

الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات
عالج موضوعا واحدا على الخيار
الموضوع الأول

التمرين الأول : (3 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ولتكن النقط $A(1,0,1)$ ، $B(0,2,1)$ ، $C(2,1,3)$ من هذا المستوي

1. عين شعاع ناظمي على المستوي (ABC) بمركبات صحيحة .

2. استنتج معادلة للمستوي (ABC) .

3. (S) سطح الكرة المعرف بالمعادلة $x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 0$.

أ - عين المركز H ونصف القطر r لهذا السطح .

ب - أحسب المسافة بين H والمستوي (ABC) .

ج - استنتج الوضع النسبي للمستوي (ABC) والسطح (S) .

4. بين أن المستقيم المعرف بـ : $\begin{cases} y = \sqrt{2} \\ x = z \end{cases}$ يمس سطح الكرة (S) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها .

التمرين الثاني : (6 نقط)

المستوي المركب ينسب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ بمقياس رسم $1cm$

1. نعتبر النقط A, B, C و D ذات اللواحق $z_A = 4 + i, z_B = 1 + i, z_C = 5i, z_D = -3 - i$ و

- علم هذه النقط على الشكل ، على أن يتم إكمال الشكل في سياق التمرين .

2. ليكن f التحويل النقطي للمستوي المركب في نفسه ، والذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z

النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = (1 + 2i)z - 2 - 4i$

أ - أعط صورتين النقطتين A و B بالتحويل f .

ب - بين أن التحويل f يقبل نقطة صامدة وحيدة Ω يطلب تحديد لاحقتها ω .

3. أ - برهن أنه من أجل كل عدد مركب z يكون : $z' - z = -2i(2 - i - z)$.

ب - استنتج من أجل كل نقطة M تختلف عن Ω ، القيمة $\frac{MM'}{\Omega M}$ واستنتج قياس الزاوية $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'})$ بالراديان .

ج - ما هي طبيعة المثلث $\Omega MM'$.

4. لتكن E النقطة ذات اللاحقة $z_E = -1 - i\sqrt{3}$

- أكتب z_E على الشكل الأسّي وضع النقطة E على الرسم

- أعط طريقة لتعليم النقطة E' صورة النقطة E بالتحويل f وعلمها على الشكل .

التمرين الثالث : (4 نقط)

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بحددها الأول $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + n - 1$ ،

1. أ - برهن أنه من أجل كل $n \geq 3$ ، $U_n \geq 0$.

ب - استنتج أنه من أجل كل $n \geq 4$ ، $U_n \geq n - 2$.

ج - استنتج نهاية المتتالية (U_n) .

2. نعرف المتتالية (V_n) على N كما يلي $V_n = 4U_n - 8n + 24$

أ - برهن أن (V_n) متتالية هندسية متناقصة وحدد أساسها وحددها الأول .

ب - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$ ،

ج - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_n = x_n + y_n$ حيث (x_n) متتالية هندسية و (y_n) متتالية حسابية يطلب تحديد الأساس والحد الأول لكل منهما .

د - أستنتج المجموع $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$ بدلالة n .

التمرين الرابع : (7 نقط)

لتكن الدالة f المعرفة على R ب : $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x$

وليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$ كما هو موضح في الشكل والمطلوب
تكملة الرسم

الجزء الأول :

1. أ - أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ مع التبرير .

ب - بين أن المستقيم $(D): y = \frac{1}{3}x$ مستقيم مقارب للمنحني (C) بجوار $+\infty$ ، وارسم (D) .

ج - أدرس الوضع النسبي للمنحني (C) والمستقيم (D) .

د - برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$ ،

هـ - احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$.

2. أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$ ،

ب - ادرس تغيرات الدالة f

ج - أعط جدول تغيرات الدالة f .

الجزء الثاني: ليكن n عدد طبيعي غير معدوم ، نسمي d_n الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) والمستقيم (D): $y = \frac{1}{3}x$ والمستقيمين اللذين معدلتهما $x=0$ و $x=n$.

$$d_n = \int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx$$

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،
2. نقبل أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $\ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$ ،
- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، $d_n \leq 1$ ،
- هل المتتالية (d_n) حيث $n \geq 1$ متقاربة ؟

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (3 نقط)

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية : $(E): y' - 3y = \sin x$

1. حل ، في R ، المعادلة التفاضلية التالية : $(E_0): y' - 3y = 0$
2. أوجد العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة p المعرفة على R بـ :
 $p(x) = a \cos x + b \sin x$ حل للمعادلة التفاضلية (E) في R .
3. بين أن f حل للمعادلة التفاضلية (E) على R إذا وفقط إذا كانت $f - p$ حل للمعادلة التفاضلية (E_0) على R
4. استنتج حلول المعادلة التفاضلية (E) على R .

التمرين الثاني : (5 نقط)

✓ ليكن $p(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث : $p(z) = z^3 + 4\sqrt{3}z^2 + 24z + 24\sqrt{3}$

$$p(z) = (z + 2\sqrt{3})(z^2 + 2\sqrt{3}z + 12)$$

1. تحقق أنه من أجل كل عدد مركب z ،
 2. حل في مجموعة الأعداد المركبة C ، المعادلة $z^2 + 2\sqrt{3}z + 12 = 0$
 3. استنتج الحلول في C للمعادلة $p(z) = 0$
- ✓ في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$
- نعتبر النقط A, B, C ذات اللواحق $z_A = -2\sqrt{3}, z_B = -\sqrt{3} + 3i, z_C = -\sqrt{3} - 3i$ على الترتيب .
1. أكتب كلا من z_A, z_B, z_C على الشكل الأسّي .

$$-\frac{\pi}{3}$$

2. ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.
- أ - أعط الكتابة المركبة للدوران R .
- ب - بين أن صورة A بالدوران R هي B .

ج - أحسب على الشكل الجبري لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران R .
 ✓ لتكن (Γ) الدائرة التي قطرها $[CD]$.

أ - تحقق أن النقطة O هي مركز الدائرة (Γ) .

ب - بين أن النقطتين A ، B تنتميان إلى (Γ) واستنتج طبيعة كل من المثلثين CAD و CBD .
التمرين الثالث : (4 نقط)

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2 - U_n} \end{cases}$$

1. لتكن المتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب :
 أ - أحسب U_1 ، U_2 و U_3 على شكل كسور غير قابلة للاختزال .
 ب- قارن الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (U_n) بالحدود الأربعة الأولى للمتتالية (W_n) المعرفة على N ب

$$W_n = \frac{n}{n+1}$$

ج - باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_n = W_n$.

2. لتكن المتتالية (V_n) المعرفة بحددها العام $V_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ حيث $\ln$ هو اللوغاريتم النيبيري .

أ - برهن أن $V_1 + V_2 + V_3 = -\ln 4$

ب - ليكن S_n المجموع المعرف من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n حيث :

$$S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

- أكتب S_n بدلالة n

- أحسب نهاية S_n من أجل n يؤول إلى $+\infty$

التمرين الرابع : (8 نقط)

أ) لتكن الدالة f المعرفة على R ب : $f(x) = \frac{1}{2}[x + (1-x)e^{2x}]$

وليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2. بين أن المستقيم $(\Delta): y = \frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

3. أدرس الوضع النسبي للمنحني (C) والمستقيم (Δ) .

4. لتكن الدالة g المعرفة على R ب : $g(x) = 1 + (1-2x)e^{2x}$.

- أدرس تغيرات الدالة g ، ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال

$[0.6; 0.7]$ واستنتج إشارة $g(x)$ على R .

5. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

6. أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$

7. أحسب $f(1), f(-1), f\left(\frac{3}{2}\right)$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]-\infty; -1]$

8. أنشئ المنحني (C) .

ب) لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-\infty; -1]$ بحيث : $F(-1) = \frac{1}{4}$
1. برر وجود الدالة F .

2. أدرس اتجاه تغير الدالة F على المجال $]-\infty; -1]$

3. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين
معدلتاهما $x=0$ و $x=1$

بالتوفيق والنجاح أستاذة المادة

الرسم خاص بالتمرين الرابع – الموضوع الأول – الإسم والقب :
القسم :

