

Нелинейность - это просто

[Введение](#)

[Область применимости квантовой механики](#)

[Фундаментальная неопределенность частиц](#)

[Нелинейность](#)

[Кот Шредингера](#)

[Завтра будет дождь](#)

[Проблема выяснения авторства символов](#)

[Выводы](#)

[ЛИТЕРАТУРА](#)

[То что не попало в статью:](#)

Введение

Сегодня существует множество интерпретаций квантовой механики (КМ), среди которых наиболее известной является Копенгагенская интерпретация (КИ), принимаемая большинством учёных, но имеющая ряд нерешённых проблем. Одна из наиболее серьёзных интерпретационных проблем КИ – это проблема коллапса вектора состояния (или редукция фон Неймана), происходящая в процессе измерения [1]. Её также называют «проблемой измерения в квантовой механике» [2]. Согласно КИ, можно рассчитать изменение функции вероятности с течением времени и тем самым получить вероятность какого-то результата измерений в следующий момент времени. При этом само измерение прерывным образом изменяет функцию вероятности: оно выбирает из всех возможных событий именно то, которое фактически совершилось. Это изменение происходит мгновенно и не описывается уравнением Шредингера. Редукция состояния входит в квантовую механику как один из её постулатов, это часть её формализма.

Фактически копенгагенская интерпретация, или постулат редукции, означает, что при измерении состояние системы меняется не так, как требует квантовая механика, нарушается обычная для квантовой механики линейность эволюции. Это ничем не обоснованное предположение делает копенгагенскую интерпретацию эклектичной, логически незамкнутой. Однако с точки зрения практических целей, для расчетов конкретных систем, эта интерпретация вполне пригодна и даже очень удобна, так как соответствует наивному [2] (по существу классическому, неквантовому) представлению о том, что происходит при измерении.

С самого начала точный смысл математических конструкций квантовой механики практически не поддается объяснению на быденном языке. Представление о непредсказуемости поведения микрочастиц шло вразрез со всем опытом и эстетическими пристрастиями физиков. Идеалом считался детерминизм — сведение любого явления к однозначным законам механического движения. Многие ожидали, что в глубине микромира найдется более фундаментальный уровень реальности, а квантовую механику сравнивали со статистическим подходом к описанию газа, который применяется лишь из-за того, что трудно отследить движения всех молекул, а не потому, что те сами «не

знают», где находятся. Эту «гипотезу скрытых параметров» активнее всех защищал Альберт Эйнштейн. Его позиция вошла в историю под броским слоганом: «Бог не играет в кости».

Его оппонент Нильс Бор утверждал, что волновая функция содержит исчерпывающую информацию о состоянии квантовых объектов. Уравнения позволяют однозначно рассчитать ее изменения во времени, и в математическом плане она не хуже привычных физикам материальных точек и твердых тел. Отличие лишь в том, что она описывает не сами частицы, а вероятность их обнаружения в той или иной точке пространства. Можно сказать, что это не сама частица, а ее возможность. Но где именно она обнаружится при наблюдении, предсказать принципиально невозможно. «Внутри» частиц нет никаких недоступных измерению скрытых параметров, определяющих, когда именно им распасться или в какой точке пространства появиться при наблюдении. В этом смысле неопределенность — фундаментальное свойство квантовых объектов. На стороне этой интерпретации была сила «бритвы Оккама»: в ней не предполагалось никаких дополнительных сущностей, которых не было в квантово-механических уравнениях и наблюдениях.

И все же копенгагенская интерпретация безупречна. Главным направлением ее критики стало описание процесса квантового измерения. Когда частица с размытой по большому объему пространства волновой функцией регистрируется экспериментатором в определенном месте, вероятность ее пребывания в стороне от этой точки становится нулевой. А значит, волновая функция должна мгновенно сконцентрироваться в очень небольшой области. Эту «катастрофу» называют коллапсом волновой функции. И она является катастрофой не только для наблюдаемой частицы, но и для копенгагенской интерпретации, поскольку коллапс протекает вопреки уравнениям самой квантовой механики. Физики говорят об этом как о нарушении линейности при квантовом измерении.

Данная статья посвящена исключительно обсуждению такого рода нелинейности, возникающей, когда в некоторый момент времени благодаря измерению возникает информация, радикально изменяется описание эксперимента. Фактически до измерения и после приходится пользоваться принципиально различными уравнениями.

Область применимости квантовой механики

Проблема измерения в КМ, связанная с коллапсом волновой функции, естественным образом разбивается на три независимых подзадачи - невозможности объяснения происходящего, невозможности предсказания результата измерения и нелинейности возникающей при измерении. Будем последовательно решать все три задачи, начнем с первой.

Очевидно, что уравнения КМ никогда не претендовали и не претендуют на объяснение коллапса волновой функции и проблему измерений. Все эти проблемы возникают в экспериментальной физике, поскольку на сегодняшний день просто нет теории и уравнений которые бы давали ответы на эти и связанные с ними вопросы. Если же результаты измерений подвергнуть статистической обработке, то они в точности совпадут с вероятностями предсказанными КМ. Следовательно, КМ и любые её интерпретации не могут дать ответ на оба этих вопроса если будут опираться

исключительно на уравнение волновой функции, в точно в том же виде, что используется в КМ.

В любом случае искать ответы в самой КМ или её интерпретациях совершенно бесполезное занятие. На данный момент с их помощью нельзя ни объяснить, ни предсказать результаты конкретного измерения в опытах с квантовыми частицами. Хотя эти вопросы возникают буквально в ходе каждого эксперимента где участвуют квантовые частицы, ситуация не изменится, пока уравнения не будут изменены. Поскольку мы никаких изменений такого рода не предполагаем, то все задачи и связанные с ними проблемы автоматически переводятся в область теории вероятностей - КМ как бы привлекает внимание к проблемам, которые были у теории вероятностей и раньше, просто никто не обращал на это никакого внимания.

Тем самым, проблема измерения и коллапса волновой функции не должна формулироваться и обсуждаться в терминологии КМ или любой из её интерпретаций. Для обсуждения достаточно теории вероятностей, которая формулирует задачу достаточно просто: до измерения у нас в распоряжении будет описание через функцию вероятностей, а после измерения получаем количественное значение случайной величины, которая принимает в результате опыта одно из множества значений, причём появление того или иного значения этой величины до её измерения нельзя точно предсказать.

Фундаментальная неопределенность частиц

Фундаментальна ли неопределенность поведения квантовых частиц, или она лишь отражает недостаточность наших знаний? Большинство физиков дают утвердительный ответ. Согласно квантовой механике процессы, происходящие в рамках атомов, являются принципиально вероятностными. Учтем эту точку зрения при замене опытов с частицами случайными процессами, такими как подбрасывание монетки, что позволит существенно упростить эксперименты и понять причины возникновения нелинейности во время измерений.

Согласно определению [4] *Вероятностью случайного события A называется отношение числа n несовместимых равновероятных элементарных событий, составляющих событие A , к числу всех возможных элементарных событий N :*

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

где N — количество наблюдений, а n — количество наступлений события A .

Данное определение указывает на способ оценки неизвестной вероятности — путем большого количества однородных и независимых наблюдений, при многократном повторении мы должны получить частоту его появления, близкую к P (тем более близкую, чем больше наблюдений). В КМ все наоборот - дана только вероятность, а наступление элементарного события теория не предсказывает. По вероятности P нельзя определить наступление конкретного элементарного события.

Именно тут и проявляется фундаментальная роль измерения в КМ - измерение предоставляет весь набор наблюдаемых результатов. Никаким другим способом получить этот набор нельзя. Например, наблюдая интерференционную картину на фотопластинке

нельзя предсказать координаты попадания 526-го электрона, но обработав статистически координаты всех электронов получаем картину, предсказываемую КМ. При этом квадрат модуля волновой функции (амплитуда вероятности) никак не будет меняться и вообще не зависит от измерений. Измерения не могут изменить вероятность или как-то на неё повлиять, они дают лишь набор наблюдаемых результатов (нельзя произносить случайных событий) даже если это всего лишь один такой результат.

Формально говоря, элементарное событие — это подмножество пространства исходов случайного эксперимента, которое состоит только из одного элемента; то есть элементарное событие — это всё ещё множество, но не сам элемент. Однако элементарные события обычно записываются как элементы, а не как множества с целью упрощения, когда это не может вызвать недоразумения [7]. Все эти соображения полностью справедливы для экспериментов по теории вероятности, как например подбрасывание монетки. Многие авторы указывают на необходимость в стохастических процессах учитывать понятие наблюдаемости события или известности на некоторый момент информации о том, произошло событие или нет [5,6].

Следовательно, во время измерения происходит не просто получение новой информации, которой ранее не было и которую нельзя вывести чисто аналитически, но также осуществляется подмена совершенно разных по сути понятий - элементарное событие заменяется наблюдаемым результатом (исходом). Теоретик и практик как бы говорят на двух разных языках, один оперирует множествами, а второй - элементами множества. Является ли это причиной нелинейности, о которой так много говорят физики? Скорее всего нет - нелинейность возникает не по причинам, что мы не можем себе представить каждую альтернативу по отдельности или записать все альтернативы сразу все вместе или даже представить себе, что мы сделали выбор одной из альтернатив и запретили или просто не учитываем остальные. Выразительные свойства математики позволяют проделать всё это без каких-либо осложнений, тем более что всеми этими понятиями уже оперирует теория вероятностей. Зато мы можем ответить на вопрос - что происходит с волновой функцией во время измерения, ответ прост - ничего не происходит.

Обычно физики рассуждают следующим образом. Возьмем, к примеру, одиночный радиоактивный атом. По законам квантовой механики он спонтанно распадается в непредсказуемый заранее момент времени. Поэтому его волновая функция представляет сумму двух компонент: одна описывает целый атом, а другая — распавшийся. Вероятность, соответствующая первой, убывает, а второй — растет. Физики в такой ситуации говорят о суперпозиции двух несовместимых между собой состояний. Если проверить состояние атома, произойдет коллапс его волновой функции и атом с определенной вероятностью окажется либо целым, либо распавшимся. Но в какой момент происходит этот коллапс — когда измерительный прибор взаимодействует с атомом или когда о результатах узнает наблюдатель-человек?

Оба варианта выглядят непривлекательно. Из первого следует неприемлемый вывод о том, что атомы измерительного прибора чем-то отличаются от остальных, раз под их влиянием происходит коллапс волновой функции вместо образования запутанного состояния, как должно быть при взаимодействии квантовых частиц. Второй вариант вносит в теорию так нелюбимый физиками субъективизм. Приходится согласиться, что

сознание наблюдателя (тело его с точки зрения квантовой механики — все тот же прибор) непосредственно влияет на волновую функцию, то есть на состояние квантового объекта.

Итак, объяснение происходящего в силу вышесказанного совпадает с выводами некоторых авторов (А.И.Липкин, Д.Н.Клышко) [11] о необоснованности и не имеющими экспериментального подтверждения явлениями “редукции (коллапса) волновой функции”. Очевидно, что прибор может влиять на волновую функцию меняя её некоторым образом, но это изменение никакого отношения к коллапсу не имеет. То, что принято называть коллапсом, есть всего лишь наблюдаемый исход, который только косвенно связан с волновой функцией. Истолкование исходов в терминах волновой функции является ошибкой. Связь между ними в точности такая же как и в случае с подбрасыванием монетки - чем больше исходов знаем, тем точнее можем вычислить вероятность, но зная вероятность выпадения орла мы не можем предсказать каков будет очередной наблюдаемый исход и следующий за ним и все остальные. Даже если каждый раз подбрасывать другую монетку нет никаких оснований утверждать, что вероятность выпадения орла изменилась при падении монетки на плоскую поверхность. Потому измерительный прибор и изменяет волновую функцию, и, одновременно, получает наблюдаемые исходы в соответствии с амплитудой вероятности уже измененной функции. Если бы прибор не оказывал никакого влияния, то волновая функция до и после измерения совпадала. Кроме того, нужно особо отметить, что после измерения изменяется также и форма записи уравнений, поскольку исходы должны записываться не так как волновая функция.

Проблема измерения и коллапса волновой функции оказались завуалированными нелинейностями в цепочке логических рассуждений. Невозможно подобрать уравнение, которое по форме, виду и содержанию было бы одинаковым до и после измерения.

Нелинейность

Получается, что математический аппарат квантовой механики работает лишь в кусочно-непрерывном режиме: от одного измерения до другого. А «на стыках» цепочка логических рассуждений (волновая функция [3]) скачкообразно меняется и продолжает развитие из принципиально непредсказуемого состояния.

Попытаемся понять причины и особенности возникающей нелинейности. Для начала выясним, что означает невозможность продолжить логические рассуждения. Очевидно, что сформулировать все альтернативы и даже представить каждую из альтернатив независимо от остальных вполне возможно. Но чего нельзя сделать без измерения - это узнать какая из альтернатив будет выбрана. Представить в воображении ситуацию выбора отдельной альтернативы тоже можно, но это дает лишь возможность проверить логическую корректность записи. Заменить измерение воображением нельзя, без измерения математическая задача решена быть не может исключительно по причине недостатка информации.

Со времен Лапласа детерминизм постоянно теряет свои позиции. Разработано множество методов манипулирования неопределенными значениями. Теория вероятностей хороший тому пример. Почему же она перестает работать в опытах с атомами? Видимо попытка учесть неопределенность как свойство переменной себя не

оправдывает. Неопределенности координаты и импульса не могут рассматриваться по отдельности друг от друга. Даже взяв их вместе мы не сможем написать уравнение, которое до и после измерения сохраняет свою форму.

Допустим в некотором эксперименте электрон начинает своё движение в пространстве. Пока электрон движется экспериментатор принимает решение будет ли он измерять координату или импульс. Возьмем для простоты вероятность принятия одного из этих решений в точность 50%. Тогда мы сможем неопределенность вносимую человеком добавить к неопределенности элементарных частиц и записать одно волновое уравнение. Это уравнение и только оно будет одинаковым до и после измерения. Прибор может изменить волновую функцию, но не форму её записи. Различие в форме записи наблюдаемых исходов всё равно не избежать, потому что нужно просто не путать волновую функцию с исходом.

Интересной особенностью данного эксперимента является то, что, хотя мы в состоянии мелом прочертить черту, где по одну сторону будет стоять человек, а по другую - измерительный прибор, мы не сможем провести аналогичной границы в нашем теоретическом описании эксперимента. Мы не сможем поделить мир на две части - наблюдаемую систему и наблюдателя, так как и результаты измерений, и сам измеряющий прибор будут существенно зависеть от личных пожеланий участвующего в эксперименте человека. Установка подобных границ основано на предположении, что явление можно рассматривать независимо от того, как и каким прибором его измеряют, а предположение о приборе таково, что он всегда дает одни и те же данные измерений независимо от пожеланий человека ставящего эксперимент.

Интуиция подсказывает, что включение сознания в волновую функцию подобным образом совершенно излишне. Скорее всего просто не получится записать "функцию" сознания при помощи вероятностей, придется существенно усложнять волновую функцию и в результате мы все равно не решаем ни одной из проблем. Зато очевидно следующее, бесполезно рассматривать атомы человека как некий измерительный прибор, а также выбор одной из альтернатив (наблюдаемых исходов) из волновой функции выполняет измерительный прибор, а не сознание человека.

Основные проблемы в таком эксперименте связаны вот с какими рассуждениями. Если бы человек делал выбор до того как вылетает электрон, то мы должны были бы говорить о существенно различных экспериментах, в одном из которых измеряется только координата, а во втором - только импульс. Запись наблюдаемых результатов в этих экспериментах должна существенно различаться поскольку неопределенность координаты и импульса в них различна. Хуже всего то, что до измерения вообще не корректно говорить о координате и импульсе.

Оказывается, что результаты квантомеханического расчета несовместимы с предположением, что наблюдаемые свойства существовали уже до наблюдения. В опытах Аспекта [10] было экспериментально установлено, что неравенство Белла нарушается. Тем самым экспериментально доказано, что микроскопическим системам нельзя (во всяком случае не всегда можно) приписывать состояния как объективно существующие и независимые от проводимых измерений.

Это подводит нас к основной идее проблемы измерения в КМ и причине возникновения нелинейности - сама математика в экспериментах с микрочастицами больше не является независимой абстрактной дисциплиной. Даже представив выбор человека через функцию вероятности мы вынуждены ждать результатов измерения, без которых продолжить логическое рассуждение не представляется возможным. Более того, форма записи и способ рассуждения могут серьезно отличаться от того, как мы рассуждали до измерения. Это объяснило бы причину теоретических неудач КМ - любые описания и объяснения хорошо подходят либо к периоду до измерения, либо после, но не к обоим периодам одновременно. Измерение как бы привносит дополнительную информацию извне, которую никакими действиями внутри самой математики получить нельзя, и которая существенно влияет на форму, способы и законы логических рассуждений. Эти особенности сохраняются в точности до следующего измерения.

Фактически нет никакой необходимости учитывать в уравнениях сознание человека раз результаты наблюдения предоставляют всю необходимую информацию для продолжения последовательных логических рассуждений. Например, раз в эксперименте была измерена координата электрона, то уже не имеет особого значения был ли сделан выбор человеком до вылета электрона или после - это уже не существенно. Очевидно, что по записи уравнения летящего электрона нельзя предсказать желание человека измерить его координату. Кроме того, включение в уравнения Шредингера дополнительной компоненты для учета действий человека представляется слишком большой ценой для сохранения линейности рассуждений, тем более что без проведения измерений всё равно обойтись не получится. Единственное что придется дополнительно контролировать - это отличать выбор одного человека от выбора другого, а также разные выборы одного и того же человека.

Кот Шредингера

В известном эксперименте с котом Шрёдингера[10] можно несколько уточнить и по другому сформулировать вывод. В какой бы момент мы ни открывали ящик, мы увидим либо живого кота (и это будет означать, что атом еще не распался), либо мертвого (и это значит, что атом успел к этому моменту распасться). Однако пока мы не открыли ящик, логика квантовой механики заставляет нас считать, что система (атом + кот) находится в суперпозиции двух состояний: (нераспавшийся атом + живой кот) и (распавшийся атом + живой кот). Парадокс состоит в том, что описание ситуации зависит от того, открыли ли мы ящик, чтобы посмотреть, что в нем находится, или не открывали его.

Будем различать, как это сделал Ю.Вигнер в эксперименте с друзьями, наблюдателя-А до измерения (пока ящик закрыт) и наблюдателя-В после измерения (ящик открыт). Поскольку состояние наблюдателя-А является естественным промежуточным состоянием для наблюдателя-В если эксперимент проводит один человек, можно смело утверждать, что похожая схема характерна для всех экспериментов в квантовой механики. Проблема в том, что не достаточно просто различать описание эксперимента и правила рассуждения до измерения и после, а в том, что эти наблюдатели не являются классическими. То есть, ни сами наблюдатели, ни системы координат с ними связанные, не могут быть заменены измерительным прибором работающим независимо как от

человека экспериментатора, так и от измеряемых физических свойств исследуемого объекта.

Представим себе измерительный прибор, который оценивает состояние кота в открытом ящике. Как нам объяснить, что этот прибор в одном и том же эксперименте для одного и того же кота, у наблюдателя-В предоставляет нужные данные измерения, а у наблюдателя-А никаких данных не дает? Такого быть не может, поскольку прибор должен предоставлять данные измерения сразу всем наблюдателям, либо всем наблюдателям одинаково никаких данных не предоставлять. Прибор не может выполнять свою функцию в зависимости от того, в чьих руках он находится и что человек захотел с ним сделать. Тем самым наблюдатели А и В - живые мыслящие люди, и их никак нельзя сводить к классическому виду наблюдателя, под которым понимается измерительный прибор предоставляющий данные измерений в некоторой системе координат.

Тем самым мы опять приходим к необходимости различать разных людей - наблюдателей и точно указывать относятся ли теоретические рассуждения к периоду до измерения или они относятся к периоду после измерения. Фактически акт измерения кота требует не только изменений в записи уравнения, но по существу ломает весь традиционный механизм введения и использования теоретических абстракций.

Завтра будет дождь

Основная идея статьи заключается в точке зрения, что все рассматриваемые проблемы не характерны исключительно для КМ, а встречаются буквально повсеместно.

Единственной причиной нелинейности КМ является необходимость в обязательном проведении измерения. Никакой другой причины нет. Обычно для теоретической физики измерение служит для ответа вопрос верна теория или не верна, и с какой точностью теория может предсказывать наблюдаемые явления. В случае КМ ситуация кардинально другая - измерение предоставляет информацию, без которой в принципе невозможно продолжить логические рассуждения.

Хотя данные результатов наблюдения не представляют из себя чего-то из ряда вон выходящего, сам факт появления важной информации в середине рассуждения противоречит самой концепции математической строгости, строгость запрещает изменять исходные предпосылки, добавлять постулаты и нарушать правила рассуждения. Эверетт [8] обращает особое внимание на то, что, в соответствии с принципом суперпозиции, в результате измерения квантовый объект может быть обнаружен в одном из множества доступных состояний, и его дальнейшая эволюция будет протекать по-разному в зависимости от того, в каком состоянии он был обнаружен.

Давайте вернемся к эксперименту, где экспериментатор после начала движения электрона принимает решение измерять координаты или импульс. Строгость требует, чтобы еще до начала опыта было известно, что собираются измерять - координату или импульс, иначе невозможно говорить о том, в какой форме будет представлен результат и с какой точностью.

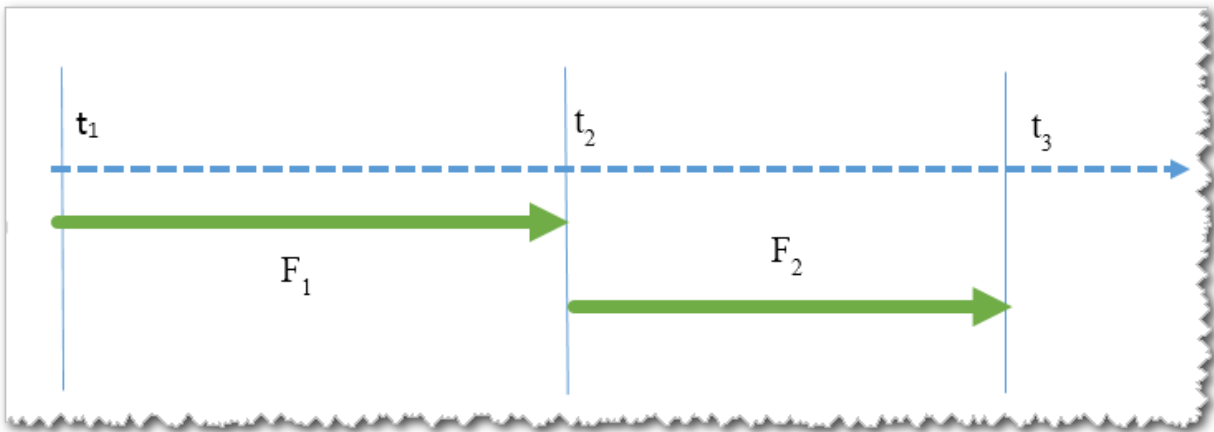


Рис.1. t_1 - начало эксперимента, t_2 - измерение, t_3 - окончание эксперимента или следующее измерение, F_1 - рассуждения основанные на одной системе постулатов, F_2 - постулаты изменились и началась другая цепочка рассуждений.

На рис.1 в момент t_1 мы этой информацией не располагаем, она появляется только в момент t_2 , вместе с данными измерения. Потому с точки зрения строгости в момент t_2 экспериментатор начинает новое рассуждение исходя из несколько иных предпосылок и постулатов чем в начале эксперимента. Это свидетельствует о нарушении строгости, сравнимой с подстройкой теории так, чтобы она описывала результаты наблюдения. Проблема состоит в том, что такие подстройки и доводки до ума приходится делать в каждом эксперименте с квантовой механикой, где действия экспериментатора не известны с самого начала и результаты эти действий существенно влияют на наблюдаемые результаты, например меняет форму их представления.

Попасть в похожую ситуацию легко, например достаточно задуматься об истинности фразы “завтра будет дождь”. Точно предсказать наступление определенного исхода до возникновения случайного события невозможно. Строгость не представляет нам возможности вставить истинность утверждения посередине рассуждения. Допускается только вывод истинности из исходных предпосылок, либо постулированное значения истинности данной фразы.

Оба варианта на практике бесполезны. Зная прогноз погоды, место и время предполагаемого события нельзя со 100% точностью говорить о гарантированном исходе. С постулированием дело не намного лучше. Ведь нужно не просто рассмотреть одну из альтернатив, обязательно нужно запретить все оставшиеся альтернативы с гарантией, что через сутки наблюдение будет полностью соответствовать введенному ранее постулату. Это выполнимо только если воспользоваться машиной времени, слетать в будущее и узнать результат, опять сесть в машину времени вернуться в настоящее и задать постулат в соответствии со знанием будущих событий.

Только так можно сохранить непрерывную цепочку рассуждений, в которой все необходимые постулаты введены до начала рассуждений. Иначе придется начинать совершенно новую цепочку рассуждений в момент когда измерение предоставит

достоверную информацию о наличии либо отсутствии дождя в определенном месте и в определенное время.

Проблема выяснения авторства символов

В КМ невозможно одновременно достигнуть и строгости, и линейности логических рассуждений. Похожая ситуация наглядно продемонстрирована в эксперименте, где необходимо точно определить автора символа. Постановка опыта подробно рассмотрена в [12]. Особенностью данного опыта является то, что субъективный выбор, математические построения, физические характеристики и процесс измерения явления представляют собой одновременно протекающие во времени процессы и игнорирование любого из них делает невозможным решение задачи в рамках традиционной математики.

В этой задаче нелинейность возникает на каждом шаге рассуждений. То есть, при добавлении или изменении каждого нового символа или группы символов следует проводить измерения и изменять список исходных постулатов, чтобы правильно задать автора каждого символа.

Выводы

Нелинейность - это просто, достаточно предоставить экспериментальной физике право определять истинность утверждений, выяснять корректность логических построений и в идеале - изменять правила, постулаты и законы логических рассуждений непосредственно во время самих этих рассуждений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cramer John G. The Transactional Interpretation of Quantum Mechanics // *Reviews of Modern Physics*. 1986. Vol. 58. P. 647–688.
2. Менский М.Б. Квантовая механика, сознание и мост между двумя культурами // *Вопросы философии*. 2004. №6. С.64–74.
3. Александр Сергеев. Век параллельных вселенных, №10 (2829) | Октябрь 2009 // Рубрика «Наука» <http://www.vokrugsveta.ru/vs/article/6790/>
4. Определения вероятности <https://ru.wikipedia.org/wiki/Вероятность>
5. А.Н.Ширяев. Основы стохастической финансовой математики, том 1, стр. 48-49, 103-105
6. Об определении сигма-алгебры.
<http://nsu.ru/phorum/read.php?f=6&i=16245&t=16241>
7. Пространство элементарных событий
https://ru.wikipedia.org/wiki/Пространство_элементарных_событий
- 8 Т. П. Шестакова. Необходимо ли квантование гравитации для логического завершения квантовой теории? <http://phys.rsu.ru/~shestakova/shestakova1.html>
9. Пенроуз Р., Шимони А., Картрайт Н., Хокинг С. П25 Большое, малое и человеческий разум / Пер.с англ.—М.: Мир, 2004.—191 с, ил.—(Рубеж и науки)
http://yanko.lib.ru/books/natural/large_%20the_small_and_the_human_mind.pdf

10. [М.Б. Менский](#) Квантовая механика: новые эксперименты, новые приложения и новые формулировки старых вопросов <http://ufn.ru/ru/articles/2000/6/c/>

11. Отклики читателей на статью М.Б. Менского «Квантовая механика: новые эксперименты, новые приложения и новые формулировки старых вопросов»
<http://ufn.ru/ru/articles/2001/4/f/>

12 Березуев Р.И. Про котов и мышей. 2014
https://docs.google.com/document/d/1Xi9vDJc_1u0nKcfVAQxFk68HLk_XU60Hju99YsW0CXE/edit

То что не попало в статью: