                | 23 |
| Список литературы.....                                                    | 25 |

## *§1. Знакомство с функциями $y = [x]$*

$$\text{и } y = \{x\}$$

### *История и определение целой и дробной части числа*



Понятие целой части числа было введено немецким математиком Иоганном Карлом Фридрихом Гауссом (1771-1855), автором "Трудов по теории чисел". Также Гаусс продвинул теорию специальных функций, рядов, численные методы, решение задач математической физики, создал математическую теорию потенциала.

Обозначается целая часть действительного числа  $x$  символом  $[x]$  или  $E(x)$ .

Символ  $[x]$  был введен К.Гауссом в 1808 г.

анн Гаусс

Функция же целой части числа была введена Адриеном Мари Лежандром (1752-1833). - французским математиком. Его работа "Опыт теории чисел", которая вышла в свет в 1798 году, является фундаментальным трудом, итогом арифметических достижений XVIII века. Именно в честь него функцию  $y = [x]$  называют французским словом "Антье" (фр. «entier» - целый) обозначают  $E(x)$ .



Адриен Лежандр

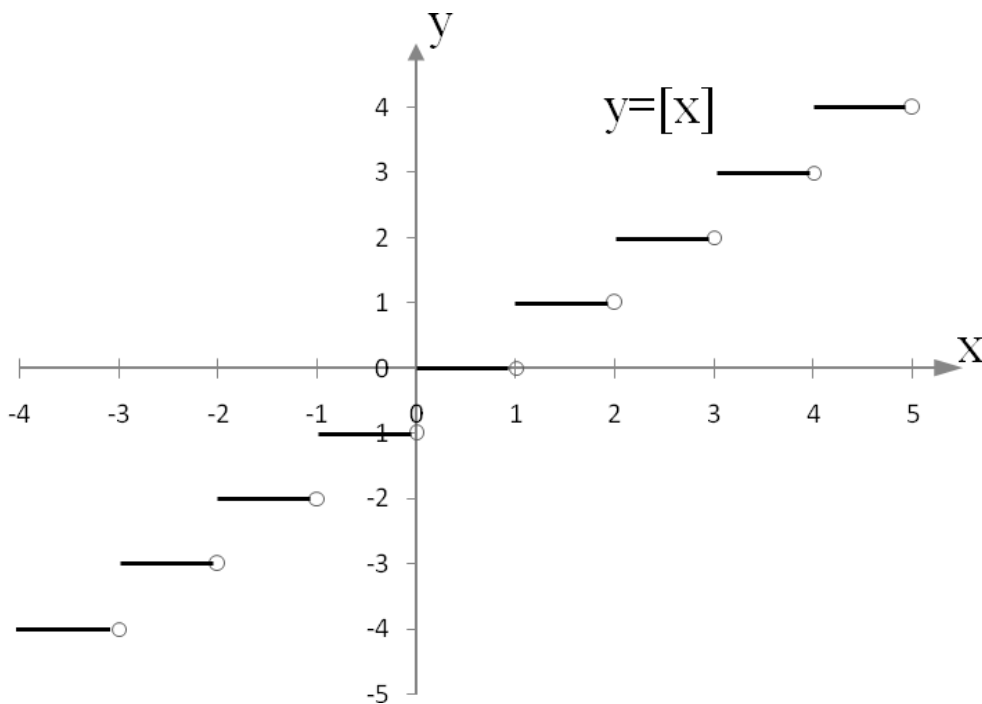
Определение: целой частью числа  $x$  называется наибольшее целое число  $s$ ,

не превышающее  $x$ , т.е. если  $[x] = c$ ,  $c \leq x < c + 1$ .

**Например:**  $[2,2] = 2$ ;

$[-1,5] = -2$ .

По некоторым значениям функции можно построить её график. Он выглядит следующим образом:



Свойства функции  $y = [x]$ :

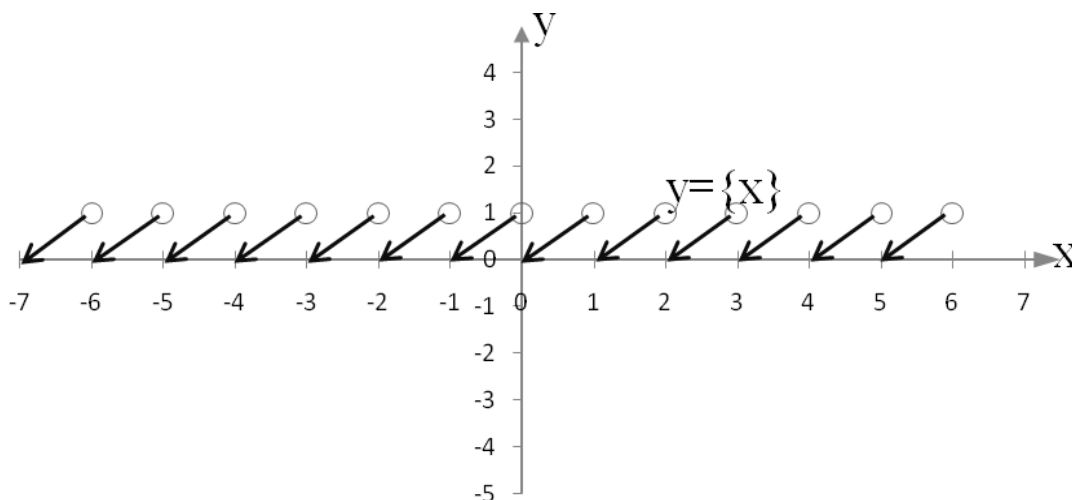
1. Область определения функции  $y = [x]$  есть множество всех действительных чисел  $\mathbb{R}$ .
2. Область значений функции  $y = [x]$  есть множество всех целых чисел  $\mathbb{Z}$ .
3. Функция  $y = [x]$  кусочно-постоянная, неубывающая.
4. Функция общего вида.
5. Функция не периодична.
6. Функция не ограничена.
7. Функция имеет точку разрыва.
8.  $y=0$ , при  $x \in [0;1)$ .
9.  $y < 0$ , при  $x < 0$ ;  $y > 0$ , при  $x > 0$ .
10. Функция не имеет точек экстремума.
11.  $Y_{\text{наиб.}}$  и  $Y_{\text{наим.}}$  не существует.

Возникает вопрос: «Если есть функция целой части числа, может, есть и функция дробной части числа?»

Определение: дробная часть числа (обозначается  $\{x\}$ ) есть разность  $x - [x]$ .

**Например:**  $\{3,7\} = 0,7$   
 $\{-2,4\} = 0,6$ .

Построим график функции  $y = \{x\}$ . Он выглядит следующим образом:



Простейшие свойства функции  $y = \{x\}$ :

1. Область определения функции  $y = \{x\}$  есть множество всех действительных чисел  $\mathbb{R}$ .
2. Область значений функции  $y = \{x\}$  есть полуинтервал  $[0;1)$
3. Функция общего вида.
4. Функция ограничена.
5. Функция не прерывна.
6.  $y=0$ , при всех целых  $x$ .
7.  $y>0$ , при всех действительных  $x$ .
8. Функция монотонно возрастает на  $[n; n+1)$
9. Функция не имеет точек экстремума.
10.  $U_{\min}$  при  $x=n$ .

Представление о том, как выглядят графики функций  $y = [x]$  и  $y = \{x\}$  поможет выполнить и некоторые задания.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

:

- 1) Построить графики функций:
  - а)  $y = [x] + 5$ ;
  - б)  $y = \{x\} - 2$ ;
  - в)  $y = |[x]|$ .
- 2) Какими могут быть числа  $x$  и  $y$ , если:
  - а)  $[x + y] = y$ ;
  - б)  $[x - y] = x$ ;
  - в)  $\{x - y\} = x$ ;
  - г)  $\{x + y\} = y$ .

3) Что можно сказать о величине разности  $x - y$ , если:

а)  $[x] = [y]$ ;

б)  $\{x\} = \{y\}$ .

4) Что больше:  $[a]$  или  $\{a\}$ ?

## §2. Уравнения, содержащие целую или дробную часть числа

### 2.1. Простейшие уравнения

К простейшим уравнениям относятся уравнения вида  $[x] = a$ .

Уравнения такого вида решаются по определению:

$a \leq x < a + 1$ , где  $a$  - целое число.

Если  $a$  - дробное число, то такое уравнение не будет иметь корней.

*Рассмотрим пример решения одного из таких уравнений:*

$[x + 1,3] = -5$ . По определению такое уравнение преобразуется в неравенство:  $-5 \leq x + 1,3 < -4$ . Решим его. Получим  $-6,3 \leq x < -5,3$ .

Это и будет являться решением уравнения.

Ответ:  $x \in [-6,3; -5,3)$ .

*Рассмотрим ещё одно уравнение, относящееся к разряду простейших:*

$$[x+1] + [x-2] - [x+3] = 2$$

Для решения уравнений такого вида необходимо использовать свойство функции целого числа: Если  $p$  - целое число, то справедливо равенство

$$[x \pm p] = [x] \pm p$$

Доказательство:  $x = [x] + \{x\}$

$$[ [x] + \{x\} \pm p ] = [ [x] + \{x\} ] \pm p$$

$x = k + a$ , где  $k = [x]$ ,  $a = \{x\}$

$$[k + a \pm p] = [k + a] \pm p = [x] \pm p.$$

Решим предложенное уравнение, используя доказанное свойство: Получим

$$[x] + 1 + [x] - 2 - [x] - 3 = 2.$$

Приведём подобные слагаемые и получим простейшее уравнение  $[x] = 6$ . Его решением является полуинтервал  $x \in [6; 7)$ , который и будет решением данного уравнения.

Ответ:  $x \in [6; 7)$ .

*Рассмотрим более сложное уравнение:*

$$[x^2 - 5x + 6] = 1$$

Преобразуем уравнение в неравенство:  $1 \leq x^2 - 5x + 6 < 2$ . Двойное неравенство запишем в форме системы неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 < 2, \\ x^2 - 5x + 6 \geq 1 \end{cases} \text{ и решим её;}$$

$$\begin{aligned}x^2 - 5x + 4 &< 0, \\x^2 - 5x + 5 &> 0\end{aligned}$$

Получаем 
$$\begin{cases} x \in (1; 4) \\ x \in (-\infty; (5 - \sqrt{5})/2] \cup [(5 + \sqrt{5})/2; +\infty), \end{cases} \Rightarrow$$
  

$$\Rightarrow x \in (1; (5 - \sqrt{5})/2] \cup [(5 + \sqrt{5})/2; 4).$$

Ответ:  $x \in (1; (5 - \sqrt{5})/2] \cup [(5 + \sqrt{5})/2; 4).$

### **ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

Решите уравнения:

1)  $[2x + 1/5] = 1$

2)  $[3x - 5,2] = 0,487$

3)  $[x + 4] - [x + 1] = 2$

4)  $[x^2] = 4$

5)  $[x]^2 = 4$

6)  $[x + 1,3] = -5$

7)  $[x^2 - x + 4] = 2$

8)  $[2x + 1,5] = -1$

9)  $[3x + 5,2] = 4,2$

10)  $\{x\} - [x] + x = 0$

11)  $x + \{x\} + [x] = 0$

12)  $[4x - 5] = 7$

## ***2.2 Решение уравнений вида $[f(x)] = g(x)$***

Уравнение вида  $[f(x)] = g(x)$  можно решить путем сведения их к уравнению  $[x] = a$ .

Рассмотрим **пример 1**.

Решить уравнение  $\left[ \frac{8x+19}{7} \right] = \frac{16(x+1)}{11}$

Заменим правую часть уравнения на новую переменную  $a$  и выразим отсюда  $x$

$$\frac{16(x+1)}{11} = a, \quad 11a = 16x + 16, \quad 16x = 11a - 16, \quad x = \frac{11a}{16} - 1$$

$$\frac{11(a+2)}{14}$$

Тогда  $\frac{8x+19}{7} = \frac{8(11a/16-1)+19}{7} =$

Теперь решим уравнение  $\left[ \frac{11(a+2)}{14} \right] = a$  относительно переменной  $a$ .

Раскроем знак целой части по определению и запишем с помощью системы неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{11(a+2)}{14} < a+1, \\ \frac{11(a+2)}{14} \geq a. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 11a+22 < 14a+14, \\ 11a+22 \geq 14a. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -3a < -8, \\ -3a \geq -22. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a > 8/3, \\ a \leq 22/3. \end{array} \right.$$

Из промежутка  $\left( \frac{8}{3}; \frac{22}{3} \right]$  выберем все целые значения  $a$ : 3;4;5;6;7 и проведем обратную замену:

$$\frac{16(x+1)}{11} = 3, \quad x = \frac{17}{16}$$

$$\frac{16(x+1)}{11} = 4, \quad x = \frac{7}{4}$$

$$\frac{16(x+1)}{11} = 5, \quad x = \frac{39}{16}$$

$$\frac{16(x+1)}{11} = 6, \quad x = \frac{25}{8}$$

$$\frac{16(x+1)}{11} = 7, \quad x = \frac{61}{16}.$$

**Пример 2.**

Решить уравнение:  $\left[ \frac{a(a^2+3a+2)+4}{6} \right] = a+1.$

Разделим каждое слагаемое числителя в скобке на знаменатель:

$$\left[ \frac{a(a+1)(a+2)}{6} + \frac{2}{3} \right] = a+1.$$

Из определения целой части числа следует, что  $(a+1)$  должно быть целым, значит и  $a$  – целое. Числа  $a$ ,  $(a+1)$ ,  $(a+2)$  - три последовательных числа, значит

одно из них обязательно делится на 2, а одно - на 3. Следовательно,

нацело  $\frac{a(a+1)(a+2)}{6}$  произведение чисел  $\frac{a(a+1)(a+2)}{6} = a+1$ . делится  
 То есть  $\frac{a(a+1)(a+2)}{6}$  на 6.  $\frac{a(a+1)(a+2)}{6} = a+1$ . Значит  
 целое число.

Решим это уравнение.

$$a(a+1)(a+2) - 6(a+1) = 0$$

$$(a+1)(a(a+2) - 6) = 0$$

$$a+1=0 \quad \text{или} \quad a^2+2a-6=0$$

$$a=-1 \quad D=28$$

$$a = -1 \pm \sqrt{7} \quad (\text{не являются целыми}).$$

Ответ: -1.

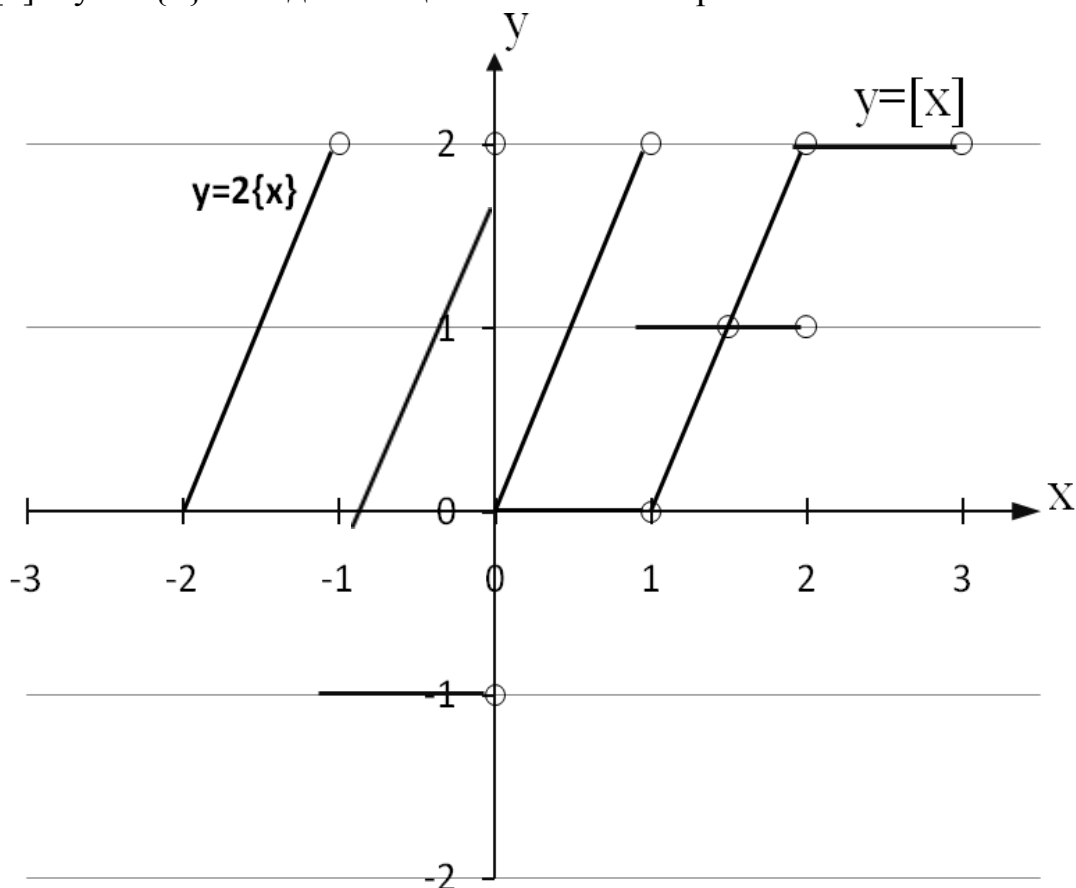
### ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ:

Решите уравнение:  $\left[ \frac{5+6x}{8} \right] = \frac{15x-7}{7}$ .

## 2.3. Графический способ решения уравнений

**Пример 1.**  $[x] = 2\{x\}$

Решение. Решим это уравнение графически. Построим графики функций  $y = [x]$  и  $y = 2\{x\}$ . Найдём абсциссы точек их пересечения.



Ответ:  $x = 0$ ;  $x = 1,5$ .

В некоторых случаях удобнее по графику найти ординаты точек пересечения графиков. Затем подставить полученное значение в одно из уравнений и найти искомые значения  $x$ .

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решите уравнения графически:

1)  $\{x\} = 1 - x$ ;

2)  $\{x\} + 1 = [x]$ ;

3)  $[2x] = 3x$ ;

4)  $3\{x\} = x$ ;

5)  $\{x\} = 5x + 2$ ;

6)  $[|x|] = x$ ;

7)  $[|x|] = x + 4$ ;

8)  $[|x|] = 3|x| - 1$ ;

9)  $2\{x\} - 1 = [x] + 2$ ;

10) Сколько решений имеет уравнение  $2\{x\} = 1 - \frac{x}{2}$ .

## 2.4. Решение уравнений введением новой переменной.

Рассмотрим первый пример:

$$\{x\}^2 - 8\{x\} + 7 = 0$$

Заменим  $\{x\}$  на  $a$ ,  $0 \leq a < 1$ , получим простое квадратное уравнение  $a^2 - 8a + 7 = 0$ , которое решим по теореме, обратной теореме Виета:

Полученные корни  $a = 7$  и  $a = 1$ . Проведем обратную замену и получим два новых уравнения:  $\{x\} = 7$  и  $\{x\} = 1$ . Оба эти уравнения не имеют корней.

Следовательно, уравнение не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Рассмотрим ещё один случай решения уравнения введением новой переменной:

$$3[x]^3 + 2[x]^2 + 5[x] - 10 = 0$$

Проведём замену  $[x] = a$ ,  $a \in \mathbb{Z}$  и получим новое кубическое уравнение  $3a^3 + 2a^2 + 5a - 10 = 0$ . Первый корень этого уравнения найдём путём подбора:  $a=1$  - корень уравнения. Делим наше уравнение на  $(a-1)$ . Получаем квадратное уравнение  $3a^2 + 5a + 10 = 0$ . Это уравнение имеет отрицательный дискриминант, а значит, не имеет решений. То есть,  $a=1$  - единственный корень уравнения. Проводим обратную замену:  $[x]=a=1$ . Полученное уравнение решаем по определению целой части числа:  $x \in [1; 2)$ .  
 Ответ:  $x \in [1; 2)$ .

**ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ:**

- 1)  $[x]^2 + 8[x] - 9 = 0$
- 2)  $3(x - [x])^2 + 2([x] - x) - 16 = 0$
- 3)  $[x]^4 - 14[x]^2 + 25 = 0$
- 4)  $(2\{x\} + 1)^3 - (2\{x\} - 1)^3 = 2$
- 5)  $(x - [x])^2 = 4$
- 6)  $5[x]^2 - 7[x] - 6 = 0$
- 7)  $6\{x\}^2 + \{x\} - 1 = 0$
- 8)  $1/([x] - 1) - 1/([x] + 1) = 3 - [x]$
- 9)  $12\{x\}^3 - 25\{x\}^2 + \{x\} + 2 = 0$
- 10)  $10[x]^3 - 11[x]^2 - 31[x] - 10 = 0$

## **2.5. Системы уравнений.**

*Рассмотрим систему уравнений:*

$$\begin{cases} 2[x] + 3[y] = 8, \\ 3[x] - [y] = 1. \end{cases}$$

Ее можно решить либо методом сложения, либо подстановкой. Остановимся на первом способе.

$$\begin{cases} 2[x] + 3[y] = 8, \\ 9[x] - 3[y] = 3. \end{cases}$$

После сложения двух уравнений получаем  $11[x] = 11$ . Отсюда  $[x] = 1$ . Подставим это значение в первое уравнение системы и получаем  $[y] = 2$ .

$[x] = 1$  и  $[y] = 2$  – решения системы. То есть  $x \in [1; 2)$ ,  $y \in [2; 3)$ .  
 Ответ:  $(x \in [1; 2), y \in [2; 3))$ .

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ:

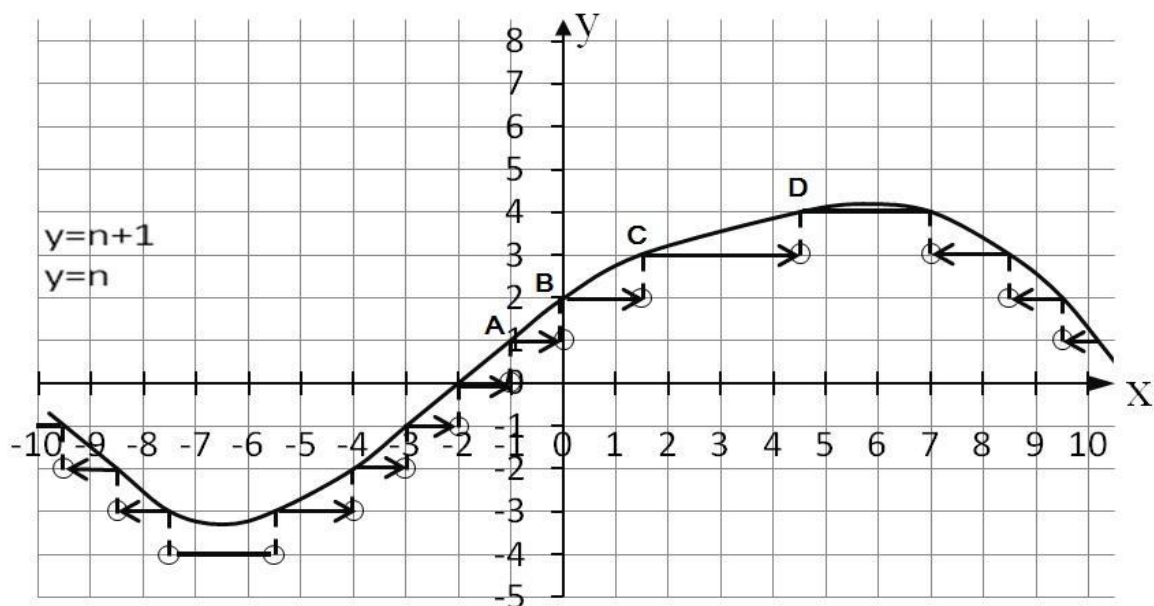
- 1) 
$$\begin{cases} 2\{x\} - 3\{y\} = 1 \\ 2\{x\} + 4\{y\} = 2 \end{cases}$$
- 2) 
$$\begin{cases} [x+y+4] = 18-y \\ [x+1] + [y-1] = 18-x-y \end{cases}$$
- 3) 
$$\begin{cases} 3[x] - 2\{y\} = 6 \\ [x]^2 - 4\{y\} = 4 \end{cases}$$
- 4) 
$$\begin{cases} 3\{x\} - 4\{y\} = -6 \\ 6\{x\} - \{y\}^2 = 3. \end{cases}$$

## ***§3. Преобразования графиков функций, содержащих целую часть числа***

### ***3.1. Построение графиков функции вида $y = [f(x)]$***

Пусть имеется график функции  $y = f(x)$ . Чтобы построить график функции  $y = [f(x)]$ , поступаем следующим образом:

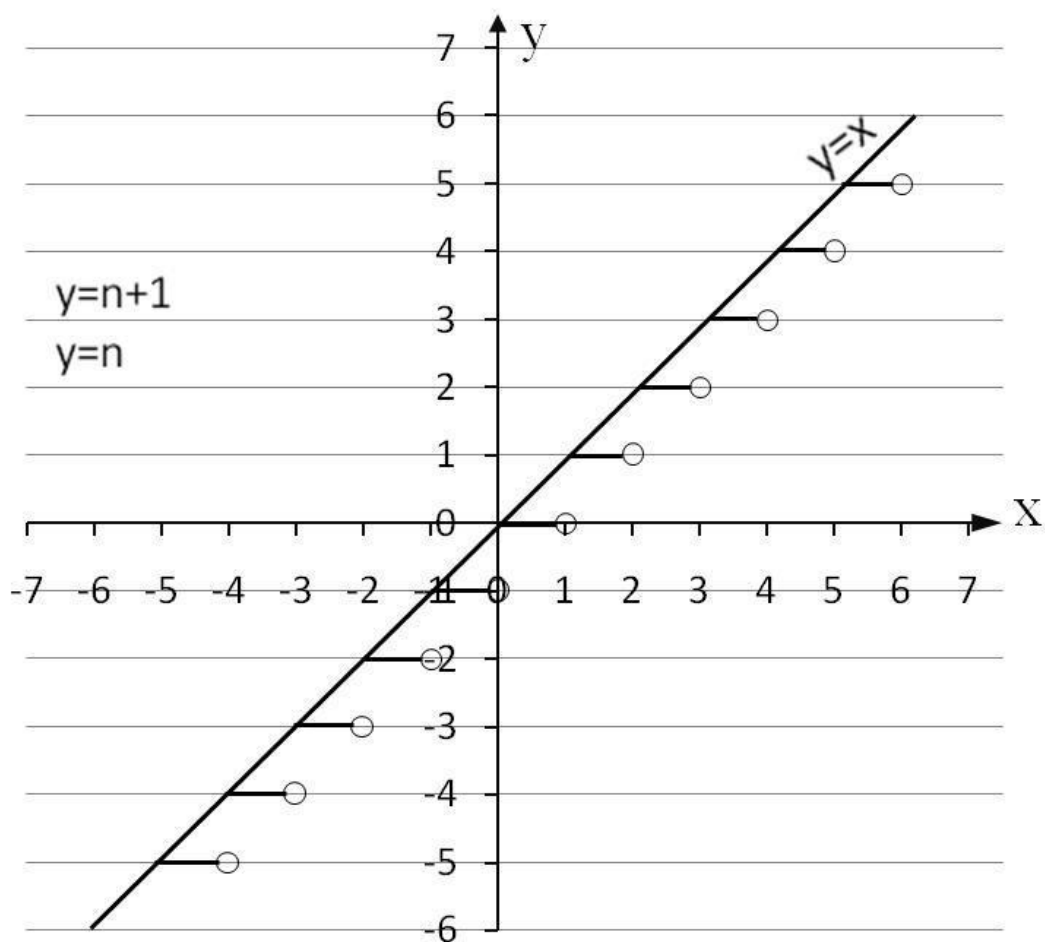
1. Проводим прямые  $y = n$ ,  $n = 0; -1; +1; -2; +2; \dots$  и рассматриваем одну из полос, образованных прямыми  $y = n$ ,  $y = n + 1$ .
2. Отмечаем точки пересечения прямых  $y = n$ ,  $y = n + 1$  с графиком функции  $y = f(x)$ . Эти точки принадлежат графику функции  $y = [f(x)]$ , так как их ординаты целые числа (на рисунке это точки A, B, C, D).



3. Для получения остальных точек графика функции  $y = [f(x)]$  в указанной полосе часть графика  $y = f(x)$ , попавшую в полосу, проектируем параллельно оси  $Oy$  на прямую  $y = n$ . Поскольку любая точка  $M$  этой части графика функции  $y = f(x)$  имеет такую ординату  $y_0$ , что  $n \leq y_0 < n + 1$ , то  $[y_0] = n$ .
4. В каждой другой полосе, где имеются точки графика функции  $y = f(x)$ , построение проводится аналогично.

Построим график функции  $y = [x]$ . Для этого

1. Проводим прямые  $y = n$ ,  $n = 0; -1; +1; -2; +2; \dots$  и рассматриваем одну из полос, образованных прямыми  $y = n$ ,  $y = n + 1$ .
2. Отмечаем точки пересечения прямых  $y = n$ ,  $y = n + 1$  с графиком функции  $y = [x]$ . Эти точки принадлежат графику функции  $y = [x]$ , так как их координаты целые числа.
3. Для получения остальных точек графика функции  $y = [x]$  в указанной полосе часть графика  $y = x$ , попавшую в полосу, проецируем параллельно оси  $O_y$  на прямую  $y = n$ ,  $y = n + 1$ . Поскольку любая точка  $M$  этой части графика функции  $y = x$ , имеет такую ординату  $y_0$ , что  $n < y_0 < n + 1$ , то  $[y_0] = n$ .
4. В каждой другой полосе, где имеются точки графика функции  $y = x$ , построение проводится аналогично.



### ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

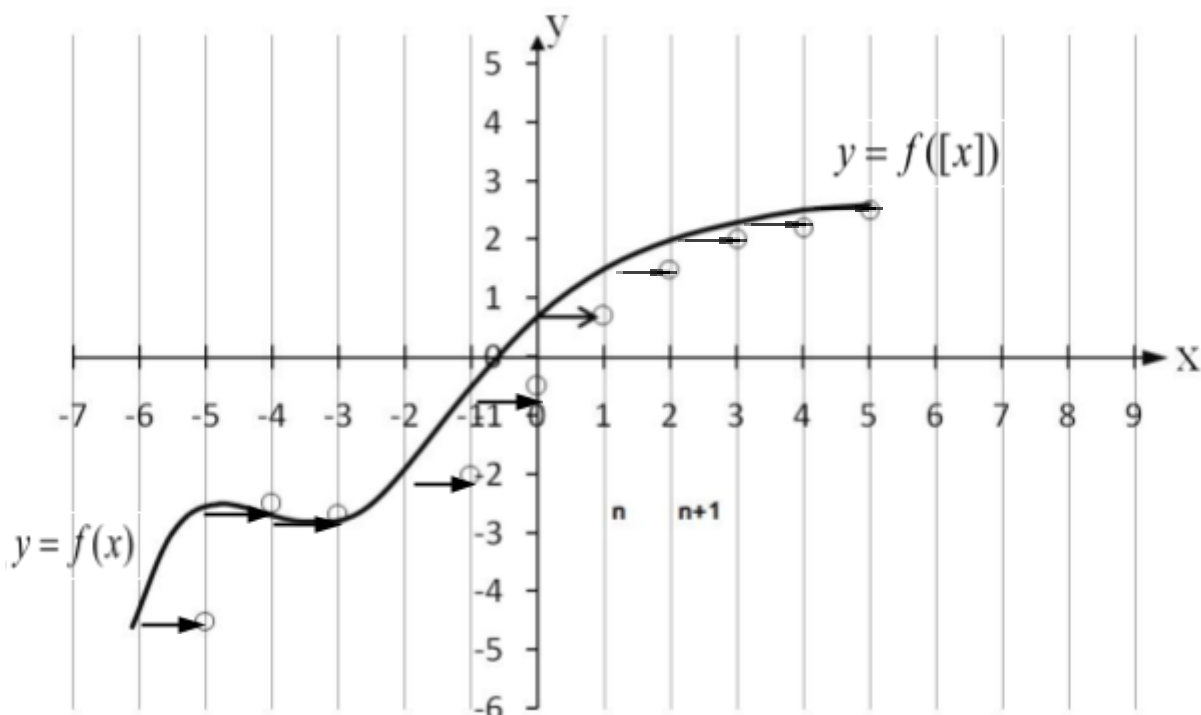
Постройте графики функций:

- 1)  $y = [x^2]$ ;
- 2)  $y = 2[\sin x]$ ;
- 3)  $y = [3^{x^2} - 1] + 3$ ;
- 4)  $y = -[\cos x] + 1$ ;
- 5)  $y = [|x|]$ ;
- 6)  $y = [\operatorname{tg} x]$ ;
- 7)  $y = 2[|\cos x|] - 4$ ;
- 8)  $y = 1,5[\cos x] - 2$ ;
- 9)  $y = [\operatorname{ctg} x + 2] - 1$

### 3.2. Построение графиков функции вида $y = f([x])$

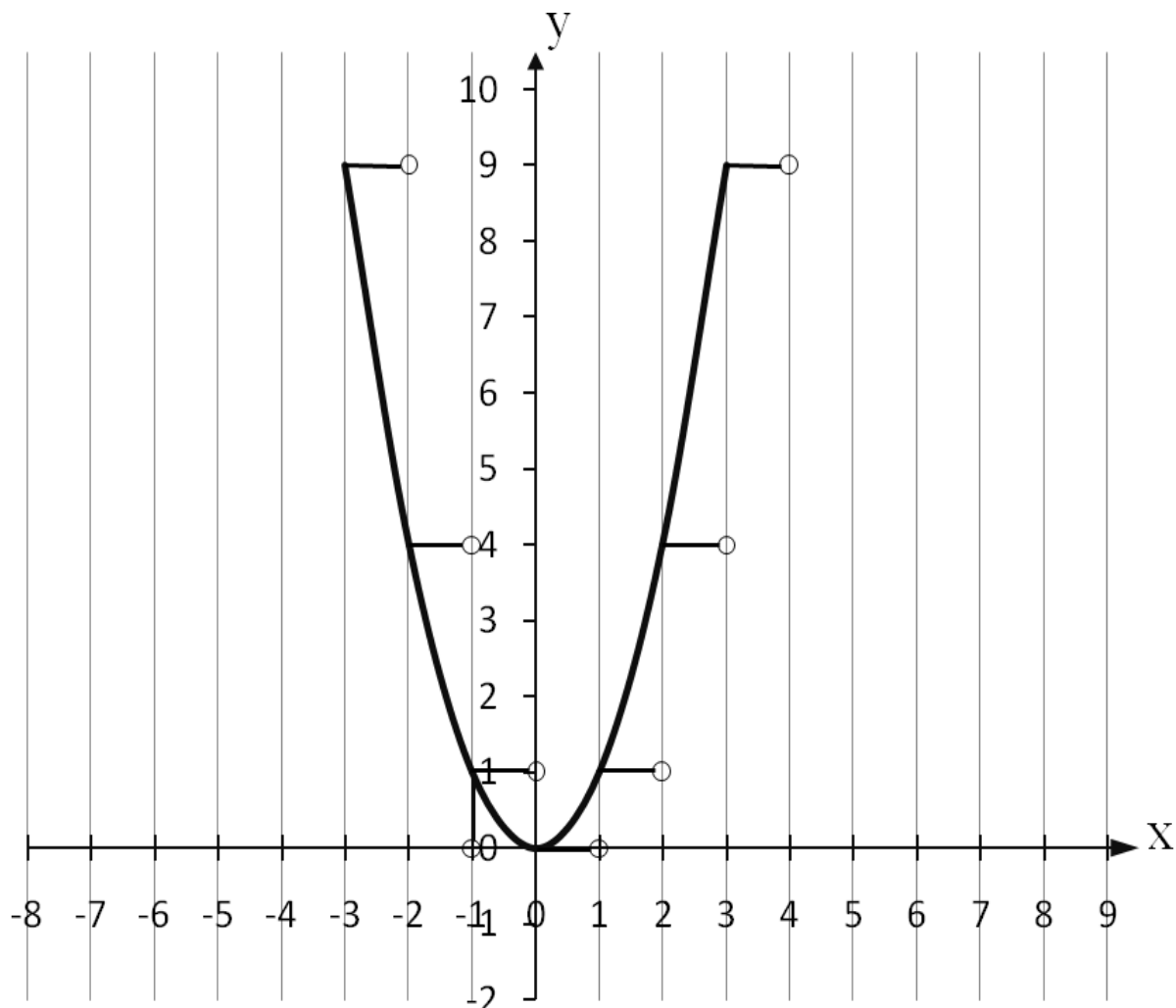
Пусть дан график некоторой функции  $y = f(x)$ . Построение графика функции  $y = f([x])$  осуществляется следующим образом:

1. Проводим прямые  $x = n$ ,  $n = 0; -1; +1; -2; +2; \dots$
2. Рассмотрим одну из полос, образованных прямыми  $y = n$  и  $y = n + 1$ . Точки A и B пересечения графика функции  $y = f(x)$  с этими прямыми принадлежат графику функции  $y = f([x])$ , так как их абсциссы – целые числа.



Рассмотрим построение графика функции  $y = [x]^2$ . Для этого пунктиром построим график функции  $y = x^2$ . Далее

1. Проводим прямые  $x = n$ ,  $n = 0; -1; +1; -2; +2; \dots$
2. Рассмотрим одну из полос, образованных прямыми  $y = n$  и  $y = n + 1$ 
  1. Точки пересечения графика функции  $y = x^2$  с этими прямыми принадлежат графику функции  $y = [x]^2$ , так как их абсциссы – целые числа.
3. В каждой другой полосе, где имеются точки графика функции  $y = x^2$ , построение ведётся аналогично.



### ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Постройте графики функций:

- 1)  $y = \sin[x]$ ;
- 2)  $y = \cos[x] + 3$ ;
- 3)  $y = \operatorname{tg}[x]$ ;
- 4)  $y = \frac{1}{[x]}$ ;
- 5)  $y = [x]^2 + [x] - 6$ ;
- 6)  $y = \frac{[x]}{2} - 4$ ;
- 7)  $y = 3 - 2[x]$ ;
- 8)  $y = \sqrt{[x]} + 2$ ;
- 9)  $y = 3\cos[x] - 4$ .

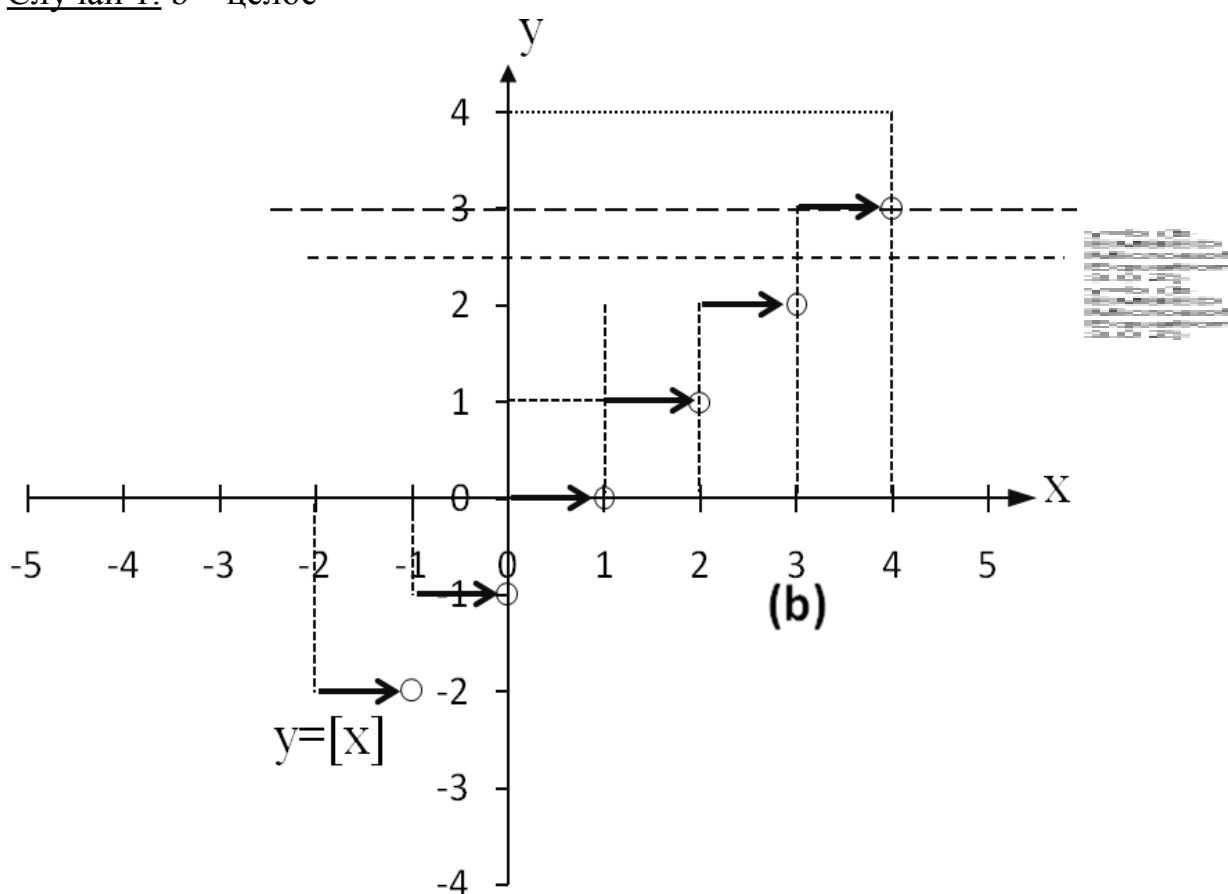
## §4. Неравенства, содержащие целую или дробную часть числа

Назовём основными неравенствами с  $[x]$  и  $\{x\}$  следующие соотношения:  $[x] > b$  и  $\{x\} > b$ . Удобным методом их решения является графический метод. Поясним его на двух примерах.

**Пример 1.**  $[x] \geq b$

Решение. Введём в рассмотрение две функции  $y = [x]$  и  $y = b$  и начертим их графики на одном и том же чертеже. Ясно, что тогда следует различать два случая:  $b$  – целое и  $b$  – нецелое.

Случай 1.  $b$  – целое



Из рисунка видно, что графики совпадают на  $[b; b + 1]$ .

Следовательно, решением неравенства  $[x] \geq b$  будет луч  $x \geq b$ .

Случай 2.  $b$  – нецелое.

В этом случае графики функций  $y = [x]$  и  $y = b$  не пересекаются. Но часть графика  $y = [x]$ , лежащая выше прямой, начинается в точке с координатами  $([b] + 1; [b] + 1)$ . Таким образом, решением неравенства  $[x] \geq b$  будет луч  $x \geq [b] + 1$ .

Остальные виды основных неравенств исследуются точно так же. Результаты этих исследований сведены ниже в таблицу.

| Вид неравенства                                                        | Множество значений                                              |
|------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| $[x] \geq b, b \in \mathbb{Z}$                                         | $x \geq b$                                                      |
| $[x] \geq b,$<br>$[x] > b, b - \text{любое}$                           | $x \geq [b] + 1$                                                |
| $[x] \leq b, b - \text{любое}$<br>$[x] < b, b - \text{любое}$<br>любое | $x < [b] + 1$                                                   |
| $[x] < b, b \in \mathbb{Z}$                                            | $x < b$                                                         |
| $\{x\} \geq b, \{x\} > b, b \geq 1$                                    | Решений нет                                                     |
| $\{x\} \geq b, \{x\} > b, b < 0$                                       | $(-\infty; +\infty)$                                            |
| $\{x\} \geq b, \{x\} > b, 0 \leq b < 1$                                | $n + b \leq x < 1 + n$<br>$n + b < x < 1 + n, n \in \mathbb{Z}$ |
| $\{x\} \leq b, \{x\} < b, b \geq 1$                                    | $(-\infty; +\infty)$                                            |
| $\{x\} \leq b, \{x\} < b, b < 0$                                       | Решений нет                                                     |
| $\{x\} \leq b, \{x\} < b, 0 \leq b < 1$                                | $n \leq x \leq b + n$<br>$n < x \leq b + n, n \in \mathbb{Z}$   |

Рассмотрим **пример** решения неравенства:

$$\frac{2[x] - 5}{3[x] - 1} > 1$$

Заменим  $[x]$  на переменную  $a$ , где  $a$  – целое.

$$\frac{2a - 5}{3a - 1} > 1; \quad \frac{2a - 5}{3a - 1} - 1 > 0; \quad \frac{2a - 5 - 3a + 1}{3a - 1} > 0; \quad \frac{-a - 4}{3a - 1} > 0.$$

Используя метод интервалов, находим  $\begin{cases} a > -4 \\ a < 1/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [x] > -4 \\ [x] < 1/3 \end{cases}$ .

Для решения полученных неравенств воспользуемся составленной таблицей:

$$\begin{cases} x \geq -3, \\ x < 1. \end{cases} \quad x \in [-3; 1)$$

Ответ:  $[-3; 1)$ .

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

1)  $[x] < 2$

2)  $[x] \leq 2$

3)  $[x] > 2,3$

4)  $[x] \geq 2$

5)  $[x]^2 - 5[x] - 6 < 0$

6)  $[x]^2 - 7[x] + 6 \geq 0$

7)  $30[x]^2 - 121[x] + 80 < 0$

8)  $[x]^2 + 3[x] - 4 \geq 0$

9)  $3\{x\}^2 - 8\{x\} - 4 < 0$

10)  $110[x]^2 - 167[x] + 163 \geq 0$

11)  $\frac{3[x] - 2}{2[x] + 3} > 2$

12)  $\frac{2\{x\} - 5}{3\{x\} - 1} > 1$

13)  $\frac{6[x] + 7}{6\{x\} + 7} \leq 0$

14)  $\frac{3[x] - 7}{7\{x\} - 3} \leq 0$

## *§5. Целая или дробная часть числа в олимпиадных заданиях*

### **Пример 1.**

Доказать, что число  $\left[ \frac{n}{2} \right] - 3n + (-1)^n - 1$  делится на 5 при любом натуральном  $n$ .

Доказательство: Пусть  $n$  – четное число, т.е.  $n=2m$ , где  $m \in \mathbb{N}$ ,

поэтому  $\left[ \frac{n}{2} \right] = \left[ \frac{2m}{2} \right] = m = \frac{n}{2}$ .

Тогда данное выражение имеет вид:  $\frac{n}{2} - 3n + 1 - 1 = -\frac{5n}{2}$ ,  
т.е. оно делится на 5 при любом четном  $n$ .

Если  $n = 2m - 1$ , то

$$\left[ \frac{n}{2} \right] = \left[ \frac{2m-1}{2} \right] = \left[ \frac{2m-2}{2} + \frac{1}{2} \right] = \left[ m-1 + \frac{1}{2} \right] = m-1 = \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2},$$

тогда данное выражение имеет вид:

$$\frac{n-1}{2} - 3n - 1 - 1 = -\frac{5(n+1)}{2}.$$

Это число при любом нечетном  $n$  делится на 5.

Итак, данное выражение при любом натуральном  $n$  делится на 5.

### Пример 2.

Найти все простые числа вида  $\left[ \frac{n^2}{3} \right]$ , где  $n \in \mathbb{N}$ .

Решение. Пусть  $p = \left[ \frac{n^2}{3} \right]$ . Если  $n=3k$ , то  $p=3k^2$ . Это число будет простым и равным 3, при  $k=1$ .

Если  $n=3k+1$ ,  $k \geq 0$ , то

$$p = \left[ \frac{9k^2 + 6k + 1}{3} \right] = \left[ \frac{3(3k^2 + 2k)}{3} + \frac{1}{3} \right] = 3k^2 + 2k = k(3k + 2), \text{ то}$$

Это число будет простым и равным 5 при  $k=1$ .

Если  $n = 3k + 2$ ,  $k \geq 0$ , то

$$p = \left[ \frac{9k^2 + 12k + 4}{3} \right] = \left[ \frac{3(3k^2 + 4k + 1)}{3} + \frac{1}{3} \right] = 3k^2 + 4k + 1 = (3k+1)(k+1)$$

-составное число при любом  $k \in \mathbb{N}$ .

Ответ: 3;5

### Пример 3.

В ряд выписаны числа кратны двум, трем, шести. Найти число, которое в этом ряду будет стоять на тысячном месте.

Решение:

Пусть  $x$  – искомое число, тогда ряд чисел, кратных двум в этом ряду -  $\left[\frac{x}{2}\right]$ , кратны трем -  $\left[\frac{x}{3}\right]$ , кратны шести -  $\left[\frac{x}{6}\right]$ . Но числа кратны шести, кратны двум и трем, т.е. будут подсчитаны трижды. Поэтому из суммы чисел. Кратных двум, трем, шести надо вычесть удвоенное количество чисел кратных шести. Тогда уравнение для решения той задачи имеет вид:

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{6}\right] = 1000$$

Введем обозначения:  $\left[\frac{x}{2}\right] = a$ ,  $\left[\frac{x}{3}\right] = b$ ,  $\left[\frac{x}{6}\right] = c$

Тогда  $a+b-c=1000$  (\*) и по определению целой части числа имеем:

$$a \leq \frac{x}{2} < a+1,$$

$$b \leq \frac{x}{3} < b+1,$$

$$c \leq \frac{x}{6} < c+1.$$

Домножив каждое неравенство почленно на 6, получим:

$$6a \leq 3x < 6a+6$$

$$6b \leq 2x < 6b+6$$

$$6c \leq x < 6c+6$$

Складывая первые два неравенства, и вычитая из них суммы третье неравенство, получим:

$$6(a+b+c) \leq 4x < 6(a+b+c) + 6$$

Воспользуемся равенством (\*), тогда:  $6000 \leq 4x < 6006$

$$1500 \leq x < 1501$$

Решениями уравнения будут числа: 1500 и 1501, но по условию задачи подходит только число 1500.

Ответ: 1500

#### Пример 4.

Известно, что младшему брату не более 8, но не менее 7 лет. Если количество полных лет младшего брата увеличить в 2 раза, а количество неполных лет (т.е. месяцев) его возраста утроить, то в сумме получится возраст старшего брата. Указать возраст каждого из братьев с точностью до месяцев, если известно, что суммарный их возраст равен 21 году и 8 месяцам.

Решение:

Пусть  $x$  (лет) – возраст младшего брата, тогда

$[x]$  – количество полных лет, а  $\{x\}$  – количество неполных лет

(месяцев) его возраста. По условию задачи  $2[x] + 3\{x\}$  (лет) – возраст старшего брата. Суммарный возраст обоих братьев равен:

$$2[x] + 3\{x\} + [x] + \{x\} = 21\frac{2}{3} \text{ (года)}.$$

$$3([x] + \{x\}) + \{x\} = 21\frac{2}{3}, \quad 3x + \{x\} = 21\frac{2}{3}, \quad \{x\} = -3x + 21\frac{2}{3},$$

$$\{x\} \in [0; 1), \quad -3x + 21\frac{2}{3} \in [0; 1),$$

$$0 \leq -3x + 21\frac{2}{3} < 1, \quad \frac{62}{9} < x \leq \frac{65}{9}.$$

Так как  $\{x\} = x - [x]$ , то  $[x] = 4x - 21\frac{2}{3}$ . (Уравнение вида  $[ax] = bx + c$ , где  $a, b, c \in \mathbb{R}$ )

$$x = \frac{n + 21\frac{2}{3}}{4}, \quad \frac{62}{9} < \frac{n + 21\frac{2}{3}}{4} \leq \frac{65}{9}, \quad 5\frac{8}{9} < n \leq 7\frac{2}{9}, \quad n=6, n=7.$$

При  $n=6$ ,  $x = 6\frac{11}{12}$  - не удовлетворяет условию задачи.

При  $n=7$ ,  $x = 7\frac{2}{12}$ .

Возраст младшего брата - 7 лет и 2 месяца.

Возраст старшего брата – 14 лет и 6 месяцев.

Ответ: возраст младшего брата - 7 лет и 2 месяца,

возраст старшего брата - 14 лет и 6 месяцев.

### Задания для самостоятельного решения.

1. Решите уравнения: а)  $x + 2[x] = 3,2$ ; б)  $x^3 - [x] = 3$

2. Натуральные числа  $m$  и  $n$  взаимно просты и  $n < m$ . Какое число больше:

$$\left[1 * \frac{m}{n}\right] + \left[2 * \frac{m}{n}\right] + \dots + \left[n * \frac{m}{n}\right] \quad \text{или} \quad \left[1 * \frac{n}{m}\right] + \left[2 * \frac{n}{m}\right] + \left[m * \frac{n}{m}\right]$$

Знак (\*) следует читать, как умножение.

3. Дано число  $x$ , больше 1. Обязательно ли имеет место равенство

$$[\sqrt{[\sqrt{x}]}] = [\sqrt{\sqrt{x}}] ?$$

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 1,1 \\ y + [z] + \{x\} = 2,2 \\ z + [x] + \{y\} = 3,3. \end{cases}$$

4. Известно, что количество полных метров в ленте в 4 раза больше количества неполных метров (т.е. сантиметров). Определить максимально возможную длину ленты.

## Ответы на задания для самостоятельного решения.

Знак « $\in$ » следует читать «принадлежит»

- §1 2. а)  $x \in [0;1)$ ,  $y \in \mathbb{Z}$ ;                      в)  $x \in (0;1)$ ,  $y = -1; -2; -3; \dots$   
     б)  $x \in \mathbb{Z}$ ;  $y \in (-1;0]$                       г)  $x \in \mathbb{Z}$ ;  $y \in [0;1)$

3. а)  $|x-y| < 1$

     б)  $(x-y) \in \mathbb{Z}$

4.  $[a] > \{a\}$ , если  $a \geq 1$ ,  $\{a\} \geq [a]$ , если  $a < 1$ .

- §2. 2.1 1)  $[0,4; 0,9)$                                       7) корней нет  
     2) корней нет                                      8)  $[-1,25; -0,75)$   
     3) корней нет                                      9) корней нет  
     4) если  $x > 0$ , то  $[2; \sqrt{5})$   
          если  $x < 0$ , то  $(-\sqrt{5}; -2]$                       10)  $x$ - целое  
     5)  $[2;3)$  и  $[-2;-1)$                               11) 0  
     6)  $[-6,3; -5,3)$                                       12)  $[3; 13/4)$

2.2  $7/15; 0,8$

- 2.3 1) 0,5; 1                                      6) 0;1;2;3;...  
     2) 1                                              7) -2  
     3)  $-2/3; -1/3; 0$                               8)  $\pm 1/3$   
     4) 0; 1,5                                      9) -3; -1,5  
     5)  $-1/4$                                       10) 5 решений

- 2.4 1)  $[-9; -8)$                                       6)  $[2;3)$   
     2) корней нет                                      7)  $x = n+1/3$ , где  $n$ -целое число  
     3)  $[3;4)$ ,  $[-3;-2)$                               8)  $[3;4)$   
     4)  $x$ -целое число                              9)  $x = n+1/3$ , где  $n$ -целое число  
     5)  $[2;3)$  и  $[-2;-1)$                               10)  $[-1;0)$

- 2.5 1)  $x = n+5/7$ ;  $y = n+1/7$ , где  $n$  – целое число  
     2)  $x = 4$ ;  $y = 5$   
     3)  $x \in [2;3)$ ,  $y=0$ .  
     4) нет решений

- §4. 1)  $(-\infty; 2)$                                       8)  $(-\infty; -3) ; [1;+\infty)$   
     2)  $(-\infty; 3)$                                       9)  $[n+2/3; n+1]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

- |                                 |                                                    |
|---------------------------------|----------------------------------------------------|
| 3) $[3; +\infty)$               | 10) $\mathbb{R}$                                   |
| 4) $[2; +\infty)$               | 11) $(-7; -1)$                                     |
| 5) $[0; 6)$                     | 12) $[n; n+1/3]$ , $n \in \mathbb{Z}$              |
| 6) $(-\infty; 2]; [6; +\infty)$ | 13) $(-\infty; -1)$                                |
| 7) $[1; 4)$                     | 14) $[n; n+3/7]$ , $n \geq 3$ , $n \in \mathbb{Z}$ |

§5. 1. а)  $x = 1,2$

Если  $\{x\}$  - дробная часть числа  $x$ , то  $[x] + \{x\} = x$ .

Тогда  $[x] + \{x\} + 2[x] = 3,2$ .  $3[x] + \{x\} = 3,2$ . Так как  $3[x]$  - целое  
а  $0 \leq \{x\} < 1$ , то  $\{x\} = 0,2$  и  $3[x] = 3$ . Значит  $x = 1,2$ .

б)  $x = \sqrt[3]{4}$ .

Указание.  $[x] = x - \{x\}$ , где  $0 \leq \{x\} < 1$  - дробная часть;

$x^3 - x + \{x\} = 3$ , откуда  $2 < x(x^2 - 1) \leq 3$ .

2. Первая сумма больше второй на  $m - n$ .

3. Обязательно.

Указание. Если  $[\sqrt[n]{x}] = n$ , то  $n^4 \leq x < (n+1)^4$ . Теперь легко  
доказать, что  $[\sqrt[n]{[\sqrt[n]{x}]}] = n$ .

4.  $(1; 0,2; 2,1)$

5. 3м 75 см.

### Список литературы

1. Алексеева В., Ускова Н. Задачи, содержащие целую и дробную части числа// Математика. 1997. №17. С.59-63.
2. Воронова А.Н. Уравнение с переменной под знаком целой или дробной части// Математика в школе. 2002.№4. С. 58-60.
3. Воронова А.Н. Неравенства с переменной под знаком целой части// Математика в школе. 2002. №2. С.56-59.
4. Галкин Е.В. Нестандартные задачи по математике. Алгебра: Учеб. пособие для учащихся 7-11 кл. Челябинск: «Взгляд», 2004.
5. Дополнительные главы по курсу математики 10 класса для факультативных занятий: Пособие для учащихся/ Сост. З.А. Скопец. М.: Просвещение, 1979.
6. Еровенко В.А., О.В.Михаськова О.В. Методологический принцип Оккама на примере функций целой и дробной частей числа// Математика в школе. 2003. №3 . С.58-66.
7. Кирзимов В. Решение уравнений и неравенств, содержащих целую и дробную часть числа// Математика. 2002 .№30. С. 26-28.
8. Шрайнер А.А. «Задачи районных математических олимпиад Новосибирской области». Новосибирск 2000.
9. Справочник «Математика», Москва «АСТ-ПРЕСС» 1997.
10. Райхмист Р.Б. «Графики функций. Задачи и упражнения». Москва. «Школа – пресс» 1997.
11. Мордкович А.Г., Семёнов П.В. и др. «Алгебра и начала анализа. 10 класс. Часть 2. Задачник. Профильный уровень» Смоленск «Мнемозина» 2007.