 Universidad Carlos III de Madrid	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2024-2025 MATERIA: MATEMÁTICAS II	B
---	--	----------

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los cuatro bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2,5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. (2,5 puntos) En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:

- El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres.
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.

Resolución

Sean x, y, z el nº de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos, respectivamente.

Usando el enunciado llegamos al sistema

$$\begin{cases} 0,8x + 0,5 \cdot 2y + 0,4 \cdot 3z = 80 \\ \frac{y}{3} = \frac{x+z}{5} \\ 2z = x + y - 5 \end{cases} \quad \cdot 5 \quad \begin{cases} 4x + 5y + 6z = 400 \\ 3x - 5y + 3z = 25 \end{cases}$$

La matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 400 & 3 \\ -5 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 380 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ -4f_3 \\ 3f_3 - f_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 380 & 0 \\ 8 & -9 & 15 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 8f_1 - f_2 \\ (0 \ 1 \ 1) \end{matrix}$$

que corresponde al

sistema $\begin{cases} y + 14z = 380 \\ 121z = 3025 \end{cases} \rightarrow z = \frac{3025}{121} = 25$ $x + y - 2z = 5$. En la 1ª ecuación, $y = 380 - 14 \cdot 25 = 30$. En la 3ª ecuación,

$x = 5 - 30 + 2 \cdot 25 = 25$. El equipo lanzó 25 lanzamientos de un punto, 30 de dos y 25 de tres puntos

Pregunta 1.2. Sean la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3. Se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular el polinomio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ y hallar las raíces reales del polinomio.

Resolución

$$\det \det [\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}] = \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (4 - \lambda)(3 - \lambda)(2 - \lambda)$$

Desarrollando, $p(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20$. Observa que $p(\lambda) = (2 - \lambda)[(4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2]$

$$p(\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 10) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2, \lambda = \frac{7 \pm 3}{2}, \lambda = 2, \lambda = 5. \text{ Las soluciones son } \lambda = 2, \lambda = 5$$

b) (1,25 puntos) Para $\lambda = 5$, calcular un vector no nulo $\vec{v} = (x \ y \ z)$ que satisfaga que $(A - \lambda I) \vec{v} = \vec{0}$

Resolución

$$(A - 5I) \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

. La matriz del

sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2f_1 + f_2 \\ 3f_1 + f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} f_2 = 0 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que corresponde al sistema $\{-x + y = 0 \rightarrow y = x \quad 5y - 3z = 0 \rightarrow z = \frac{5y}{3} = \frac{5x}{3}\}$.

Llamando $x = k$, las infinitas soluciones son $\{x = k \quad y = k \quad z = \frac{5k}{3}, k \in \mathbb{R}\}$.

Por ejemplo, para $k = 3$, un vector de los que se piden es $\vec{v} = (3 \ 3 \ 5)$

Bloque 2. (Calificación: 2,5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 2. Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva

$$f(x) = \cos \cos \left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$$

para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

a) (0,75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x)$ en el intervalo $[0, 12]$.

¿Está la curva en este intervalo $[0, 12]$ contenida completamente en el muro?

Resolución

Si $x \in [0, 12]$, $\frac{\pi x}{9} \in \left[0, \frac{\pi 12}{9}\right] = \left[0, \frac{4\pi}{3}\right]$; $f'(x) = -\frac{\pi}{9} \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{9} = 0 \ (x = 0) \ \text{ó} \ \frac{\pi x}{9} = \pi \ (x = 9)$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(0, 9)$	9	$(9, 12)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	decreciente	mínimo	creciente

$f(0) = \cos \cos \left(\frac{\pi 0}{9}\right) + 2 = 1 + 2 = 3$; $f(9) = \cos \cos \left(\frac{\pi 9}{9}\right) + 2 = -1 + 2 = 1$;

$f(x) = \cos \cos \left(\frac{\pi 12}{9}\right) + 2 = -0,5 + 2 = 1,5$

Los valores mínimo y máximo de f en $[0, 12]$ son 1,5 y 3. Como el muro mide 3 m de alto, la curva está completamente contenida en el muro

b) (1,25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.

Resolución

El muro se divide en dos partes una por debajo de la curva cuya área es $A_1 = \int_0^{12} f(x) dx$, que se pinta de un color y otra por encima de la curva, que se pinta de otro.

Una primitiva de f es $F(x) = \frac{9}{\pi} \left(-\frac{\pi x}{9}\right) + 2x$. Por Barrow, $A_1 = \int_0^{12} f(x) dx = F(12) - F(0)$

$A_1 = \frac{9}{\pi} \left(-\frac{\pi 12}{9}\right) + 2 \cdot 12 - \left[\frac{9}{\pi} \left(-\frac{\pi 0}{9}\right) + 2 \cdot 0\right] = \frac{9}{\pi} \left(-\frac{\pi 12}{9}\right) + 24 = -\frac{12}{1} + 24 = 12$

El área de la otra parte de por encima de la curva es $A_2 = A(\text{muro}) - A_1 \cong 12 \cdot 3 - 21,52 = 14,48 \text{ m}^2$.

c) (0,5 puntos) ¿Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva $f(x)$?

Resolución N° de botes = $1 \text{ bote}/3 \text{ m}^2 \cdot 21,52 \text{ m}^2 \cong 7,17$. Para que no falte pintura se comprarán 8 botes

Bloque 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Dados la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano $\pi: x + 2y - 3z = 1$, se pide:

a) (0,75 puntos) Hallar una ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π .

Resolución

Al ser $\vec{d}_r = (2, 0, 1)$ y el vector normal de π $\vec{n}_\pi = (1, 2, -3)$, vectores directores del plano α que piden, un vector normal de α es $\vec{n}_\alpha = \vec{d}_r \times \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-2, 7, 4)$

Como α pasa por $A(1, 0, 2) \in r$, entonces $\alpha: -2(x-1) + 7(y-0) + 4(z-2) = 0$; $\alpha: -2x + 7y + 4z - 6 = 0$

b) (0,75 puntos) Hallar una ecuación de la recta contenida en π que corta perpendicularmente a r .

Resolución

Al ser $\vec{d}_r = (2, 0, 1)$ y el vector normal de π , $\vec{n}_\pi = (1, 2, -3)$, vectores perpendiculares a la recta s que

se pide, un vector director de s es $\vec{d}_s = \vec{n}_\alpha = (-2, 7, 4)$. La recta s pasa por el punto de corte de r y π .

Hallémoslo: $r: \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 0 \\ z = 2 + k \end{cases}$; sustituimos en π , $1 + 2k + 2 \cdot 0 - 3(2 + k) = 1 \Rightarrow -k - 5 = 1, k = -6, \begin{cases} x = -11 \\ y = 0 \\ z = -4 \end{cases}$

$B(-11, 0, -4) \in s$. Luego, $s: \begin{cases} x = -11 - 2t \\ y = 7t \\ z = -4 + 4t \end{cases}$

c) (1 punto) Calcular los puntos de la recta r cuya distancia al plano π es $\sqrt{14}$

Resolución

$\pi: x + 2y - 3z - 1 = 0$. Un punto genérico de r es $P(1 + 2k, 0, 2 + k)$. Usamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano, $d(P, \pi) \Rightarrow \frac{|1 + 2k + 2 \cdot 0 - 3(2 + k) - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{|-k - 6|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \Rightarrow |-k - 6| = 14$.

Luego, $-k - 6 = -14, k = 8$, un punto es $P_1(17, 0, 10)$; $-k - 6 = 14, k = -20$, otro punto es $P_2(-39, 0, -18)$

Pregunta 3.2. Sean el punto $P(0, 1, 1)$ y el plano $\pi: x + y = 2$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la distancia del punto P al plano π .

Resolución

$\pi: x + y - 2 = 0$. Usamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano,

$$d(P, \pi) \Rightarrow \frac{|0 + 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,71 \text{ u}$$

b) (1 punto) Determinar el punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π .

Resolución

El punto Q que se pide es la proyección ortogonal de P sobre π , que es el punto de corte de la recta s' que pasa por P y es ortogonal a π , $s': \begin{cases} x = k' \\ y = 1 + k' \\ z = 1 \end{cases}$ con $\pi: x + y = 2$. Hallémoslo: $k' + 1 + k' = 2, k' = \frac{1}{2}$

Sustituyendo, $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 + \frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases}$. La solución es $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$

c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

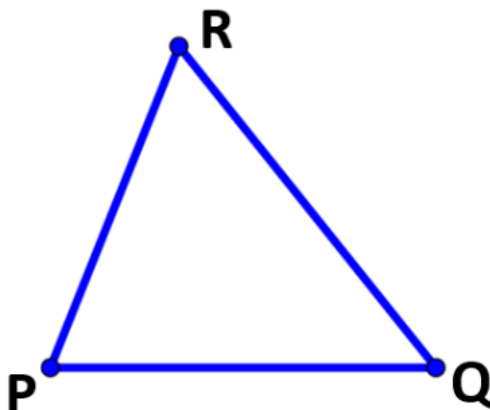
Resolución

$P(0, 1, 1), \pi: x + y = 2$

Punto de corte de π con el eje X : $\begin{cases} \pi: x + y = 2 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow x = 2 \rightarrow Q(2, 0, 0)$

Punto de corte de π con el eje Y: $\{\pi: x + y = 2 \ x = 0 \ z = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow R(0, 2, 0)$

Punto de corte de π con el eje Z: $\{\pi: x + y = 2 \ x = 0 \ y = 0 \rightarrow 0 = 2 \rightarrow \text{No corta al eje Z}$



Sabemos que el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo generado por los vectores

$$\vec{PQ} = (2, -1, -1) \text{ y } \vec{PR} = (0, 1, -1). \text{ O sea, } A(\text{triángulo}) = \frac{1}{2} | \vec{PQ} \times \vec{PR} |$$

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2, 2, 2);$$

$$A(\text{triángulo}) = \frac{1}{2} |(2, 2, 2)| = \frac{1}{2} \cdot 2|(1, 1, 1)| = \sqrt{3} \cong 1,73 \text{ u}^2$$

Bloque 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 4.1. Sea $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ un espacio muestral y P una medida de probabilidad en E definida por: $p(7) = p(3) = \frac{1}{4}$ y con el resto de sucesos elementales equiprobables.

Se consideran los sucesos $A = \{7, 11, 13, 19\}$, $B = \{2, 5, 7, 13, 17\}$ y $C = \{3, 5, 7, 11, 13\}$. Se pide calcular:

- a) (1,25 puntos) $p(\overline{A - C} \cap B)$
- b) (1,25 puntos) $p[(A \cap B) / \overline{C}]$

Resolución

Sea $x = p(2) = p(5) = p(11) = p(13) = p(17) = p(19)$; $1 = p(E) = 6x + 2 \cdot \frac{1}{4} = 6x + \frac{1}{2}$. Luego, $x = \frac{1}{12}$

a) $A - C = \{19\}$ $\overline{A - C} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$; $\overline{A - C} \cap B = \{2, 5, 7, 13, 17\}$.

Luego, $p(\overline{A - C} \cap B) = p(2, 5, 7, 13, 17) = 4 \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

b) $p[(A \cap B) / \overline{C}] = \frac{p[(A \cap B) \cap \overline{C}]}{p(\overline{C})}$. Observa que $A \cap B = \{7, 13\}$; $\overline{C} = \{2, 17, 19\}$; $(A \cap B) \cap \overline{C} = \emptyset$

Luego, $p[(A \cap B) \cap \overline{C}] = 0$ y, por tanto, $p[(A \cap B) / \overline{C}] = 0$

Pregunta 4.2. Entre los ciudadanos de 14 años o más de cierto país, el 20% de la población tiene entre 14 y 24 años, el 50% entre 25 y 64 y el resto más de 64 años. Según datos recogidos por el ministerio de cultura de ese país, el 74% de sus ciudadanos de entre 14 y 24 es lector habitual, mientras que el porcentaje decrece hasta el 65,8% entre los de 25 a 64 y al 53,7% entre los mayores de 64. Elegido un ciudadano al azar del país en cuestión de 14 años o más, se pide:

- a) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea lector habitual.
- b) (1,25 puntos) Si no es lector habitual, calcular la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años.

Resolución

$A = \text{“tener entre 14 y 24 años”}$ $B = \text{“tener entre 25 y 64 años”}$ $C = \text{“tener más de 64 años”}$

D = “ser lector habitual”. Según el enunciado, $p(A) = 0,2$ $p(B) = 0,5$ $p(C) = 1 - 0,2 - 0,5 = 0,3$

$$p(D/A) = 0,74 \quad p(D/B) = 0,658 \quad p(D/C) = 0,537$$

a) Se pide $p(D)$, que, usando el teorema de probabilidad total, es

$$p(D) = p(A)p(D/A) + p(B)p(D/B) + p(C)p(D/C) = 0,2 \cdot 0,74 + 0,5 \cdot 0,658 + 0,3 \cdot 0,537 = 63,81\%$$

b) Nos piden $p\left(\frac{B}{D^c}\right) = \frac{p(B \cap D^c)}{p(D^c)} = \frac{p(B)p(D^c/B)}{1 - p(D)} = \frac{0,5 \cdot (1 - 0,658)}{1 - 0,6381} \cong 0,4725 = 47,25\%$