Теоремы

План:

1. Отношения следования и равносильности между предложениями

2. Структура теоремы. Виды теорем

3. Необходимые и достаточные условия. Рассуждения от противного. Правильные и неправильные рассуждения.

1. Отношения следования и равносильности между предложениями

Рассмотрим две высказывательные формы: «число x кратно 4» и «число x кратно 2», заданные на множестве N натуральных чисел.

Как связаны между собой эти два предложения?

Можно сказать так: из того, что число x кратно 4, следует, что x кратно 2. Это мы можем утверждать, потому что знаем – при всех значениях x, при которых истинно предложение «число x кратно 4», будет истинно и предложение «число x кратно 2». В этом случае говорят, что данные предложения находятся **в отношении логического следования.**

Определение. Высказывательная форма B(x) следует из высказывательной формы A(x), если B(x) обращается в истинное высказывание при всех тех значениях x, при которых A(x) истинна.

Если A и B – высказывания, тогда говорят, что из A следует B, если всякий раз, когда A истинно, истинно и B.

Для обозначения отношения логического следования используется знак ⇒. Соединяя две высказывательные формы A(x) и B(x) таким знаком, мы получаем высказывание A(x) ⇒ B(x), прочитать которое можно по разному:

1) Из A(x) следует B(x).

2) Всякое A(x) есть B(x).

3) Если A(x), то B(x).

4) B(x) есть следствие A(x).

5) A(x) есть достаточное условие для B(x).

6) B(x) есть необходимое условие для A(x).

Например, утверждение о том, что из предложения «число x кратно 4», следует предложение «число x кратно 2», можно сформулировать еще так:

- **Всякое число**, которое кратно 4, кратно и 2.

- Если число кратно 4, то оно кратно и 2.

- Кратность число 2 есть следствие кратности его 4.

- Кратность числа 4 есть достаточное условие для его кратности 2.

- Кратность числа 2 есть необходимое условие для его кратности 4.

Последние два предложения часто формулируют в следующей форме:

- Для того чтобы число было кратно 2, достаточно, чтобы оно было кратно 4.

- Для того чтобы число было кратно 4, необходимо, чтобы оно было кратно 2

Так как одно и то же утверждение «из A(x) следует B(x)» можно прочитать по-разному, надо уметь переходить от одной его формулировки к другой, не меняя смысла.

Задача 1. Данные предложения переформулируйте, используя различные способы прочтения утверждения $A(x) \Rightarrow B(x)$:

Всякий квадрат является прямоугольником.

Решение.

A(x) – «четырехугольник – квадрат» и B(x) – «четырехугольник – прямоугольник».

1) Из того, что четырехугольник – квадрат, следует, что он прямоугольник.

2) Если четырехугольник – квадрат, то он прямоугольник

3) Четырехугольник является прямоугольником – это следствие того, что четырехугольник – квадрат.

4) Для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, достаточно, чтобы он был квадратом.

5) Для того чтобы четырехугольник был квадратом, необходимо, чтобы он был прямоугольником.

Как и любое высказывание, предложение $A(x) \Rightarrow B(x)$ может быть истинным или ложным. Но так как оно может быть сформулировано в виде «всякое A(x) есть B(x)», то его истинность устанавливается путем доказательства, а с помощью контрпримера – что оно ложно.

Определение. Предложения A(x) и B(x) равносильны, если из предложения A(x) следует предложение B(x), а из предложения B(x) следует предложение A(x).

Для обозначения отношения равносильности используется знак $\Leftrightarrow$. Соединяя две высказывательные формы A(x) и B(x) таким знаком, мы получаем высказывание $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, прочитать которое можно по-разному:

1) A(x) равносильно B(x).

2) A(x) тогда и только тогда, когда B(x).

3) A(x) – необходимо и достаточное условие для B(x).

4) B(x) - необходимое и достаточное условие для A(x).

Например, утверждение о том, что предложение «число делится на 3» и «сумма цифр в записи числа делится на 3» равносильны, можно сформулировать еще так:

- Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр в его записи делится на 3.

- Для того чтобы число делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр в его записи делилась на 3.

С теоретико-множественной точки зрения высказывание $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ означает, что если T_A – множество истинности высказывательной формы A(x), а T_B – множество истинности высказывательной формы B(x), то $T_A = T_B$.

Например, уравнения $3x(x-2) = 0$ и $3x(x-2)(x+3) = 0$ равносильны на множестве целых неотрицательных чисел, потому что множество их решений {0, 2}.

Заметим, что мы рассматриваем понятия логического следования и равносильности для одноместных высказывательных форм. Для предложений, содержащих две и более переменных, эти понятия определяются аналогично.

Отметим также, что знак $\Leftrightarrow$ мы использовали раньше, в частности, рассматривая логическую структуру явных определений понятий. Мы установили, что ее можно представить в виде $a \Leftrightarrow в$. Определение порождает два равносильных предложения.

Знак $\Leftrightarrow$ используют в записи правил построения отрицания высказываний. Например, $A \wedge B \Leftrightarrow A \vee B$. В этом случае речь идет о равносильности высказываний определенной формы. При этом считают, что предложения равносильны, если они одновременно истинны, либо одновременно ложны. Другими словами, если их значения истинности совпадают при одинаковых наборах значений высказываний A и B.

2. Структура теоремы. Виды теорем.

Понятие логического следования позволяет уточнить ряд вопросов, связанных с предложениями, которые в математике называют **теоремами**.

Теорема – это высказывание, истинность которого устанавливается посредством рассуждения (доказательства).

С логической точки зрения теорема представляет собой высказывание вида $A \Rightarrow B$, где A и B – высказывательные формы с одной или несколькими переменными. Предложение A называют **условием** теоремы, а предложение B – ее **заключением**.

Например, условием теоремы «если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали раны» является предложение «четырехугольник – прямоугольник, а заключением – предложение «в таком четырехугольнике диагонали равны».

В рассмотренном примере теорема была сформулирована с помощью слов «если …, то …». Но, как нам известно, утверждение $A \Rightarrow B$ можно сформулировать и по-другому.

Например, рассмотренную теорему можно сформулировать так: «во всяком прямоугольнике диагонали равны» или «для того, чтобы четырехугольник был прямоугольником, необходимо, чтобы его диагонали были равны». Есть и другие способы, но удобнее теорему формулировать в виде «если …, то …», поскольку сразу видно ее условие (что дано) и заключение (что надо доказать).

В математике кроме **теорем** используются предложения, называемые **правилами и формулами**. Выясним, чем они отличаются от теоремы.

Рассмотрим, например, такую теорему из школьного курса алгебры: «если a – любое число и k, n – натуральные число, то справедливо равенство $a^n \cdot a^h = a^{n+h}$». Для того чтобы этой теоремой удобнее было пользоваться, при выполнении различных преобразований ее формулируют **в виде правила**: «при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются» или записывают только формулу.

Учитель должен уметь разворачивать изучаемые в начальной школе правила (формулы) и формулировать соответствующие им теоремы. Например, правило деления суммы на число: «для того чтобы разделить сумму на число, можно разделить на это число каждое из слагаемых и полученные результаты сложить». К этой формулировке иногда добавляют **формулу:** **$(a + b): c = a : c + b: c$.** Так как этот материал изучают в начальной школе, то надо отчетливо понимать, что числа могут быть только целыми неотрицательными, причем $c \neq 0$. Кроме того, воспользоваться правой частью этого равенства можно при условии, что a кратно c и b кратно c.

Для всякой теоремы вида **«если A, то B»** можно сформулировать предложение **«если B, то A»**, которое называют **обратным данному**. Однако не всегда это предложение является теоремой. Рассмотрим, например, теорему: «если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны». Построим предложение, обратное данному: «если в четырехугольнике диагонали равны, то четырехугольник является прямоугольником». Это высказывание ложное, в чем можно убедиться, приведя контрпример: в равнобедренной трапеции диагонали равны, но трапеция не является прямоугольником.

Рассмотрим теперь теорему «в равнобедренном треугольнике углы при основании равны». Обратное ей предложение таково: «если в треугольнике углы при основании равны, то этот треугольник – равнобедренный». Оно, как известно, истинное и поэтому является теоремой. Ее называют **теоремой, обратной данной**.

Для всякой теоремы вида «если A, то B» можно сформулировать предложение «если не A, то не B», которое называют противоположным. Но не всегда это предложение является теоремой. Например, предложение, противоположное теореме «если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны», будет ложным: «если четырехугольник не является прямоугольником, то в нем диагонали не равны».

В том случае, если предложение, противоположное данному, будет истинно, его называют **теоремой, противоположной данной**.

Таким образом, если для теоремы $A \Rightarrow B$ сформулировать обратное или противоположное предложения, то их надо доказывать (и тогда их можно называть соответственно обратной и противоположной теоремами) или опровергать.

Для всякой теоремы вида «если A, то B» можно сформулировать предложение «если не B, то не A», которое называют обратным противоположному. Например, для теоремы «если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны» предложение, обратное противоположному, будет таким: «если в четырехугольнике диагонали не равны, то он не является прямоугольником». Это, как известно, предложение истинное и, следовательно, является теоремой. Ее называют **обратно противоположной данной.**

Вообще для какой бы теоремы мы ни формулировали предложение, обратное противоположному, оно всегда будет теоремой, потому что имеется следующая равносильность: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$.

Эту равносильность называют **законом контрапозиции**. Мы принимаем его без доказательства. Согласно этому закону, предложение, обратно противоположное какой-либо теореме, также является теоремой, и, значит, вместо данной теоремы можно доказывать теорему, обратно противоположную данной.

Кроме того, из закона контрапозиции следует, что предложение, обратное данному, и предложение, противоположное данному, одновременно истинны либо одновременно ложны. Поэтому, рассматривая их, достаточно доказать (или опровергнуть) какое-нибудь одно; тем самым будет доказано (опровергнуто) другое.

Заметим, что если для данной теоремы $A \Rightarrow B$ существует обратная $B \Rightarrow A$, то их можно соединить в одну $A \Leftrightarrow B$, и тогда в формулировке будут использованы слова «необходимо и достаточно», «тогда и только тогда, когда». Например: «треугольник будет равнобедренным тогда и только тогда, когда в нем углы при основании равны».

С другой стороны, если теорема имеет вид $A \Leftrightarrow B$, то это значит, что она состоит из двух взаимно обратных теорем $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$ и, следовательно, ее доказательство сводится к доказательству двух указанных теорем.

Заметим также, что если условие или заключение данной теоремы представляет собой конъюнкцию или дизъюнкцию, то, чтобы получить предложение, противоположное данному, нужно учитывать правила построения отрицания конъюнкции или дизъюнкции. Например, дана теорема «если число делится на 3 и 4, то оно делится на 12». Предложение, противоположное данному, можно сформулировать так: «если число не делится на 12, то оно не делится на 3 или не делится на 4».