ثانوية الشيخ بوعمامة عين الذهب – تيارت **المستوى : 3 ع ت 1 ، 2**

التاريخ : 17/05/2010 **المدة : 3 ساعات**

الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات

عـــالــج مـوضـوعـا واحـدا عـلـى الـخـيـار

الموضوع الأول

التمرين الأول : (3 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ولتكن النقط $A(1,0,1)$ ، $B(0,2,1)$ ، $C(2,1,3)$ من هذا المستوي

1. عين شعاع ناظمي على المستوي (ABC) بمركبات صحيحة .
2. استنتج معادلة للمستوي (ABC) .
3. (S) سطح الكرة المعرف بالمعادلة $x^2+y^2+z^2-4x=0$.

أ - عين المركز H ونصف القطر r لهذا السطح .

ب – أحسب المسافة بين H والمستوي (ABC).

ج - استنتج الوضع النسبي للمستوي (ABC) والسطح (S) .

4. بين أن المستقيم المعرف بـ : $\begin{cases} y=\sqrt{2} \\ x=z \end{cases}$ يمس سطح الكرة (S) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها .

التمرين الثاني : (6 نقط)

المستوي المركب ينسب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ بمقياس رسم $1cm$

1. نعتبر النقط C,B,A و D ذات اللواحق $z_C=5i, z_B=1+i, z_A=4+i$ و $z_D=-3-i$

- علم هذه النقط على الشكل ، على أن يتم إكمال الشكل في سياق التمرين .

2. ليكن f التحويل النقطي للمستوي المركب في نفسه ، والذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=(1+2i)z-2-4i$

أ – أعط صورتي النقطتين A و B بالتحويل f .

ب – بين أن التحويل f يقبل نقطة صامدة وحيدة Ω يطلب تحديد لاحقتها ω .

3. أ - برهن أنه من أجل كل عدد مركب z يكون : $z'-z=-2i(2-i-z)$.

ب - استنتج من أجل كل نقطة M تختلف عن Ω ، القيمة $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ واستنتج قيس الزاوية $\left(\overline{M\Omega},\overline{MM'}\right)$ بالراديان .

ج – ما هي طبيعة المثلث $\Omega MM'$.

4. لتكن E النقطة ذات اللاحقة $z_E=-1-i\sqrt{3}$

- أكتب z_E على الشكل الأسي وضع النقطة E على الرسم
- أعط طريقة لتعليم النقطة E' صورة النقطة E بالتحويل f وعلمها على الشكل .

التمرين الثالث : (4 نقط)

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بحدها الأول $U_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+n-1$

1. أ - برهن أنه من أجل كل $n\geq 3$ ، $U_n\geq 0$.

ب – استنتج أنه من أجل كل $n\geq 4$ ، $U_n\geq n-2$.

ج - استنتج نهاية المتتالية (U_n) .

2. نعرف المتتالية (V_n) على N كما يلي $V_n=4U_n-8n+24$

أ - برهن أن (V_n) متتالية هندسية متناقصة وحدد أساسها وحدها الأول .

ب – برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_n=7\left(\frac{1}{2}\right)^n+2n-6$

ج – بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_n=x_n+y_n$ حيث (x_n) متتالية هندسية و (y_n) متتالية حسابية يطلب تحديد الأساس والحد الأول لكل منهما .

د – أستنتج المجموع $S_n=\sum_{k=0}^{n}U_k$ بدلالة n .

التمرين الرابع : (7 نقط)

لتكن الدالة f المعرفة على R بـ : $f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)+\frac{1}{3}x$

وليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ كما هو موضح في الشكل والمطلوب تكملة الرسم

الجزء الأول :

1. أ – أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ مع التبرير .

ب – بين أن المستقيم $(D):y=\frac{1}{3}x$ مستقيم مقارب للمنحني (C) بجوار $+\infty$ ، وارسم (D) .

ج -أدرس الوضع النسبي للمنحني (C) والمستقيم (D) .

د – برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)=\ln\left(e^x+1\right)-\frac{2}{3}x$

هـ - احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$.

2. أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\frac{e^x-2}{3\left(e^x+1\right)}$

ب – ادرس تغيرات الدالة f

ج - أعط جدول تغيرات الدالة f .

الجزء الثاني : ليكن n عدد طبيعي غير معدوم ، نسمي d_n الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) والمستقيم $(D): y=\frac{1}{3}x$ والمستقيمين اللذين معدلتاهما $x=0$ و $x=n$.

$d_n=\int_0^n \ln\left(1+e^{-x}\right)dx$

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،
2. نقبل أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $\ln\left(1+e^{-x}\right)\le e^{-x}$
   - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 1$ ، $d_n\le 1$
   - هل المتتالية (d_n) حيث $n\ge 1$ متقاربة ؟

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (3 نقط)

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية : $(E): y'-3y=\sin x$

1. حل ، في R ، المعادلة التفاضلية التالية : $(E_0): y'-3y=0$
2. أوجد العددان الحقيقيان a و b حتى تكون الدالة p المعرفة على R بـ :
   $p(x)=a\cos x+b\sin x$ حل للمعادلة التفاضلية (E) في R .
3. بين أن f حل للمعادلة التفاضلية (E) على R إذا وفقط اذا كانت $f-p$ حل للمعادلة التفاضلية (E_0) على R
4. استنتج حلول المعادلة التفاضلية (E) على R .

التمرين الثاني : (5 نقط)

✔ ليكن $p(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث : $p(z)=z^3+4\sqrt{3}z^2+24z+24\sqrt{3}$

1. تحقق أنه من أجل كل عدد مركب z ، $p(z)=\left(z+2\sqrt{3}\right)\left(z^2+2\sqrt{3}z+12\right)$
2. حل في مجموعة الأعداد المركبة C ، المعادلة $z^2+2\sqrt{3}z+12=0$
3. استنتج الحلول في C للمعادلة $p(z)=0$

✔ في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

نعتبر النقط C,B,A ذات اللواحق $z_C=-\sqrt{3}-3i, z_B=-\sqrt{3}+3i, z_A=-2\sqrt{3}$ على الترتيب .

1. أكتب كلا من z_A ، z_B ، z_C على الشكل الأسي .
2. ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$
   أ – أعط الكتابة المركبة للدوران R .
   ب – بين أن صورة A بالدوران R هي B .

ج – أحسب على الشكل الجبري لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران R .

✔ لتكن (Γ) الدائرة التي قطرها $[CD]$.

أ – تحقق أن النقطة O هي مركز الدائرة (Γ) .

ب – بين أن النقطتين A ، B تنتميان إلى (Γ) واستنتج طبيعة كل من المثلثين CAD و CBD .

التمرين الثالث : (4 نقط)

1. لتكن المتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2-U_n} \end{cases}$

أ – أحسب U_1 ، U_2 و U_3 على شكل كسور غير قابلة للاختزال .

ب- قارن الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (U_n) بالحدود الأربعة الأولى للمتتالية (W_n) المعرفة على N بـ $W_n = \dfrac{n}{n+1}$

ج – باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_n = W_n$.

2. لتكن المتتالية (V_n) المعرفة بحدها العام $V_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ حيث ln هو اللوغاريتم النيبيري .

أ - برهن أن $V_1 + V_2 + V_3 = -\ln 4$

ب – ليكن S_n المجموع المعرف من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n حيث :

$S_n = V_1 + V_2 + ... + V_n$

- أكتب S_n بدلالة n

- أحسب نهاية S_n من أجل n يؤول إلى $+\infty$

التمرين الرابع : (8 نقط)

أ) لتكن الدالة f المعرفة على R بـ : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left[x + (1-x)e^{2x}\right]$

وليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.
2. بين أن المستقيم $(\Delta): y = \dfrac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للمنحني (C) بجوار $-\infty$.
3. أدرس الوضع النسبي للمنحني (C) والمستقيم (Δ) .
4. لتكن الدالة g المعرفة على R بـ : $g(x) = 1 + (1-2x)e^{2x}$.

- أدرس تغيرات الدالة g ، ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0.6;0.7]$ واستنتج إشارة $g(x)$ على R .

5. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

6. أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$

7. أحسب $f(1), f(-1), f\left(\frac{3}{2}\right)$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]-\infty;-1]$

8. أنشئ المنحني (C).

ب) لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-\infty;-1]$ بحيث : $F(-1)=\frac{1}{4}$

1. برر وجود الدالة F .
2. أدرس اتجاه تغير الدالة F على المجال $]-\infty;-1]$
3. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معدلتاهما $x=0$ و $x=1$

بالتوفيق والنجاح أستاذة المادة

الرسم خاص بالتمرين الرابع – الموضوع الأول – الإسم والقب : .....
القســـم : .....

