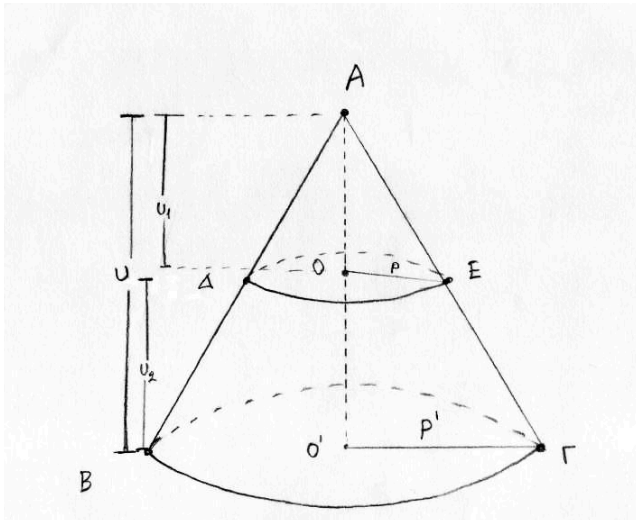
<u>Όγκος κόλουρου κώνου</u>

Ο τύπος $\mathbf{V} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (\rho^2 + P^2 + P \cdot \rho) \cdot \upsilon$ μας δίνει τον όγκο του κόλουρου κώνου (όπου υ το ύψος του κώνου, ρ η ακτίνα της μικρής βάσης και Ρ η ακτίνα της μεγάλης βάσης).

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ορθός κώνος με κορυφή Α,βάση που ορίζεται από τα σημεία Β,Γ και που έχει κέντρο το Ο΄, ακτίνα ρ΄ και ύψος υ . Φέρνουμε μια παράλληλη προς τη βάση τομή που απέχει υ_1 από το Α και τέμνει τον κώνο στα σημεία Δ,Ε. Τότε δημιουργείται ένας μικρότερος κώνος με κορυφή Α, βάση που ορίζεται από τα Δ,Ε και που έχει κέντρο το Ο , ακτίνα ρ και ύψος υ_1. Ακόμα σχηματίζεται ο κόλουρος κώνος με βάσεις που ορίζονται από τα Β,Γ,Δ,Ε(από τα Δ,Ε η μικρή και από τα Β,Γ η μεγάλη),ακτίνες ρ , ρ΄ και ύψος υ_2.



Έστω V ο όγκος του μεγάλου ορθού κώνου ,V_1 του μικρού και V_2 του κόλουρου. Τότε όμως :

$$V = V_1 + V_2 \Leftrightarrow V_2 = V - V_1$$

Γνωρίζουμε ότι γενικά ο όγκος ενός ορθού κώνου δίνεται από το τύπο :

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \rho^2 \cdot \upsilon$, όπου ρ η ακτίνα του και υ το ύψος του. Τότε :

$$V_2 = V - V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \rho'^2 \cdot \upsilon - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \rho^2 \cdot \upsilon_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi(\rho'^2 \cdot \upsilon - \rho^2 \cdot \upsilon_1)$$

Όμως $\blacktriangle AOE \approx \blacktriangle AO'\Gamma$ αφού :

- $\Gamma\hat{A}O$ κοινή γωνία
- είναι ορθογώνια τρίγωνα

Άρα ισχύει :

$$\frac{AO}{AO'} = \frac{OE}{O'\Gamma} = \frac{AE}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{\upsilon_1}{\upsilon} = \frac{\rho}{\rho'} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\upsilon - \upsilon_2}{\upsilon} = \frac{\rho}{\rho'} \Leftrightarrow 1 - \frac{\upsilon_2}{\upsilon} = \frac{\rho}{\rho'} \Leftrightarrow 1 - \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\upsilon_2}{\upsilon} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\upsilon_2}{\upsilon} = \frac{\rho' - \rho}{\rho'} \Leftrightarrow \boxed{\upsilon = \frac{\upsilon_2 \cdot \rho'}{\rho' - \rho}}$$

Ομοίως προκύπτει $\boxed{\upsilon_1 = \frac{\upsilon_2 \cdot \rho'}{\rho' - \rho}}$

$$\text{Άρα } V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot [\rho'^2 \cdot \frac{\upsilon_2 \cdot \rho'}{\rho' - \rho} - \rho^2 \cdot \frac{\upsilon_2 \cdot \rho}{\rho' - \rho}] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \, [\frac{\upsilon_2 \cdot \rho'^3}{\rho' - \rho} - \frac{\upsilon_2 \cdot \rho^3}{\rho' - \rho}] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \, (\frac{\upsilon_2 \cdot \rho'^3 - \upsilon_2 \cdot \rho^3}{\rho' - \rho}) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \, [\frac{\upsilon_2 \cdot (\rho'^3 - \rho^3)}{\rho' - \rho}] =$$

$$=\frac{1}{3}\cdot \pi \left[\frac{\upsilon_2\cdot(\rho'-\rho)(\rho'^2+\rho^2+\rho'\cdot\rho)}{\rho'-\rho}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot \pi \left[\frac{\upsilon_2\cdot(\rho'-\rho)(\rho'^2+\rho^2+\rho'\cdot\rho)}{\rho'-\rho}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot \pi\cdot(\rho'^2+\rho^2+\rho'\cdot\rho)\cdot \upsilon_2.$$