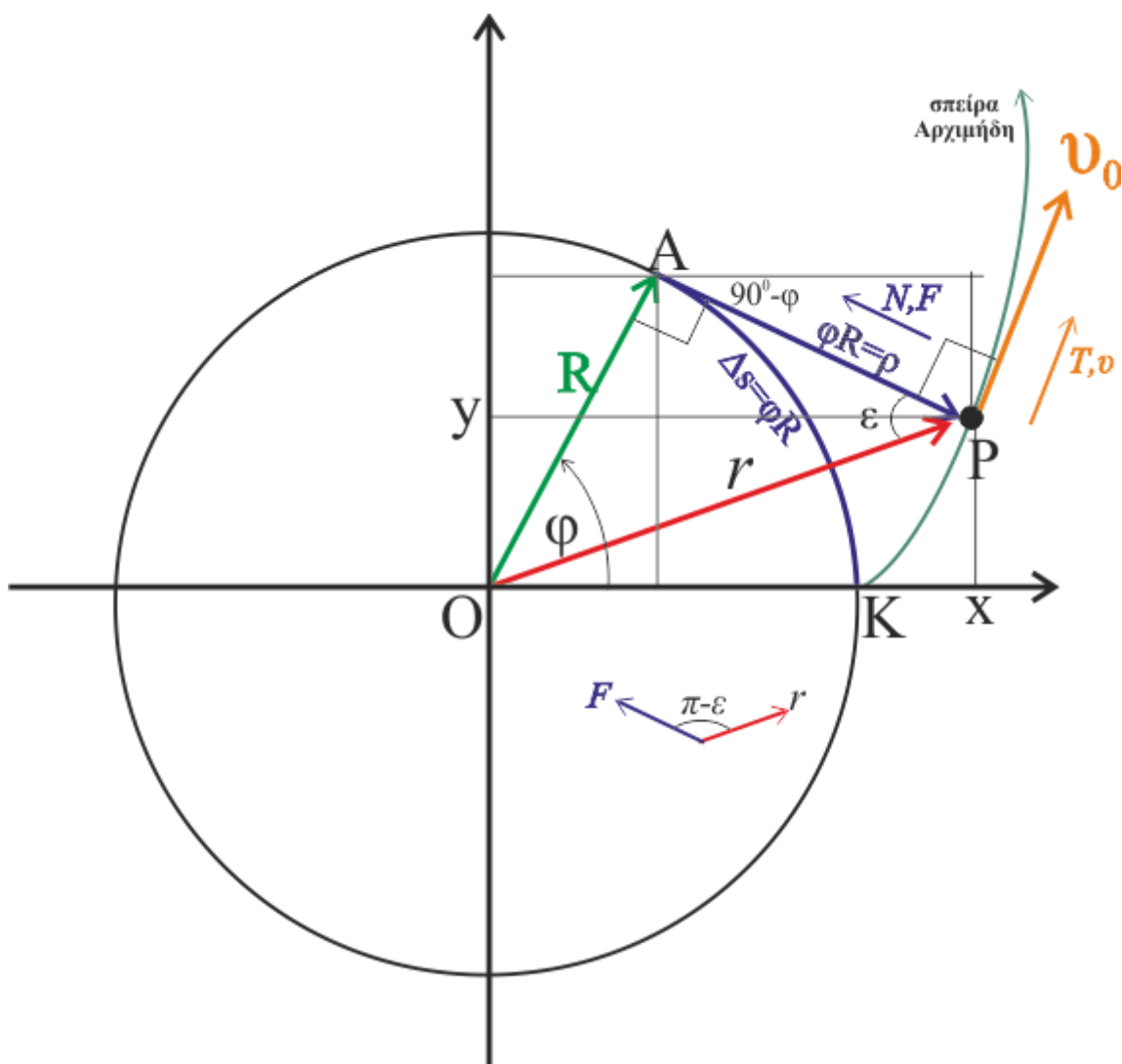


Η Σπείρα (Παραμετρικές Εξισώσεις) Του Αρχιμήδη Ως Πρόβλημα Φυσικής

Μικρό σώμα μάζας m προσαρμόζεται στην άκρη πολύ λεπτού νήματος το οποίο είναι τυλιγμένο πολλές φορές γύρω από έναν αμελητέου μήκους κυλινδρικό σωλήνα (σχεδόν κύκλος) ακτίνας R . Το σώμα ευρισκόμενο πολύ κοντά (σχεδόν σε επαφή) στο σωλήνα εκτοξεύεται με ταχύτητα u_0 κάθετα (σχεδόν) στο διάνυσμα θέσης (ως προς το κέντρο O) του σωλήνα που του αντιστοιχεί. Το νήμα ξετυλίγεται παραμένοντας πάντοτε τεντωμένο και το σώμα απομακρύνεται από το σωλήνα. Η κίνηση γίνεται σε οριζόντιο δάπεδο χωρίς τριβές. Να μελετηθεί η κίνηση του σώματος. Το ίδιο θα είχαμε αν το σώμα απείχε από το σωλήνα και το νήμα τυλιγόταν. Βλέπε Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Κάτοψη της κίνησης. $\Delta s = \left(\overset{\boxtimes}{KA} \right) = (KA) = \rho$. Το νήμα αρχίζει να ξετυλίγεται όταν το σώμα P είναι πολύ κοντά στο K. Το A το κέντρο καμπυλότητας γι' αυτή τη θέση του P

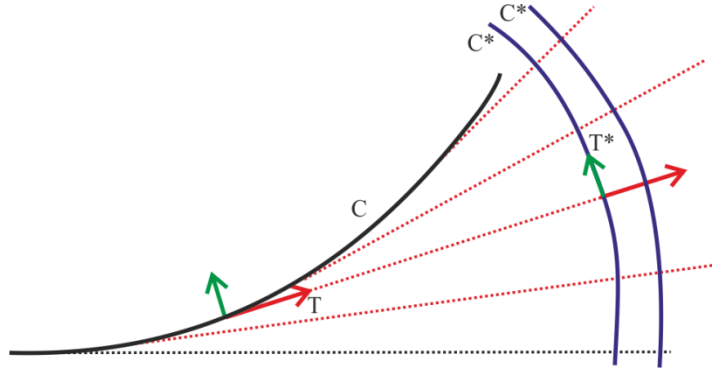
Προκαταρκτικά

1. Το τεντωμένο νήμα μπορεί να ασκεί ελκτική δύναμη $\overset{\text{W}}{F}$ (τάση) στο σώμα μόνο στη διεύθυνσή του.
2. Με δεδομένο τη σταθερότητα της κινητικής ενέργειας (κίνηση χωρίς τριβές) και συνεπώς και του μέτρου της ταχύτητας $\left(K \approx \overset{\text{W}}{v^2} = v^2\right)$ η τάση του νήματος (μοναδική δύναμη που μπορεί να επηρεάζει την κίνηση, βάρος και αντίδραση από το δάπεδο αγνοούνται) μπορεί να επενεργεί επί του σώματος αλλάζοντάς του μόνο τη διεύθυνση της ταχύτητας. Έτσι υποχρεωτικά θα είναι, μονίμως, κάθετη στη διεύθυνση της ταχύτητας του σώματος.
3. Η διεύθυνση του ξετυλιγμένου τεντωμένου νήματος θα είναι μονίμως εφαπτόμενη του κύκλου (σωλήνα), δηλ. κάθετη στην ακτίνα του κύκλου (ΟΑ) που αντιστοιχεί στο κάθε φορὰ σημείο επαφής Α του νήματος.
4. Η ταχύτητα, εξ ορισμού, που είναι εφαπτόμενη της καμπυλόγραμμης τροχιάς, θα είναι κάθετη στην εφαπτομένη (συμπίπτει με το νήμα) που φέρεται από το σημείο επαφής του νήματος με τον κύκλο και συνεπώς παράλληλη προς την αντιστοιχούσα ακτίνα του κύκλου.
5. Ως σύστημα συντεταγμένων μελέτης της κίνησης επιλέγουμε εκείνο στο οποίο η αρχή των αξόνων συμπίπτει με το κέντρο του κύκλου Ο (σωλήνα) και ο άξονας Οx με την ακτίνα του κύκλου που αντιστοιχεί στην αρχική θέση του σώματος $(x, y) = (R, 0)$. Το τρίγωνο ΟΑΡ είναι ορθογώνιο στην κορυφή Α.
6. Ως γωνία φ , που διευκολύνει την περιγραφή, επιλέγουμε τη γωνία ανάμεσα στην αρχική ακτίνα του κύκλου (άξονας Οx) που αντιστοιχεί στην αρχική θέση του σώματος $\varphi = 0^\circ$ και στην ακτίνα που αντιστοιχεί στο σημείο του κύκλου που εφάπτεται κάθε φορὰ το νήμα, δηλ. $\varphi = \overset{\text{W}}{\angle KOA}$.
7. Για γωνία φ το μήκος του νήματος που θα έχει ξετυλιχτεί από το σωλήνα θα ισούται με φR (η φ σε rad) και με την απόσταση (ΡΑ) του σώματος από το σημείο επαφής του νήματος με τον κύκλο που, όπως θα δούμε, είναι η ακτίνα καμπυλότητας ρ της διαγραφόμενης καμπύλης που αντιστοιχεί στο σημείο Ρ.
8. Δεδομένα, ορισμοί και συμβολισμοί (η φ είναι συνάρτηση του χρόνου) για το σώμα Ρ (Σχήμα 1)

$$\left(\begin{array}{l} \varphi = \varphi(t) \text{ και } (Ox, OA) > 0, \varphi \neq 0 \text{ και } (Ox, r_p = OP) \\ \omega \equiv \frac{d\varphi}{dt} \text{ είναι κλίση του } \varphi \text{ ως προς } t \\ \Delta s = (OA) = R\varphi = \rho = \text{μήκος νήματος που ξετυλίχτηκε} \\ |v| = v_0 \text{ (περιορισμός)} \end{array} \right)$$

Σημείωση

Οι εφαπτόμενες μιας (επίπεδης) καμπύλης C παράγουν μια επιφάνεια που ονομάζεται εφαπτόμενη επιφάνεια της C. Μια άλλη καμπύλη C*, που κείται επί της εφαπτόμενης επιφάνειας της C και τέμνει τις εφαπτόμενες της ορθογώνια λέγεται **ενειλιγμένη** της C και κατά συνέπεια η C* λέγεται **εξειλιγμένη** της C (οι εφαπτόμενες της οποίας τέμνουν C ορθογώνια). Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ενειλιγμένη C* της C ξετυλίγοντας τεντωμένο νήμα που είναι τυλιγμένο κατά μήκος της. Για παράδειγμα για να βρούμε την εξίσωση μιας ενειλιγμένης της



περιφέρειας κύκλου $(R \cos \varphi, R \sin \varphi)$ ξετυλίγουμε απ' αυτή ένα τεντωμένο νήμα με αρχή $\varphi=0$, σπείρα Αρχιμήδη, ενώ η σπείρα είναι μια ενειλιγμένη του κύκλου. Έτσι η σπείρα του Αρχιμήδη είναι μια ενειλιγμένη του κύκλου, ενώ ο κύκλος μια εξειλιγμένη της σπείρας. Η καμπύλη της σπείρας γράφεται από το άκρο P ενός τεντωμένου σχοινιού τυλιγμένου σε ένα κύκλο ακτίνας R, καθώς το σχοινί ξετυλίγεται.

Διάγραμμα θέσης (Σχήμα 1)

$$x(\varphi) = (OA) \cos \varphi + (AP) \cos(90^\circ - \varphi) = R \cos \varphi + R\varphi \sin \varphi, \varphi > 0$$

$$y(\varphi) = (OA) \sin \varphi - (AP) \sin(90^\circ - \varphi) = R \sin \varphi - R\varphi \cos \varphi$$

$$\vec{r}(\varphi) = R(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) \vec{i} + R(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) \vec{j}, \vec{r}(0^\circ) = R \vec{i} \rightarrow$$

$$|\vec{r}(\varphi)| = R\sqrt{(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi)^2 + (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi)^2} = R\sqrt{1 + \varphi^2} \rightarrow |\vec{r}(\varphi)| = R\sqrt{1 + \varphi^2}$$

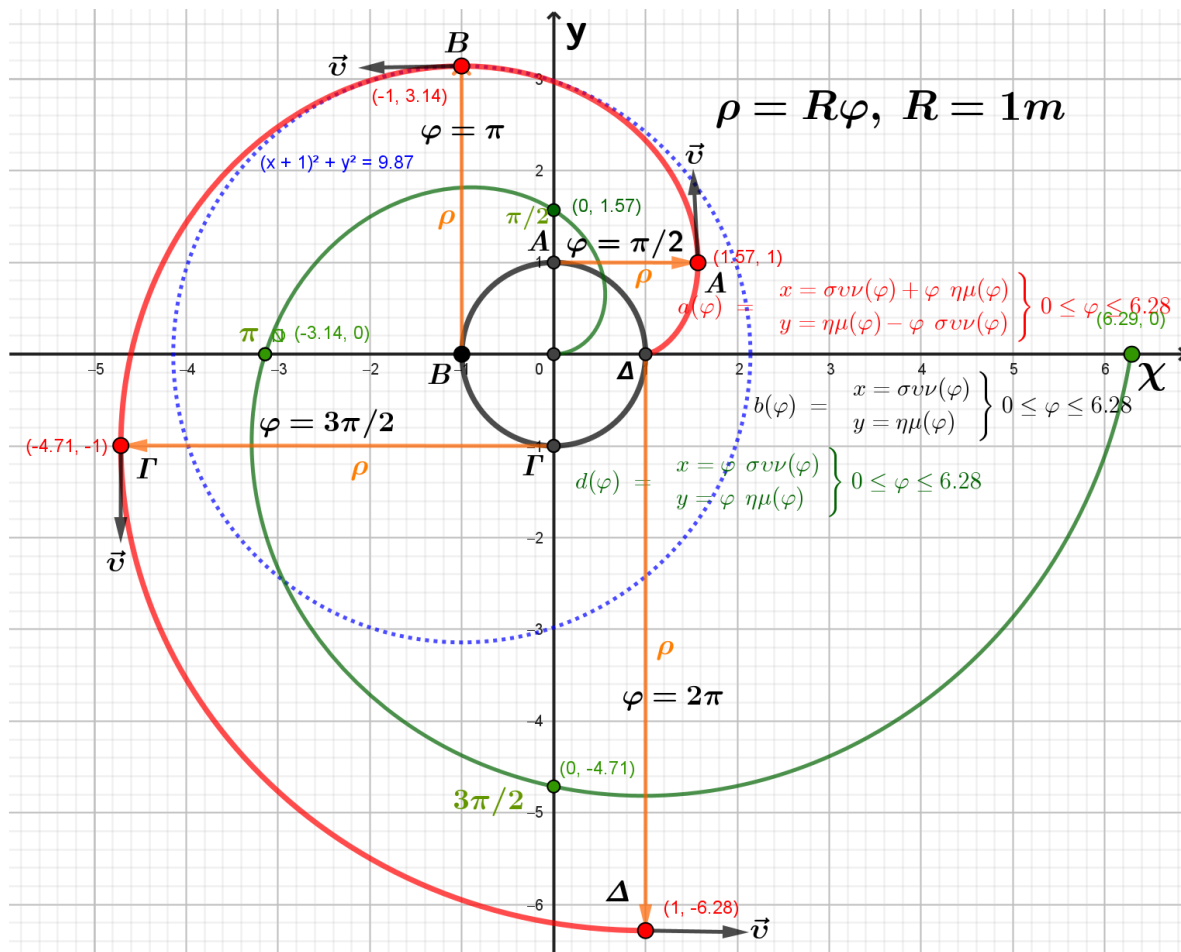
$$\left(\text{ή από το ΠΥΘ.ΘΕΩΡ. } r^2 = R^2 + \rho^2 \text{ στο ορθογώνιο } \triangle OAP \right)$$

$$\frac{d|\vec{r}(\varphi)|}{d\varphi} = R \frac{1}{2} (1 + \varphi^2)^{-0.5} 2\varphi \rightarrow \frac{d|\vec{r}(\varphi)|}{d\varphi} = R \frac{\varphi}{\sqrt{1 + \varphi^2}}$$

$$\frac{d\vec{r}(\varphi)}{d\varphi} = R(\cos \varphi) \vec{i} + R(\sin \varphi) \vec{j} \rightarrow \left| \frac{d\vec{r}(\varphi)}{d\varphi} \right| = R$$

Η μεταβολή του μέτρου του διανύσματος θέσης σε συνάρτηση της γωνίας δείχνει το ρυθμό

απομάκρυνσης από το Ο, ενώ το μέτρο του ρυθμού μεταβολής του διανύσματος θέσης ως προς τη γωνία περιγράφει το πόσο γρήγορα μεταβάλλεται το μέτρο του διανύσματος θέσης.

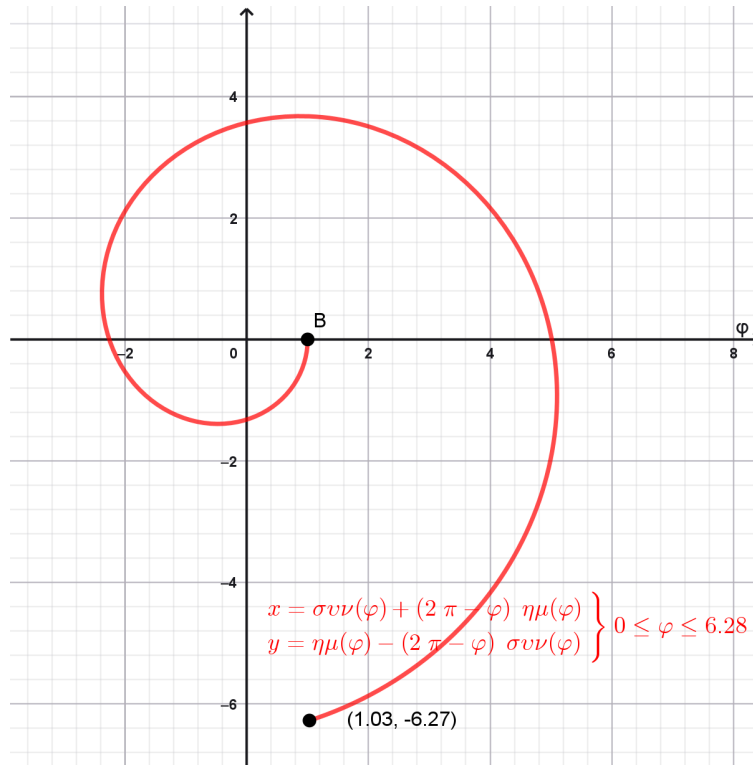


Σχήμα 3: Η μαύρη (**ενελιγμένη**) καμπύλη (κύκλος) της σπείρας (**εξελιγμένη**) περιλαμβάνει τις θέσεις των κέντρων καμπυλότητας της δοσμένης κόκκινης καμπύλης (πχ. κινούμενο σωματίδιο στην άκρη νήματος που ξετυλίγεται από σταθερό κυκλικό κουβάρι). Όταν $\varphi = \pi$ (η θέση του κινούμενου σωματιδίου, σημείο πάνω Β) το αντίστοιχο κέντρο καμπυλότητας βρίσκεται στο σημείο κάτω Β, ο διακεκομμένος μπλε κύκλος είναι ο αντίστοιχος κύκλος καμπυλότητας που εφάπτεται στο πάνω Β της συγκεκριμένης καμπύλης. Ομοίως για τα Γ και Δ. Τα πορτοκαλί διανύσματα είναι οι ακτίνες των αντίστοιχων κύκλων καμπυλότητας και ενώνουν τα κέντρα καμπυλότητας με τα αντίστοιχα σημεία της δοσμένης καμπύλης στα οποία εφάπτεται ο αντίστοιχος κύκλος και προφανώς τα μέτρα τους είναι ίσα με τις αντίστοιχες ακτίνες. Οι αποστάσεις των σημείων της πράσινης καμπύλης από την αρχή των αξόνων ισούται με τις αντίστοιχες ακτίνες καμπυλότητας των εν λόγω σημείων. Τα μαύρα βέλη είναι οι ταχύτητες (εδώ σταθερού μέτρου=1), ενώ αν τα πορτοκαλί σχεδιαστούν ανάποδα είναι οι επιταχύνσεις (αποκλειστικά κεντρομόλες). Το σχήμα έχει περιοριστεί για $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Σημείωση: Με το νήμα να τυλίγεται στο σωλήνα οι εξισώσεις παραμένουν ίδιες με μοναδική διαφορά στο ότι πρέπει να δώσουμε αρχική γωνία για τη φ πχ. 2π (συρρικνούμενη σπειροειδής τροχιά, Σχήμα 4).

$$\vec{r}(\phi) = R[\cos \phi + (\phi_0 - \phi)\sin \phi] \vec{i} + R[\sin \phi - (\phi_0 - \phi)\cos \phi] \vec{j}, \vec{r}(0) = R \vec{i} - R\phi_0 \vec{j} \rightarrow$$

$$|\vec{r}(\phi)| = R\sqrt{1 + \phi^2} = R\sqrt{1 + \phi_0^2} = R\sqrt{1 + \phi_0^2} = R\sqrt{1 + \phi_0^2}$$



Σχήμα 4: Το νήμα τυλίγεται αριστερόστροφα στο σωλήνα

Ταχύτητα

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = R(-\omega \sin \phi + \omega \sin \phi + \phi \omega \cos \phi) \vec{i} + R(\omega \cos \phi - \omega \cos \phi + \phi \omega \sin \phi) \vec{j} \rightarrow \\ \vec{v}(\phi) &= R\omega\phi(\cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}) = v_0(\cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}), \quad |\vec{v}(\phi)| = \text{σταθ.} = v_0 = R\omega\phi, \quad \omega\phi \neq 0 \\ v_0 &= R(\omega\phi) \rightarrow \omega\phi = \phi \frac{d\phi}{dt} = \frac{v_0}{R} = \text{σταθ.} \rightarrow \omega \propto \frac{1}{\phi} \rightarrow (\omega \downarrow) \rightarrow d(\omega\phi) = 0 \rightarrow a_\gamma\phi + \omega^2 = 0, \quad a_\gamma \equiv \frac{d\omega}{dt} \end{aligned}$$

Εφόσον το μέτρο της ταχύτητας διατηρείται σταθερό συνεπάγεται ότι το ίδιο θα συμβαίνει και με το γινόμενο $\omega\phi (= v_0 / R)$ πράγμα που σημαίνει ότι το γινόμενο τους (και το καθένα ξεχωριστά) δε μπορεί να είναι μηδέν και τα δύο μεγέθη είναι μεταξύ τους αντιστρόφως ανάλογα. Έτσι, αφού η ϕ μεγαλώνει, η ω μικραίνει.

Επιτάχυνση και ασκούμενη δύναμη (τάση νήματος)

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[v_0 (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) \right] = v_0 \left[(-\omega \sin \varphi) \vec{i} + (\omega \cos \varphi) \vec{j} \right] \rightarrow \\ \vec{a}(\varphi) &= v_0 \omega \left[(-\sin \varphi) \vec{i} + (\cos \varphi) \vec{j} \right] = \frac{v_0^2}{R\varphi} \left[(-\sin \varphi) \vec{i} + (\cos \varphi) \vec{j} \right] \rightarrow |\vec{a}(\varphi)| = \frac{v_0^2}{R\varphi} (\downarrow), \varphi \neq 0 \\ F(\varphi) &= m\vec{a} = \frac{mv_0^2}{R\varphi} \left[(-\sin \varphi) \vec{i} + (\cos \varphi) \vec{j} \right] \perp \vec{v} \rightarrow |F(\varphi)| = \frac{mv_0^2}{R\varphi} (\downarrow) \\ \text{ή } |F_N(\varphi)| &= m \frac{v_0^2}{\rho} = m \frac{v_0^2}{R\varphi}, \varphi \neq 0\end{aligned}$$

Επιτάχυνση και δύναμη αντιστρόφως ανάλογες της γωνίας φ .

Η ταχύτητα κάθετη στην επιτάχυνση (έλεγχος, μηδενικό εσωτερικό γινόμενο)

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{a} &= v_0 (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) \cdot \frac{v_0^2}{R\varphi} \left[(-\sin \varphi) \vec{i} + (\cos \varphi) \vec{j} \right] = \frac{v_0^3}{R\varphi} (-\cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) = 0 \rightarrow \\ \vec{v} \perp \vec{a}, \forall \varphi \neq 0 &\rightarrow \vec{a} \equiv \vec{a}_N\end{aligned}$$

Εφαπτομενικό $\vec{T}$ - κάθετο $\vec{N}$ μοναδιαία διανύσματα και καμπυλότητα (κ) - ακτίνα καμπυλότητας (ρ)

$$\vec{T}(\varphi) \equiv \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{v_0 (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j})}{v_0} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}, \varphi \neq 0$$

$$\begin{aligned}\kappa(\varphi) &\equiv \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|, \vec{N}(\varphi) \equiv \frac{d\vec{T}/ds}{|d\vec{T}/ds|}, \rho(\varphi) \equiv \frac{1}{\kappa(\varphi)} \\ \frac{d\vec{T}}{ds} &= \frac{d\vec{T}/dt}{ds/dt} = \frac{-\omega \sin \varphi \vec{i} + \omega \cos \varphi \vec{j}}{v_0} = -\frac{\omega}{v_0} (\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}) = -\frac{1}{R\varphi} (\sin \varphi \vec{i} - \cos \varphi \vec{j}) \rightarrow \\ \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| &= \frac{1}{R\varphi}, \varphi \neq 0 \\ \vec{N}(\varphi) &= \frac{-\frac{1}{R\varphi} (\sin \varphi \vec{i} - \cos \varphi \vec{j})}{\frac{1}{R\varphi}} = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}, \varphi \neq 0, \vec{a} = \vec{a}_N = |\vec{a}_N| \vec{N}\end{aligned}$$

$$\kappa(\varphi) = \frac{1}{R\varphi} \rightarrow \rho(\varphi) = R\varphi \text{ (μήκος τόξου - ξετυλιγμένου νήματος)}$$

Ενώ η καμπυλότητα της σπείρας μειώνεται (η διαγραφόμενη καμπυλόγραμμη τροχιά γίνεται όλο και πιο ανοικτή), η ακτίνα καμπυλότητας, που ισούται με το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AP, ίσου με το μήκος του νήματος που έχει ξετυλιχθεί, αντιστοίχως αυξάνεται.

Σημείωση: Ενώ το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα $\hat{T}$ έχει ίδια φορά με τη φορά διαγραφής της καμπύλης, το μοναδιαίο κάθετο $\hat{N}$ έχει πάντοτε κατεύθυνση προς το κοίλο της τροχιάς, δηλ. ανεξάρτητα της φοράς διαγραφής της καμπύλης.

Άλλοι τρόποι υπολογισμού ακτίνας καμπυλότητας

$$\kappa(\varphi) = \frac{|\hat{v} \times \hat{a}|}{|\hat{v}|^3}$$

$$\hat{v} \times \hat{a} = v_0 (\cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}) \times v_0 \omega [(-\sin \varphi) \hat{i} + (\cos \varphi) \hat{j}] = \omega v_0^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \hat{k} = \frac{v_0^3}{R\varphi} \hat{k}$$

$$|\hat{v} \times \hat{a}| = \frac{v_0^3}{R\varphi} \rightarrow \kappa(\varphi) = \frac{\frac{v_0^3}{R\varphi}}{v_0^3} = \frac{1}{R\varphi} \rightarrow \rho(\varphi) = R\varphi$$

$$\text{ή } \hat{a}(\varphi) = \hat{a}_N(\varphi) \perp \hat{v}(\varphi) \rightarrow |\hat{a}_N(\varphi)| = \frac{|\hat{v}(\varphi)|^2}{\rho(\varphi)} \rightarrow \rho(\varphi) = \frac{|\hat{v}(\varphi)|^2}{|\hat{a}_N(\varphi)|} = \frac{v_0^2}{\frac{v_0^2}{R\varphi}} = R\varphi$$

Εφαπτομενική (στην καμπύλη) και κάθετη συνιστώσες της επιτάχυνσης

$$|\hat{v}(t)| = v_0 \rightarrow |\hat{a}_T(t)| = \frac{d}{dt} |\hat{v}(t)| = 0 \rightarrow \hat{a}_N(\varphi) = \hat{a}(\varphi) = \frac{v_0^2}{R\varphi} [(-\sin \varphi) \hat{i} + (\cos \varphi) \hat{j}] \rightarrow |\hat{a}_N(\varphi)| = \frac{v_0^2}{R\varphi}$$

$$\hat{a}(\varphi) = a_T(\varphi) \hat{T}(\varphi) + a_N(\varphi) \hat{N}(\varphi) = 0 + a_N(\varphi) \hat{N}(\varphi) = a_N(\varphi) \hat{N}(\varphi)$$

Η επιτάχυνση, όπως και η αντίστοιχη δύναμη (τάση νήματος), είναι μονίμως κάθετη στην ταχύτητα επιβάλλοντας την αλλαγή διεύθυνσής της, ενώ η εφαπτομενική συνιστώσα της είναι μηδενική.

Γεωμετρικός τόπος θέσεων κέντρων καμπυλότητας (σημεία Α του σχήματος)

$$\vec{OA} + \vec{AP} = \vec{OP} \rightarrow \vec{OA} = \vec{OP} - \vec{AP} = \vec{OP} + \vec{PA} \rightarrow \vec{r}_A(\varphi) = \vec{r}_P(\varphi) + \rho(\varphi) \hat{N}(\varphi) =$$

$$= R(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) \hat{i} + R(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) \hat{j} + R\varphi(-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j})$$

$$\vec{r}_{\text{κε}}(\varphi) = R(\cos \varphi) \hat{i} + R(\sin \varphi) \hat{j} \quad (\text{κέντρων κύκλων-κατ' } \mu\pi\lambda\omicron\tau\eta\tau\alpha\varsigma)$$

η διαγραφόμενη καμπύλη (σπείρα Αρχιμήδη) ως η ενελιγμένη κύκλου

Αναμενόμενο. Είναι οι συντεταγμένες του σημείου Α, δηλ. ο κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας R. Όπως ειπώθηκε ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων καμπυλότητας μιας καμπύλης λέγεται **εξειλιγμένη** της καμπύλης (σπείρας). Αν φέρουμε εφαπτόμενες του κύκλου και πάρουμε πάνω τους κατάλληλα μήκη, τότε τα οριζόμενα σημεία θα συνιστούν τη σπειροειδή καμπύλη.

Στροφορμή (ως προς Ο)

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \vec{r} \times m\vec{v} = mR[(\cos\varphi + \varphi \sin\varphi)\vec{i} + (\sin\varphi - \varphi \cos\varphi)\vec{j}] \times v_0[(\cos\varphi)\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}] = \\ &= mRv_0\{[(\cos\varphi + \varphi \sin\varphi)\sin\varphi] - (\sin\varphi - \varphi \cos\varphi)\cos\varphi\}\vec{k} = mRv_0\varphi\vec{k} \rightarrow \\ \vec{L}_O(\varphi) &= (mRv_0)\varphi\vec{k} = (m\rho v_0)\vec{k} \rightarrow |\vec{L}_O(\varphi)| = m\rho v_0 = (mRv_0)\varphi(\uparrow) \end{aligned}$$

Η στροφορμή, αυξάνεται κατά τρόπο ανάλογο της φ παρόλο που το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό. Αυτό οφείλεται σε μια προς τα έξω ακτινική μετατόπιση του σώματος (αύξηση μέτρου διανύσματος θέσης, το P απομακρύνεται από το O) με μια συνακόλουθη μείωση της δύναμης. Το μέτρο της ισούται με την ακτίνα καμπυλότητας επί το σταθερό μέτρο της ορμής,

$$|\vec{L}_O(\varphi)| = (mRv_0)\varphi = R\varphi(mv_0) = \rho(mv_0)$$

$$\frac{d|\vec{r}(\varphi)|}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}(R\sqrt{1+\varphi^2}) = R\frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} = R\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\varphi^2}}} > 0$$

Η μεταβολή (αύξηση) της απόστασης του P από το O ανά μονάδα της φ εξαρτάται από τη φ και είναι αυξανόμενη με τη φ . Για παράδειγμα αν $\varphi = 1 \text{ rad} \approx 57^\circ$, τότε η OP θα μεταβάλλεται κατά $0,7R$ ανά rad.

Η ακτίνα καμπυλότητας $\rho = R\varphi$, επίσης αυξάνεται με τη φ , $\frac{d\rho}{d\varphi} = R$ (ή

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = R\omega = R\frac{v_0}{R\varphi} = \frac{v_0}{\varphi}$$

με το χρόνο). Αυτό συνεπάγεται και μια μείωση στη δύναμη

(νήματος) που επιτρέπει την απομάκρυνση του P από το O ($|\vec{F}_N(\varphi)| = \frac{mv_0^2}{R\varphi}$).

Ρυθμός μεταβολής στροφορμής

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}[(mRv_0)\varphi\vec{k}] = (mRv_0)\omega\vec{k} = \frac{mv_0^2}{\varphi}\vec{k} \rightarrow \left|\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right| = \frac{mv_0^2}{\varphi}(\downarrow)$$

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής μειώνεται αυξανόμενης της γωνίας φ (αντιστρόφως ανάλογή της).

Γωνία ε ανάμεσα στο διάνυσμα θέσης και στο διάνυσμα της ασκούμενης δύναμης

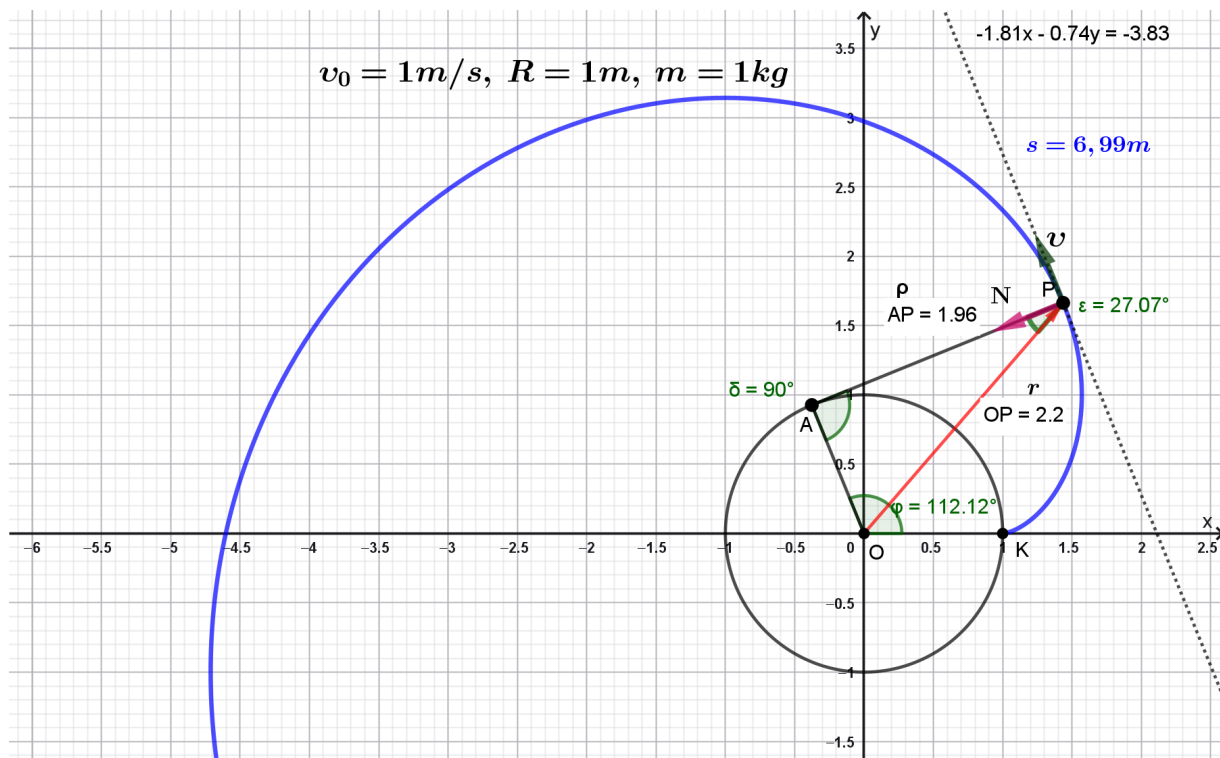
$$\begin{aligned}\varepsilon = \angle PA = \angle \left(-\vec{r}, \vec{F} \right) &\rightarrow \cos \varepsilon = \frac{-\vec{r} \cdot \vec{F}}{|\vec{r}| |\vec{F}|} = \\ &= \frac{-R \left[(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) i + (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) j \right] \cdot \frac{mv_0^2}{R\varphi} \left[(-\sin \varphi) i + (\cos \varphi) j \right]}{R\sqrt{1+\varphi^2} \frac{mv_0^2}{R\varphi}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} \left[(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi)(-\sin \varphi) + (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) \cos \varphi \right] \rightarrow \\ \cos \varepsilon = \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\varphi^2}}} &\rightarrow \sin \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} \rightarrow \beta = \angle \left(\vec{r}, \vec{v} \right) = \frac{\pi}{2} - \varepsilon \rightarrow \sin \beta = \cos \varepsilon = \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}\end{aligned}$$

Ή από το Σχήμα 1:

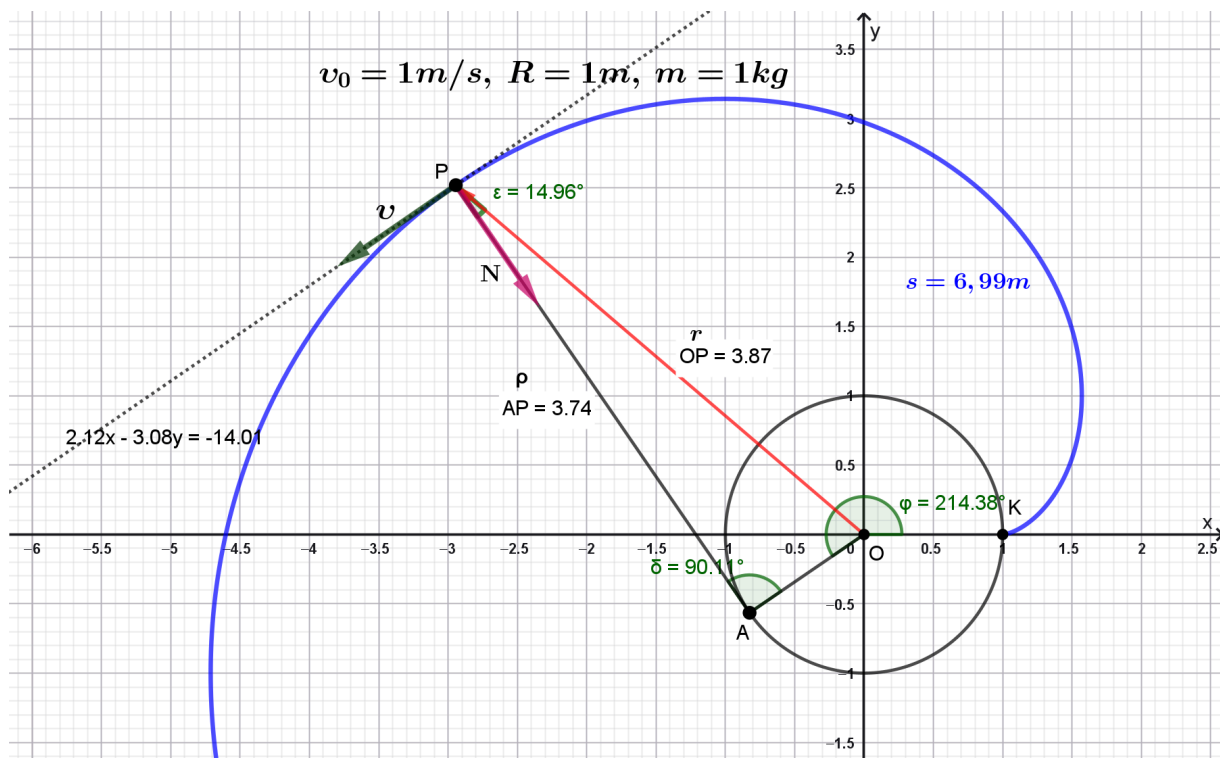
$$\sin \varepsilon = \frac{OA}{OP} = \frac{R}{r} = \frac{R}{R\sqrt{1+\varphi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} < 1, \quad \cos \varepsilon = \frac{\rho}{r} = \frac{R\varphi}{R\sqrt{1+\varphi^2}} = \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}, \quad \tan \varepsilon = \frac{R}{\rho} = \frac{1}{\varphi}, \quad \varphi \neq 0$$

Ισχύει $\lim_{\varphi \rightarrow \infty} \cos \varepsilon = 1 \Rightarrow \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \varepsilon = 0$, δηλ. τα $-\vec{r}, \vec{F}$ τείνουν να γίνουν παράλληλα και τα $\vec{r}, \vec{F}$

αντίθετων κατευθύνσεων (ή τα $\vec{r}, \vec{v}$ κάθετα).



Σχήμα 5: Στιγμιότυπο κίνησης με $\varphi \approx 112^\circ$



Σχήμα 6: Στιγμιότυπο κίνησης με $\varphi \approx 214^\circ$

Υπολογισμός στροφορμής και ρυθμού μεταβολής της (ξανά)

$$\{\vec{r}_A \perp \vec{AP}, \vec{v} \perp \vec{AP}\} \rightarrow \vec{r}_A \times \vec{v} \rightarrow \vec{r}_A \times m\vec{v} = 0$$

$$\vec{L}_{P/O} = \vec{r}_P \times m\vec{v} = \vec{r}_{P,\perp} \times m\vec{v} = \vec{AP} \times m\vec{v} \rightarrow |\vec{L}_{P/O}| = |\vec{r}_\perp| m |\vec{v}| = \left\{ \begin{array}{l} |\vec{AP}| m |\vec{v}| = \rho m v_0 = R \varphi m v_0 \\ (r \cos \varepsilon) m v_0 = R \sqrt{1+\varphi^2} \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} m v_0 = (m R v_0) \varphi \end{array} \right\}$$

$$\dot{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v}_\perp \rightarrow |\dot{L}_O(\varphi)| = |\vec{r}| m |\vec{v}_\perp| = r m v_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = r m v_0 \cos \varepsilon = \left(R \sqrt{1+\varphi^2}\right) m v_0 \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} = (m R v_0) \varphi$$

$$\frac{dL_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} \rightarrow \left| \frac{dL_O}{dt} \right| = r F \sin \varepsilon = R \sqrt{1+\varphi^2} F \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} = RF$$

$$\frac{dL_O}{dt} = RF = R \frac{m v_0^2}{R \varphi} = \frac{m v_0^2}{\varphi}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ισούται με τη ροπή της δύναμης (τάση νήματος μειούμενου μέτρου) ως προς το κέντρο Ο (η διεύθυνση της δύναμης είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο Α), έτσι ώστε το μέτρο της να είναι $|\vec{\tau}_0| = R |\vec{F}|$.

Παρατήρηση: Προφανώς, $\vec{r} \perp \vec{\omega} \times \vec{r} \neq \vec{v} \nrightarrow \vec{r} \rightarrow \omega r \neq v$.

Όμως $\vec{\omega} \times \vec{AP} = \vec{v} \rightarrow \omega |\vec{AP}| = v \rightarrow \omega \rho = v_0 \rightarrow \omega R \varphi = v_0$. Έτσι η στροφορμή (ως προς Ο) δε

μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση $\vec{L}_O = I_O \vec{\omega}$, αλλά μπορεί από τη σχέση

$$\vec{L}_O = I_A \vec{\omega} \rightarrow L_O = I_A \omega = m \rho^2 \omega = m (R \varphi)^2 \frac{v_0}{R \varphi} = (m R v_0) \varphi$$

Ομοίως η κινητική ενέργεια (εκ περιστροφής γύρω από το Ο) δε μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

$$K = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{L_O^2}{2 I_O}, \text{ αλλά μπορεί από τη σχέση } K = \frac{1}{2} I_A \omega^2 \left(= \frac{L_A^2}{2 I_A} \right) = \frac{1}{2} m \rho^2 \left(\frac{v_0}{\rho} \right)^2 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Υπενθυμίζουμε ότι τα Α, ρ είναι το κέντρο και η ακτίνα καμπυλότητας, αντιστοίχως, όταν η γωνία είναι φ .

Η γωνία φ (και τα άλλα μεγέθη) σε συνάρτηση του χρόνου

$$\begin{aligned} v_0 = R\omega\varphi \rightarrow \omega\varphi = \frac{v_0}{R} \rightarrow \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_0}{R} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{d\varphi^2}{dt} = \frac{v_0}{R} \rightarrow d\varphi^2 = \frac{2v_0}{R} dt \rightarrow \\ \left\{ \int d\varphi^2 = \int \frac{2v_0}{R} dt + C \rightarrow \varphi^2 = \frac{2v_0}{R} t + C \right\} \rightarrow \varphi(t) = \left(\sqrt{\frac{v_0}{R}} \right) \sqrt{2t} \rightarrow t = \left(\frac{R}{2v_0} \right) \varphi^2, t > 0 \\ \left\{ \text{αν για } (t=0 \rightarrow \varphi=0) : C=0 \right\} \end{aligned}$$

$$\omega(\hat{t}) = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_0}{R} \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{v_0}{R} \frac{1}{\sqrt{t}} \rightarrow t = \frac{v_0}{2R} \frac{1}{\omega^2}, \omega \neq 0 \quad v_0 = \varphi\omega \rightarrow \omega(t) = \frac{v_0}{R\varphi} = \dots = \sqrt{\frac{v_0}{R}} \frac{1}{\sqrt{2t}}$$

$$|\vec{r}(\varphi)| = R\sqrt{1+\varphi^2} = R\sqrt{1+\left[\left(\sqrt{\frac{2v_0}{R}}\right)\sqrt{t}\right]^2} = R\sqrt{1+\frac{2v_0}{R}t} \rightarrow |\vec{r}(t)| = \sqrt{R^2 + Rv_0(2t)}$$

$$|\vec{a}(\varphi)| = \frac{v_0^2}{R\varphi} = \frac{v_0^2}{R\left(\sqrt{\frac{2v_0}{R}}\right)\sqrt{t}} = \frac{v_0^2}{(\sqrt{2Rv_0})\sqrt{t}} \rightarrow |\vec{a}(t)| = \frac{v_0^2}{\sqrt{Rv_0}} \frac{1}{\sqrt{2t}}$$

$$\rho(\varphi) = R\varphi = R\left(\sqrt{\frac{2v_0}{R}}\right)\sqrt{t} \rightarrow \rho(t) = (\sqrt{Rv_0})\sqrt{2t}$$

$$|\vec{L}_O(\varphi)| = (mRv_0)\varphi = (mRv_0)\left(\sqrt{\frac{2v_0}{R}}\right)\sqrt{t} \rightarrow |\vec{L}_O(t)| = (mv_0\sqrt{Rv_0})\sqrt{2t}$$

$$\left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right| = |\vec{v}(t)| = v_0$$

$$\left| \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right| = \frac{mv_0^2}{\varphi} = \frac{mv_0^2}{\left(\sqrt{\frac{2v_0}{R}}\right)\sqrt{t}} \rightarrow \left| \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right| = mv_0^2 \sqrt{\frac{R}{2v_0}} \frac{1}{\sqrt{t}} \rightarrow \left| \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right| = mv_0 \sqrt{Rv_0} \frac{1}{\sqrt{2t}}$$

$$\sin \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v_0}{R}(2t)}}, \tan \varepsilon = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2v_0}{R}}\right)\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{R}{v_0}} \frac{1}{\sqrt{2t}}$$

$$s(\varphi) = \frac{1}{2} R \varphi^2 = \frac{1}{2} R \frac{2v_0}{R} t = v_0 t$$

Μήκος δρόμου

$$s(t) = \int_0^t |v(t)| dt = \int_0^t v_0 dt = v_0 t$$

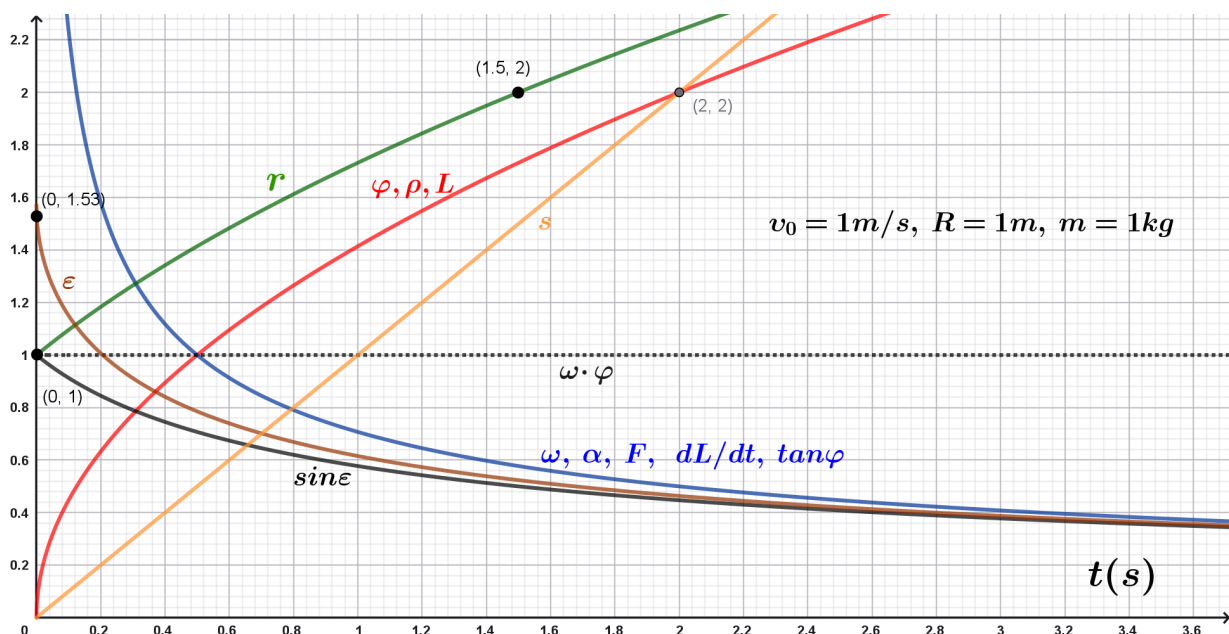
$$ds = |dr| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\varphi}{dx/d\varphi} = \frac{R \frac{d}{d\varphi} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi)}{R \frac{d}{d\varphi} (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi)} = \frac{\cos \varphi - \cos \varphi + \varphi \sin \varphi}{-\sin \varphi + \sin \varphi + \varphi \cos \varphi} = \tan \varphi$$

$$x = R(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) \rightarrow dx = R \varphi \cos \varphi$$

$$ds = \left(\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}\right) dx = \frac{1}{\cos \varphi} R \varphi \cos \varphi d\varphi = R \varphi d\varphi \rightarrow s(\varphi) = R \int_0^\varphi \varphi d\varphi = \frac{1}{2} R \varphi^2$$

$$s(t) = \frac{1}{2} R \left(\sqrt{\frac{2v_0}{R}} \sqrt{t} \right)^2 = v_0 t \rightarrow s(t) = v_0 t$$



Σχήμα 7: Τρόπος μεταβολής των εμπλεκόμενων μεγεθών σε συνάρτηση του χρόνου. Πριν τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ ($\varphi = 2 \text{ rad}$) το μήκος s της διαγραφείσας σπείρας είναι μικρότερο από την ακτίνα καμπυλότητας ρ . Η ακτίνα καμπυλότητας ρ αυξανόμενη γίνεται ίση με την ακτίνα του κύκλου R την $t = 0,5 \text{ s}$ ($\varphi = 1 \text{ rad}$)

Άλλος τρόπος υπολογισμού της καμπυλότητας (η οποία σε ένα σημείο P της καμπύλης ορίζεται και ως η μεταβολή της κατεύθυνσης της εφαπτομένης στο σημείο αυτό, δηλ. της γωνίας κλίσης τ της εφαπτομένης στο P της καμπύλης, ανά μονάδα μεταβολής του μήκους τόξου s της καμπύλης).

$$\kappa(\phi) \equiv \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| = \left| \frac{d\tau}{ds} \right|, \text{ όπου } \tau = \text{εφ.κλίσης} = y', \quad \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| = \left| \frac{d\tau}{ds} \right| = \left| \frac{d\tau}{dx} \right|, \quad \vec{T} = \text{μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα}$$

$$\tau = \arctan y' \rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \tan \tau \rightarrow y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{\cos^2 \tau} \frac{d\tau}{dx} \rightarrow \frac{d\tau}{dx} = (\cos^2 \tau) y'' = \frac{1}{1 + \tan^2 \tau} y'' = \frac{1}{1 + y'^2} y''$$

$$\left| \frac{d\tau}{ds} \right| = \left| \frac{d\tau / dx}{ds / dx} \right| = \frac{\frac{1}{1 + y'^2} |y''|}{(1 + y'^2)^{1/2}} \rightarrow \kappa = \frac{d\tau}{ds} = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy / d\phi}{dx / d\phi} = \dots = \tan \phi \rightarrow y'' = \frac{dy' / d\phi}{dx / d\phi} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \phi}}{R\phi \cos \phi} = \frac{1}{R\phi \cos^3 \phi}$$

$$\kappa = \left| \frac{d\tau}{ds} \right| = \frac{\frac{1}{R\cos^3 \phi}}{(1 + \tan^2 \phi)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{R\phi \cos^3 \phi}}{\frac{1}{\cos^3 \phi}} = \frac{1}{R\phi} \rightarrow \rho = \frac{1}{\kappa} = R\phi$$