

SESIÓN DE APRENDIZAJE 04

*Análisis de procesos
continuos: Suma de una
Progresión Geométrica
Infinita*



15/08/26

IE. "JOSÉ GÁLVEZ EGÚSQUIZA"

Adaptada por: Prof. Carlos Guarniz

SESIÓN DE APRENDIZAJE N.º 04

I. DATOS INFORMATIVOS

- **Institución Educativa:** "José Gálvez Egúsquiza" - Pichugán
- **Área Curricular:** Matemática
- **Grado y Sección:** 5.º Grado de Secundaria (Ciclo VII)
- **Unidad Didáctica:** Unidad 3
- **Duración:** 2 horas pedagógicas (90 minutos)
- **Docente:** Lic. Carlos Guarniz
- **Fecha:** 25 de agosto de 2026

II. TÍTULO DE LA SESIÓN

"Análisis de procesos continuos: Suma de una Progresión Geométrica Infinita"

III. PROPÓSITO DE LA SESIÓN

- **Intención pedagógica de la sesión:** Lograr que los estudiantes deduzcan, analicen e interpreten la suma de una progresión geométrica decreciente infinita mediante la condición $|r| < 1$, aplicando la fórmula matemática $S = a_1/(1 - r)$ para modelar procesos de desgaste, depreciación de maquinarias y descomposición continua de insumos en el contexto rural y agropecuario de Pichugán.
- **Relación con el desarrollo de la competencia:** Esta sesión moviliza de manera integral la competencia **"Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio"**. A través de las actividades, los estudiantes combinan sus capacidades para traducir datos a expresiones algebraicas y gráficas, comunicar su comprensión sobre las relaciones algebraicas, usar estrategias para encontrar reglas generales y argumentar afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia al fundamentar el comportamiento del límite de una suma infinita.

IV. CRITERIOS DE EVALUACIÓN

(Derivados del Estándar de Aprendizaje del Ciclo VII del CNEB y de los desempeños del grado)

1. **Establece relaciones entre datos y regularidades de situaciones de decremento continuo**, traduciéndolas a expresiones de suma de una progresión geométrica infinita.
2. **Evalúa y determina la condición de convergencia ($|r| < 1$)** de una progresión geométrica decreciente infinita.
3. **Aplica estrategias heurísticas y procedimientos algebraicos** para calcular la suma de infinitos términos mediante la fórmula $S = a_1/(1 - r)$.

4. **Justifica afirmaciones sobre el comportamiento convergente** de procesos continuos y depreciaciones con base en modelos algebraicos.

V. EVIDENCIA DE APRENDIZAJE

- **Producción procesal (Cuaderno de trabajo y Papelógrafo): Representación tabular, gráfica y deducción analítica de la suma infinita** aplicada a la pérdida de rendimiento residual de herramientas agrícolas o depreciación de insumos.
- **Producto individual (Ficha de Aprendizaje): Resolución argumentada de la ficha de aprendizaje** que contiene 10 situaciones problemáticas contextualizadas sobre progresiones geométricas infinitas.

VI. INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

- **Tipo de instrumento:** Lista de Cotejo para Evaluación Formativa.

Criterios de Evaluación	Logrado	En Proceso	No Logrado	Observaciones / Sugerencias
1. Identifica el primer término (a_1) y la razón (r) en situaciones de suma infinita.				
2. Verifica la condición de convergencia ($ r < 1$) antes de operar.				
3. Aplica correctamente la fórmula $S = a_1/(1 - r)$ para hallar el valor acumulado límite.				
4. Argumenta el comportamiento algebraico del límite cuando n tiende al infinito.				

VII. SECUENCIA DIDÁCTICA

1. INICIO (20 minutos)

- **Motivación y Saberes Previos:**

- **El docente saluda cordialmente a la clase** y plantea una situación práctica del entorno de Pichugán:

"Imaginemos que en una parcela de Pichugán se aplica un abono orgánico concentrado. En el primer mes libera 10 kg de nutrientes al suelo. Por efectos de lixiviación y desintegración, cada mes subsecuente libera la mitad de lo liberado el mes anterior (10 kg, 5 kg, 2,5 kg, 1,25 kg, ...)."
- **Se realizan las siguientes preguntas exploratorias:**
 - ¿Qué tipo de secuencia forman estos valores?
 - ¿Cuál es la razón (r) entre cada mes?
 - ¿Llegará algún día a liberar cero nutrientes o continuará infinitamente dividiéndose en cantidades cada vez más pequeñas?
- **Problematización y Conflicto Cognitivo:**
 - **El docente lanza el reto:**

"Si el proceso de liberación continuara por un tiempo infinitamente largo, ¿la cantidad total acumulada de nutrientes liberados sería un número infinito o tendrá un límite fijado al cual se aproxima sin superarlo nunca? ¿Cómo se calcula la suma de infinitos números?"
- **Comunicación del Propósito y Organización:**
 - **El docente declara el propósito:** "Hoy aprenderemos a identificar las condiciones para que una progresión geométrica tenga suma infinita y aplicaremos la fórmula de la suma de una P.G. decreciente infinita para resolver problemas sobre depreciación, desgaste y procesos continuos en nuestra comunidad."
 - **Se recuerdan los acuerdos de convivencia** orientados al trabajo colaborativo, la escucha activa y el respeto mutuo.

2. DESARROLLO (55 minutos)

Procesos Didácticos del Área de Matemática:

- **Fase 1: Comprensión del problema**
 - **Se presenta la situación problemática en la pizarra:**

Situación: En la I.E. "José Gálvez Egúsquiza" se analiza el desgaste de una motobomba utilizada para el riego de cultivos. En su primer año de funcionamiento opera 1000 horas. Cada año posterior, por desgaste de sus piezas, funciona exactamente las $\frac{2}{3}$ partes del tiempo que operó el año anterior. Si la motobomba se mantuviera funcionando indefinidamente, ¿cuál es el límite total de horas de servicio que podrá ofrecer a la comunidad?

- Los estudiantes analizan el enunciado en pares e identifican:
 - Primer término (a_1): 1000 horas
 - Razón geométrica (r): $2/3$
 - Cantidad de términos (n): Infinitos (∞).
- Fase 2: Búsqueda y ejecución de estrategias
 - Los estudiantes escriben la suma de la P.G. finita estudiada en la sesión anterior:

$$S_n = a_1(1 - r^n)/(1 - r)$$
 - Analizan qué ocurre cuando n se hace un número sumamente grande (∞):
 - Como $r = 2/3 \approx 0,666\dots$, calculan valores en la calculadora para potencias de r :
 - $(2/3)^2 = 4/9 \approx 0,44$
 - $(2/3)^{10} \approx 0,017$
 - $(2/3)^{50} \approx 0,00000000015$
 - Deducción guiada por el docente: Concluyen que cuando el número de términos n tiende al infinito y $|r| < 1$, la expresión r^n se aproxima a cero ($r^n \rightarrow 0$).
 - Formalización de la fórmula:

$$S = a_1(1 - 0)/(1 - r) \rightarrow S = a_1/(1 - r)$$
- Fase 3: Representación, Formalización e Institucionalización
 - Se aplica la fórmula formalizada al problema de la motobomba:

$$S = 1000/(1 - 2/3) = 1000/1/3 = 1000 * 3 = 3000 \text{ horas}$$
 - Síntesis formalizada en el cuaderno:
 - **Progresión Geométrica Convergente:** Ocurre únicamente cuando el valor absoluto de la razón es estrictamente menor que 1 ($|r| < 1$ o $-1 < r < 1$).
 - **Fórmula de la Suma Infinita:** $S = a_1/(1 - r)$.
 - **Progresión Geométrica Divergente:** Si $|r| \geq 1$, la suma de infinitos términos crece o decrece sin límite (tiende a $\pm\infty$), por lo que no existe una suma finita.
- Fase 4: Reflexión y Transferencia
 - El docente genera un espacio de discusión:

- *¿Qué pasaría si la razón fuera $r = 1,5$? ¿Se podría aplicar la misma fórmula?*
- *¿Cómo se relacionan las sucesiones geométricas infinitas con las fracciones generatrices de números decimales periódicos?*
- **Los estudiantes transfieren lo aprendido** resolviendo situaciones adicionales de su entorno.

3. CIERRE (15 minutos)

- **Sistematización y Evaluación:**
 - **Se realiza un resumen visual en la pizarra** destacando las diferencias entre sumas finitas e infinitas convergentes.
 - **Se hace entrega de la Ficha de Aprendizaje** para consolidar los aprendizajes alcanzados.
- **Metacognición:**
 - *¿Qué significa conceptualmente que la suma de infinitos términos dé un resultado finito?*
 - *¿Qué condición imprescindible debe cumplir la razón r para que exista suma infinita?*
 - *¿De qué manera nos ayuda este modelo matemático a tomar decisiones financieras sobre la maquinaria en Pichugán?*

VIII. RECURSOS Y MATERIALES

- **Materiales educativos:** Pizarra, plumones, papelógrafos, regla, calculadoras científicas.
- **Recursos impresos y/o digitales:** Ficha de aprendizaje con 10 problemas impresos, Texto de Matemática 5.º de Secundaria (Minedu, pág. 108).

IX. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

- **Estrategias inclusivas y adecuaciones previstas:**
 - **Atención a ritmos de aprendizaje:** A los estudiantes que requieran afianzar las operaciones con fracciones se les proporciona un esquema gráfico paso a paso para calcular la resta $1 - r$ en el denominador.
 - **Desafíos de extensión:** Para los estudiantes con ritmo avanzado, se proponen retos de conversión de decimales periódicos mixtos a fracciones usando el modelo de suma infinita.
 - **Soporte visual:** Empleo de gráficos de barras decrecientes que muestran cómo el área total converge a un rectángulo finito.

X. RETROALIMENTACIÓN

- **Tipo de retroalimentación prevista:** Retroalimentación Formativa por Descubrimiento o Reflexión.
- **Orientaciones para la mejora del aprendizaje:**
 - Si un estudiante intenta aplicar la fórmula cuando $r \geq 1$, el docente intervendrá orientando: "Observa los términos: 2, 4, 8, 16, 32, ... Si sumamos infinitos términos que son cada vez más grandes, ¿el resultado se acercará a un número fijo o crecerá sin límite? ¿Cumple $r = 2$ la condición $|r| < 1$?"
 - **Acompañamiento explícito** en la simplificación de fracciones compuestas.

XI. BIBLIOGRAFÍA

1. **Ministerio de Educación del Perú (MINEDU).** (2016). *Programa Curricular de Educación Secundaria: Área de Matemática*. Lima: Minedu.
2. **Ministerio de Educación del Perú (MINEDU).** (2026). *Texto de Matemática 5.º de Secundaria* (pág. 108). Lima: Minedu.
3. **Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S.** (2017). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo* (7.ª ed.). Cengage Learning.
4. **Haussler, E. F., & Paul, R. S.** (2015). *Matemáticas para administración y economía*. Pearson Educación.

FICHA DE APRENDIZAJE N° 04: ANÁLISIS DE PROCESOS CONTINUOS Y SUMA GEOMÉTRICA INFINITA

Estudiante: _____ Grado y Sección: _____
5.º de Secundaria | Fecha: __/__/2026

Propósito:

Deducir, evaluar y aplicar la fórmula de la suma de una progresión geométrica infinita ($S = a_1(1 - r)$) para modelar procesos de desgaste, depreciación y fenómenos continuos en el contexto de la comunidad rural.

Fórmula y Condición de Referencia:

$$S = a_1/(1 - r) \text{ válida únicamente si } |r| < 1 \quad (-1 < r < 1)$$

SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

Problema 1 (Cálculo directo de suma infinita)

Dada la siguiente progresión geométrica infinita:

12, 6, 3, $3/2$, $3/4$, ...

- a) **Identifica** el primer término (a_1) y calcula la razón (r).
- b) **Verifica** si cumple la condición de convergencia ($|r| < 1$).
- c) **Aplica** la fórmula y determina el valor exacto de la suma infinita (S).

Problema 2 (Análisis de convergencia y divergencia)

Determina cuáles de las siguientes progresiones geométricas infinitas poseen una suma finita. Justifica tu respuesta evaluando la razón r en cada caso:

- a) 5, 15, 45, 135, ...
- b) 100, 20, 4, $4/5$, ...
- c) 8, -4, 2, -1, $1/2$, ...

Problema 3 (Desgaste continuo de herramientas de labranza)

Un arado mecánico pierde efectividad en su profundidad de corte. El primer año penetra hasta 30 cm. Debido al desgaste del metal no reemplazado, en cada año siguiente alcanza solo el 90% ($r = 0,9$) de la profundidad adicional útil alcanzada el año anterior.

- a) **Escribe** los primeros 4 términos de la serie de avances adicionales.
- b) **Calcula** el límite total acumulado de la profundidad útil si se utilizara indefinidamente.

Problema 4 (Rebote de una pelota - Modelo físico en Pichugán)

Durante un juego en el patio de la I.E. "José Gálvez Egúsquiza", se deja caer una pelota de goma desde una altura inicial de 12 metros. En cada rebote, la pelota alcanza exactamente las $\frac{3}{4}$ partes de la altura desde la que cayó.

- **a) Calcula** la distancia total recorrida por la pelota únicamente en sus trayectorias de descenso infinitas.
- **b) Calcula** la distancia total absoluta (ascensos + descensos) recorrida por la pelota hasta quedar completamente en reposo.

Problema 5 (Fracción generatriz mediante suma infinita)

Expresa el número decimal periódico puro $0,777\ldots$ ($0,\text{periodo}(7)$) como una suma geométrica infinita:

$$0,\text{periodo}(7) = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \ldots$$

- **a) Identifica** el primer término (a_1) y la razón (r) de la serie.
- **b) Aplica** la fórmula de la suma infinita y demuestra que la fracción generatriz resultante es $\frac{7}{9}$.

Problema 6 (Depreciación de un molino de granos)

La asociación de productores de Pichugán adquiere un molino comunal. En el primer año genera una utilidad neta de S/ 2400. Por costos de mantenimiento que aumentan año a año, la utilidad neta de cada año posterior equivale a las $\frac{4}{5}$ partes de la utilidad del año anterior.

- **a) Plantea** la expresión de la suma infinita de utilidades.
- **b) Calcula** la ganancia total máxima proyectada que generará el molino a lo largo de toda su vida útil.

Problema 7 (Descomposición de materia orgánica)

Un estudio agronómico en Pichugán evalúa la descomposición del compost. Durante la primera semana se descomponen 16 kg de materia orgánica. En cada semana siguiente se descompone la mitad ($\frac{1}{2}$) de la cantidad descompuesta en la semana previa.

- **a) Determina** cuántos kilogramos en total se habrán descompuesto al cabo de un tiempo indefinido.
- **b) Interpreta** el resultado si la masa inicial de compost colocado era de 32 kg.

Problema 8 (Cálculo del primer término dada la suma infinita)

Se sabe que una progresión geométrica decreciente infinita tiene una razón $r = 1/3$ y su suma infinita es $S = 81$.

- a) **Sustituye** los datos en la fórmula de la suma infinita $S = a_1/(1 - r)$.
- b) **Despeja y halla** el valor del primer término (a_1).

Problema 9 (Geometría fractal - Áreas infinitas)

Se tiene un terreno cuadrado de 100 m^2 de área. Se divide en 2 partes iguales y se toma una mitad. La mitad restante se vuelve a dividir en 2 partes iguales y se toma una parte, y así sucesivamente de manera infinita.

- a) **Escribe** la secuencia de las áreas tomadas: 50 m^2 , 25 m^2 , $12,5 \text{ m}^2$, ...
- b) **Demuestra analíticamente**, aplicando la fórmula de la suma infinita, que la suma de todas las partes tomadas es exactamente igual a los 100 m^2 del terreno original.

Problema 10 (Reto analítico: Razón negativa y oscilante)

Dada la siguiente progresión geométrica infinita con términos de signo alternado:

18, -6, 2, -2/3, 2/9, ...

- a) **Halla** el valor de la razón r .
- b) **Verifica** si cumple la condición de convergencia $|r| < 1$.
- c) **Calcula** el valor exacto al cual converge la suma infinita (S).