

Chapitre 1 : Topologie

Montrer que N est une norme

Dessiner la boule $B_f(a, b)$ associée

Vérifier que d est une distance

N_1 et N_2 sont – elles équivalentes ?

- On suppose qu'elles sont équivalentes et on voit si N_1/N_2 tend vers l'infinie ou non

Montrer que N est continue pour la topologie définie par la norme $\|\cdot\|_1$

- On montre qu'elle est lipchitzienne

Montrer que A est compact

- Démontrer que A est fermé et borné lorsque E est de dimension finie
- Démontrer que toute suite (x_n) d'éléments de A admet une suite extraite convergente dans A .
- Démontrer que A est une partie fermée d'un espace
- Démontrer que A est l'image d'un compact par une application continue

Etudier la convergence de la suite $(P_n)_n$

- On étudie sa limite

Montrer que A est fermé

- Caractérisation séquentielle : On montre qu'une suite $(x_n) \subset A$ converge vers $a \in A$ (bar)
- On montre que son image réciproque est fermée
- On montre qu'il est égal à son adhérence
- On montre que son complémentaire est ouvert

Montrer que F est un s.e.v de E

- On dit que $0_E \in F$ et on montre que $\lambda x + y \in F$

Montrer que B est ouvert de E

- On montre que $x \in B, \exists r > 0 B_0(x, r) \subset B$

Montrer que f est Lipchitzienne de E dans R

- On montre que si pour tout x, y de I : $|f(x) - f(y)| \leq k |x - y|$

Montrer que X est complet

- Toute suite de Cauchy dans (E, N) converge dans (E, N)

Montrer que f admet un point fixe unique

- On montre que $f : A \rightarrow A$ est K-contractante et A est un fermé d'un espace normé de Banach

Chapitre 2 : Fonctions différentiables

Montrer qu'une fonction est différentiable

- Démontrer que f est de classe C^1 (f admet des dérivées partielles d'ordre 1 continues sur U).
- Obtenir explicitement un développement limité à l'ordre 1. (Najat)
- Utiliser le fait que la somme, le produit ou la composée d'applications différentiables est différentiable.

Montrer qu'une fonction est dérivable

- Montrer qu'elle est différentiable

Montrer qu'une fonction est dérivable en un point

- Montrer que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite quand x tend vers a qu'on notera $f'(a)$
- Montrer que f admet un DL d'ordre 1 en a

Montrer qu'une fonction est continue

Si elle est dérivable $\implies$ elle est continue

Etudier l'existence d'une limite en (0,0) de f

- Utiliser le développement limité en (0,0)
- Utiliser le fait que $x=y$
- Utiliser les inégalités (de la valeur absolue, ...)

Etudier la continuité d'une fonction

- Etudier la continuité de f au point où il y a problème (par exemple (0,0)) et voir si la limite quand (x, y) tend vers (0,0) est égale à $f(0,0)$ ou non.
- D'une autre façon étudier $\lim |f(x, y) - f(0, 0)|$. Si elle est égale à 0 donc elle est continue.

Peut-on prolonger par continuité la fonction f ?

On étudie la limite de f au point où il y a problème. Par exemple, si c'est (0,0) alors on étudie $f(x, y)$. Si elle existe, on dit que f est prolongeable par continuité et on écrit

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C1 sur $\mathbb{R}^2$ (à revoir)

- On montre que f est de classe C1 au point où il y a problème (par exemple en (0,0)) :
 - On montre que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 en calculant $\frac{\partial f}{\partial x}$ puis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x - 0}$. On écrit alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & \text{si } x \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x - 0} & \text{si } x = 0 \end{cases}$
 - Même raisonnement pour $\frac{\partial f}{\partial y}$
 - On montre après que les deux dérivées partielles sont continues
- On montre que f est de classe C1 aux autres points en fixant x puis en fixant y.

Calculer la différentielle de f

On calcule les dérivées partielles de f et on écrit par exemple $df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

Déterminer les extremums locaux de f

- Points critiques : On calcule $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$ on trouve alors (x, y) (par exemple (1,2) et (3,4))
- Etude en $a = (1, 2)$:
 - On calcule $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$; $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
 - Matrice Hessienne est $(r \ s \ s \ t)$
 - On calcule le Hessien $\Delta = r \cdot t - s^2$
 - $\begin{cases} \text{Si } \Delta > 0 \text{ et } r > 0, \text{ alors } f \text{ admet un minimum en } a \\ \text{Si } \Delta > 0 \text{ et } r < 0, \text{ alors } f \text{ admet un maximum en } a \end{cases}$
- Même chose pour l'étude en $b = (3, 4)$

Résoudre les équations aux dérivées partielles en utilisant le Chang de variable $U = xy$ et $V = \frac{x}{y}$

- Soit $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $(U, V) \mapsto g(U, V) = g \circ \varphi(x, y)$
- $g(U, V) = g\left(xy, \frac{x}{y}\right) = f(x, y)$
- On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ puis $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (ça dépend de l'équation)
- On remplace dans l'équation

- On dit que g est supposée de classe C2 afin d'avoir $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
- On met donc l'équation qu'on a obtenu en fonction de $\frac{\partial g}{\partial U}$ ou $\frac{\partial g}{\partial V}$
- Si c'est par exemple $\frac{\partial g}{\partial U}$ on pose $\frac{\partial g}{\partial U} = h_v(U)$
- On remplace $h_v(U)$ dans l'équation et on la résout : Si sa forme est $h_v'(U) \cdot K h_v(U) = 0$ alors

$$\left(e^{\int K dU} \cdot h_v(U) \right)' = 0 \Leftrightarrow e^{\int K dU} \cdot h_v(U) = c(V)$$
- On trouve donc $h_v(U) = \frac{\partial g}{\partial U}(U, V)$ par exemple $\frac{\partial g}{\partial U}(U, V) = \sqrt{U} \cdot c(V)$
- On aura alors $g(U, V) = \sqrt{U} \cdot K(V) + \phi(x, y)$ avec K et ϕ sont de classe C2
- On remplace U et V par x et y et on trouve enfin $f(x, y)$

Trouver toutes les fonctions φ de classe C2 telles que $f: U \rightarrow R$ définie par $f(x, y) = \varphi(\dots)$

vérifie : ... Par exemple $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{x}{y}$

- On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction de φ et φ'
- On remplace dans l'équation initiale
- On calcule jusqu'à ce qu'on trouve $\varphi(x, y)$

Calculer la matrice Jacobienne de $f \circ g$ avec $f(x, y, z) = (f_1, f_2)$ et $g(U, V) = (g_1, g_2, g_3)$

- $J_{f \circ g}(U, V) = J_f(g(U, V)) \times J_g(U, V) = J_f(g_1, g_2, g_3) \times J_g(U, V)$
- On calcule d'abord $J_f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial z} \right)$ puis on remplace x, y et z par g_1, g_2 et g_3
- On calcule $J_g(U, V) = \left(\frac{\partial g_1}{\partial U} \frac{\partial g_1}{\partial V} \frac{\partial g_2}{\partial U} \frac{\partial g_2}{\partial V} \frac{\partial g_3}{\partial U} \frac{\partial g_3}{\partial V} \right)$
- On calcule alors $J_{f \circ g}(U, V) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial g_1}{\partial U} \frac{\partial g_1}{\partial V} \frac{\partial g_2}{\partial U} \frac{\partial g_2}{\partial V} \frac{\partial g_3}{\partial U} \frac{\partial g_3}{\partial V} \right)$



Chapitre 3 : Intégrales multiples

Calculer l'intégrale double

Calculer l'intégrale triple

Calculer l'air du domaine Δ