



Correction : Contrôle continue de Mécanique du point N°2
Durée : 2h

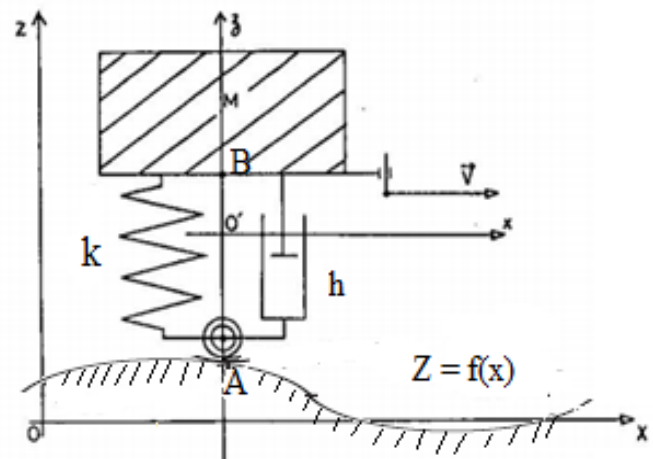
Exercice 2 : Etude d'un amortisseur de remorque

Une remorque, de masse totale $M = 100 \text{ kg}$, est tirée par un véhicule roulant à vitesse horizontale constante $\vec{V}$.

Elle repose sur une roulette A de dimensions et de masse négligeables, par l'intermédiaire d'une suspension verticale AB, de longueur l , de masse négligeable devant M , constitué d'un ressort de constante de raideur $k = 6,10 \cdot 10^3 \text{ N.m}^{-1}$ et d'un amortisseur (piston couissant dans un cylindre rempli d'huile) dont le coefficient d'amortissement fluide est h . La longueur au repos du ressort est $A_0B_0 = l_0 = 70 \text{ cm}$. La force verticale d'amortissement qui s'oppose au mouvement de M a ainsi pour module : $\|\vec{F}\| = h \frac{dl}{dt}$.

On suppose que la suspension reste toujours verticale et que la remorque peut être assimilée à une masse ponctuelle située en B.

On choisit le référentiel terrestre $\mathcal{R}$, supposé galiléen, lié au sol, associé au repère OXYZ, l'axe OZ étant vertical ascendant et l'axe OX horizontal, de direction et sens identiques à ceux de $\vec{V}$ (voir figure).



Le profil de la route peut être décrit par une fonction $Z = f(X)$.

Pour étudier les mouvements verticaux du point B de la remorque, on utilise un second référentiel $\mathcal{R}'$, animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse $\vec{V}$ par rapport à $\mathcal{R}$. On associe à ce référentiel le repère $O'xyz$.

L'altitude de O' dans le repère OXYZ sera définie plus loin à la question 1-1.

Le mouvement de B dans le référentiel $\mathcal{R}'$ sera décrit par une fonction $z = z(t)$ où t est le temps. L'intensité du champ de pesanteur, uniforme, est $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

Dans un premier temps (questions 1, 2 et 3) on considère que la route est plane et horizontale. Elle correspond ainsi à un profil $Z = 0$.

- 1-1 Le référentiel $\mathcal{R}'$ est-il galiléen ? Déterminer l'expression de la longueur l_e du ressort lorsque B est en équilibre dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

Correction

Le référentiel R' est en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel R supposé galiléen. R' est donc galiléen.

Système masse m

Bilan des forces $\vec{P}$, $\vec{T}$ et $\vec{F}$

Dans ce référentiel exprimons l'équilibre de point B :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0} \rightarrow -mg\vec{u}_z - k(l_1 - l_0)\vec{u}_z = \vec{0} \rightarrow l_1 - l_0 = \frac{-mg}{k}$$

$$l_1 = l_0 - \frac{mg}{k}$$

1-2 Calculer numériquement l_e

$$l_1 = 53,9 \text{ cm}$$

Remarques : dans toute la suite du problème, l'altitude de O' dans le repère $OXYZ$ sera choisi égale à cette longueur l_e .

D'autre part, on considérera que la roulette A reste toujours en contact avec la route.

2- Le coefficient d'amortissement h est considéré comme négligeable.

A la date $t = 0$, le point B est écarté de sa position d'équilibre O' . Il a alors pour cote $z_0 = 10 \text{ cm}$ dans le repère $O'xyz$ et il est abandonné sans vitesse initiale dans le référentiel R' .

2-1 Etablir l'équation différentielle du mouvement de B dans R' .

On écart B de sa position d'équilibre. En appliquant le P.F.D au point B il vient :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \Rightarrow m\vec{a} = -mg\vec{u}_z - k(l_1 - l_0)\vec{u}_z$$

On a donc de même

$$\vec{0} = -mg\vec{u}_z - k(l_1 - l_0)\vec{u}_z$$

D'où il vient

$$m\ddot{z} = -k(l - l_0)$$

Soit

$$m\ddot{z} = -kz$$

Soit

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0$$

2-2 Montrer que le mouvement de B est sinusoïdal, de pulsation ω_0 dont on précisera l'expression littérale.

Calculer numériquement la fréquence f_0 du mouvement.

On a :

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0$$

C'est une équation différentiel de second ordre sans second membre d'un oscillateur harmonique dont la solution est donnée par :

$$z(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Avec

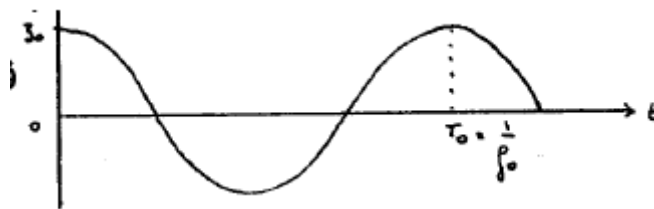
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

A et φ sont déterminés à partir des conditions initiales et on trouve :

$$z(t) = z_0 \cos(\omega_0 t)$$

2-3 Déterminer complètement la fonction $z(t)$ à partir des conditions initiales et en donner graphiquement l'allure générale.

$$A.N : f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 1,24 \text{ Hz}$$



3- L'amortissement h n'est plus négligeable.

3-1 Etablir la nouvelle équation différentielle du mouvement de B dans $\mathcal{R}'$.

On applique le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow m \ddot{z} \vec{e}_z = -mg \vec{e}_z - k(l - l_0) \vec{e}_z - h \dot{z} \vec{e}_z$$

De même en utilisant l'équation définissant l'équilibre on trouve l'équation :

$$m \ddot{z} = -kz - h \dot{z}$$

$$\ddot{z} + \frac{h}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = 0$$

Posons

$$\frac{h}{m} = 2\lambda \text{ et } \frac{k}{m} = \omega_0^2 \text{ on obtient l'équation :}$$

$$\ddot{z} + 2\lambda \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

3-2 Déterminer la valeur h_0 de l'amortissement pour lequel le régime est dit « critique ». Applications numérique.

C'est une équation différentielle linéaire du deuxième degré

Equation caractéristique :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$$

La solution $x(t)$ et la nature du mouvement de déplacement dépendent du signe de Δ' de l'équation caractéristique.

L'OSCILLATEUR CRITIQUE : RÉGIME CRITIQUE.

$\Delta' = 0$: Le régime de l'oscillateur est dit critique lorsque le discriminant de l'équation caractéristique est nul.

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\lambda = \omega_0 \Rightarrow \frac{h}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow h_0 = 2\sqrt{km} = 1562 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

3-3 Donner la solution générale de l'équation différentielle, puis déterminer complètement la fonction $z(t)$ à partir des mêmes conditions initiales.

La solution de l'équation (4) dans ce cas est donnée par :

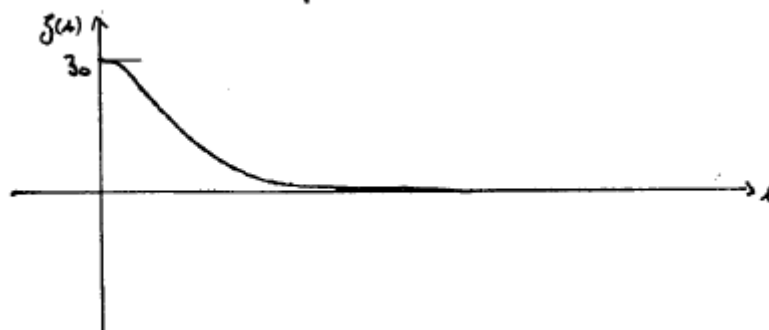
$$z(t) = (At + B)e^{-\lambda t}$$

A et B sont déterminés à partir des conditions initiales qui sont supposées être $x = X_{\max}$ et $v = 0$ à $t = 0$.

On trouve finalement :

$$z(t) = z_0(\omega_0 t + 1)e^{-\lambda t}$$

3-4. Donner graphiquement son allure générale.



3-5 Quel est l'intérêt pratique de la présence de l'amortisseur ?

L'amortisseur permet un retour rapide à la position d'équilibre sans oscillation.

La route possède maintenant un profil sinusoïdal de type « tôle ondulée » décrit par la fonction $Z = A_0 \cos(2\pi \frac{x}{L})$ où $A_0 = 5,0$ cm et où L est la longueur d'onde correspondant à la période spatiale du profil.

4- Quelles sont les expressions littérales de la fréquence f et de la pulsation ω du mouvement de la roulette A dans le référentiel $\mathcal{R}'$ en fonction de V et L ? On suppose que A reste toujours en contact avec le profil.

La route présente maintenant un profil sinusoïdal :

$$z = A_0 \cos 2\pi \frac{x}{L} = A_0 \cos 2\pi \frac{x}{L} = A_0 \cos \omega t \text{ avec } \omega = \frac{2\pi v}{L} \text{ et } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{L}$$

5- Dans le cas d'un profil sinusoïdal, Le référentiel $\mathcal{R}'$ est-il galiléen ? Etablir l'équation différentielle de B dans $\mathcal{R}'$.

Le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au châssis est maintenant en mouvement par rapport au référentiel. Ce mouvement étant accéléré $\mathcal{R}'$ n'est plus galiléen.

P.F.D dans $\mathcal{R}'$ devient :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}' + \vec{F}_e + \vec{F}_c = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_e = -m\vec{a}_e = -m\ddot{z}\vec{u}_z \text{ avec } z(t) = A_0 \cos(\omega t)$$

$$\dot{z}(t) = -A_0 \omega \sin \omega t$$

$$\ddot{z}(t) = -A_0 \omega^2 \cos \omega t$$

$$\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{A_0}{m}\omega^2 \cos \omega t$$

Posons $2\lambda = \frac{h}{m}$ et $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$

Dans le cas où $h = h_0$ on a

$$\lambda = \omega_0 \Rightarrow \frac{h}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow h_0 = 2\sqrt{km}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} =$$

$$Q=1/2$$

6- Le coefficient d'amortissement h correspond à la valeur « critique » h_0 déterminée à la question 3-2.

On pose $u = \frac{\omega}{\omega_0}$

6-1 Déterminez en régime sinusoïdal forcé l'expression de l'amplitude z_m et le déphasage φ de $z(t)$ en fonction de u .

En régime forcé (voir cours) la solution de l'équation différentielle est donnée par :

$$z(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi)$$

En utilisant la représentation complexe dans l'équation différentielle on peut déduire la valeur de Z_m et φ

On trouve que

$$Z_m(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}}$$

Et

$$\varphi(\omega) = - \operatorname{artg} \frac{\frac{\omega \omega_0}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2} = - \operatorname{artg} \frac{\omega \omega_0}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Posons :

$$\frac{\omega}{\omega_0} = u$$

Pour $h = h_0$ on $Q = \frac{1}{2}$ et l'équation devient :

L'équation devient :

$$Z_m(u) = \frac{A_0}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$$

$$\varphi(u) = - \operatorname{artg} \frac{u}{Q(1-u^2)}$$

Pour $h = h_0$ $Q = \frac{1}{2}$

$$Z_m(u) = \frac{A_0 u^2}{\sqrt{1+2u^2+u^4}} = \frac{A_0 u^2}{1+u^2}$$

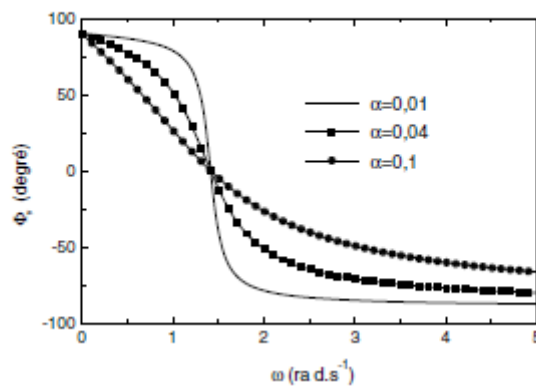
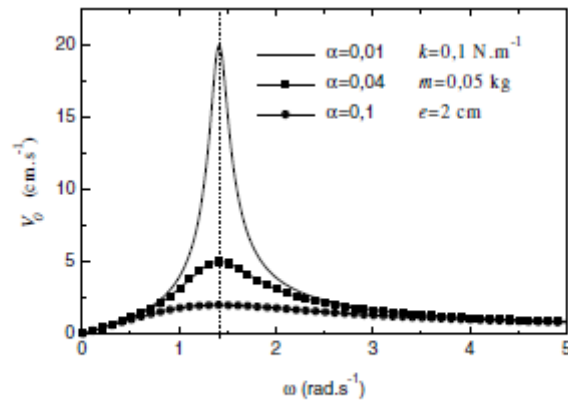
$$\varphi(u) = - \operatorname{artg} \frac{2u}{(1-u^2)}$$

6-2 Pour quelle(s) valeur(s) de u cette amplitude est-elle maximale ?

$$Z'_m(u) = \frac{2A_0 u}{(1+u^2)^2} = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$u \rightarrow \infty, Z_m(u) \rightarrow A_0$$

6-4 Tracer sur le même graphique l'allure de $z_m(u)$ pour $h = h_0$, $h < h_0$.



6-5 En déduire la bande passante et le type de filtre du système pour $h=h_0$.

Bande passante

$$Z_m(\text{Max}) = A_0, Z_m(u_c) = Z_m(u) = \frac{A_0 u^2}{1+u^2} = \frac{A_0}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \text{on trouve pour } u_c = \sqrt{2} - 1$$

La bande passante est définie par :

$$\omega(\sqrt{2} - 1) \leq \omega \leq \infty$$

Exercice 2 : Orbite de transfert (de Hohman)

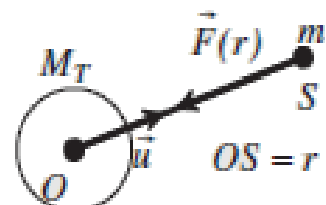
On considère un satellite de masse $m = 800 \text{ kg}$ se trouvant à une distance r du centre O de la terre. On note G la constante de gravitation, M_T la masse de la terre et r la distance entre O et le satellite. $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$, et $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

Étude générale

1-a) Comment s'écrit la force subie par le satellite ?

Force de gravitation est donnée par

$$\vec{F}(r) = -G \frac{M_T m}{r^2} \vec{u}$$



1-b) Déterminer l'énergie potentielle E_p du satellite (avec la convention $E_p = 0$ à l'infini).

La force $\vec{F} = F(r) \vec{e}_r$ dérive d'un potentiel $E_p(r)$ tel que $\vec{F} = - \text{grad} E_p(r)$

On

$$\vec{F} = - \frac{k}{r^2} \vec{e}_r \Rightarrow E_p = - \int F(r) dl$$

$$E_p = - \frac{k}{r} + cte, E_p(\infty) = 0 \Rightarrow cte = 0 \Rightarrow E_p = - \frac{GM_T m}{r}$$

1-c) Montrer que l'énergie mécanique du satellite se conserve.

La force $\vec{F} = F(r) \vec{e}_r$ dérive d'un potentiel $E_p(r)$ tel que $\vec{F} = - \text{grad} E_p(r)$, $\vec{F}$ est une force conservative Il y'a donc conservation de l'énergie mécanique.

$$E_m = E_p(r) + E_c = cte = E$$

1-d) Montrer que le mouvement est plan. Celui-ci est repéré en coordonnées polaires (r, θ) dans son plan ; montrer que la quantité $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ est constante.

On considère un repère galiléen R_g dont l'origine est le centre de la force centrale $\vec{F}$ au quelle est soumise une particule M de masse m.

Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué au point M :

$$\vec{F} = m \vec{a}(M/R_g)$$

Moment cinétique par rapport au centre de forces O :

$$\vec{L}_0(M/R_g) = m \vec{OM} \wedge \vec{v}(M/R_g)$$

Théorème du moment cinétique :

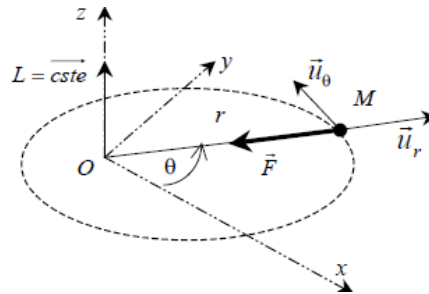
$$\frac{d\vec{L}_0(M/R_g)}{dt} = m \vec{OM} \wedge \vec{F} = m r \vec{e}_r \wedge f(r) \vec{e}_r = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{L}_0(M/R_g)}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_0(M/R_g) = cte = \vec{L}_0$$

Le moment cinétique par rapport au centre de forces d'un point matériel soumis à une force centrale est une constante du mouvement.

$$\vec{L}_0(M/R_g) = m \vec{OM} \wedge \vec{v}(M/R_g) = cte$$

montre que $\vec{OM}$ est toujours perpendiculaire à $\vec{C}$, il est de même pour $\vec{v}$: la trajectoire est donc dans le plan (π) contenant O, M et $\vec{v}$.



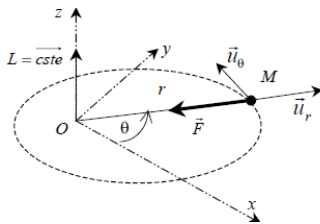
Mouvement plan d'un point matériel soumis à une force centrale

D'où la propriété fondamentale :

Les mouvements à force centrale sont des mouvements plans

LOI DES AIRES

Supposons qu'un point matériel M est soumis à une force centrale $\vec{F}$, donc le mouvement est plan. Prenons comme plan de mouvement de M le plan XOY muni de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et soit $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ la base polaire.



$$\vec{L}_0(M/Rg) = m\vec{OM} \wedge \vec{v}(M/Rg) = \vec{Cte}$$

$$\vec{Cte} = r\vec{e}_r \wedge m\vec{v}(M/R)$$

$$\vec{v}(M/R) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{L}_0(M/R) = \vec{Cte} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$

On définit la constante des aires C par :

$$C = r^2\dot{\theta}$$

Satellite sur orbite circulaire

Le satellite est maintenant sur une orbite circulaire autour de la Terre.

2-a) Montrer que le mouvement est uniforme et déterminer sa vitesse v

On a :

$$G \frac{M_T m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

2-b) Déduire l'expression de la période T de révolution.

$$2\pi r = vT \rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} \rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

2-c) Exprimer l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p . En déduire l'expression de l'énergie totale E_m en fonction de m , r , G et M_T . Quelle propriété de l'énergie mécanique présente-t-elle pour un état lié ?

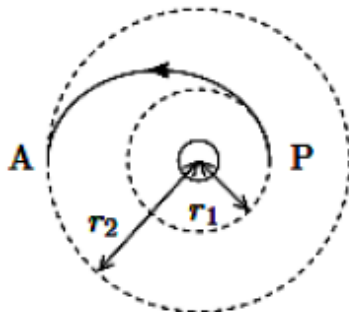
$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \frac{GM_T}{r}$$

$$E_p = -m \frac{GM_T}{r}$$

$$E_m = E_p + E_c = -\frac{1}{2}m \frac{GM_T}{r} < 0 \Rightarrow E_m < 0 \Rightarrow \text{système lié}$$

Changement d'orbite : ellipse de transfert

On désire réaliser le transfert d'un satellite terrestre en attente sur une orbite circulaire « basse » de rayon $r_1 = 6700\text{km}$ vers une orbite circulaire « haute » de rayon $r_2 = 42000\text{km}$, en passant par une orbite de transfert, dite de Hohman, tangente aux deux orbites circulaires.



3-a) Déterminer l'excentricité e et le paramètre p de l'ellipse en fonction de r_1 et r_2 .

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta} \Rightarrow r_1 = \frac{p}{1+e\cos\theta}$$

$$r_p = \frac{p}{1+e} \text{ et } r_A = \frac{p}{1-e}$$

En déduit

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$$

Et

$$p = 2 \frac{r_2 r_1}{r_2 + r_1}$$

3-b) Exprimer le demi-axe a , en fonction de r_1 et r_2 .

Demi axe

$$a = \frac{r_2 + r_1}{2} \text{ et } a = \frac{p}{1-e^2}$$

3-c) Calculer numériquement tous les paramètres de l'ellipse.

3-d) Calculer littéralement l'énergie totale du satellite en fonction de p , e et k constante d'interaction puis en fonction de a et k . Conclure.

$$E_m = \frac{k}{2p}(e^2 - 1) = -\frac{k}{2a}$$

L'énergie mécanique d'une satellite ne dépend pas de l'excentricité mais seulement de grand axe.

Pour faire passer le satellite de l'orbite circulaire r_1 à l'ellipse de transfert il suffit de faire passer sa vitesse au point P de la valeur V_1 à la valeur V_p

4-a) Exprimer la variation de l'énergie mécanique $\Delta E(P)$. Calculer V_p . Faut-il accélérer ou freiner le satellite ?

$$\Delta E(P) = E_{\text{ellipse}} - E_{r_1} = \frac{-GM_T m}{2a} + \frac{1}{2} \frac{GM_T m}{r_1} = \frac{GM_T m}{2} \left[-\frac{1}{a} + \frac{1}{r_1} \right] = \frac{GM_T m}{2} \frac{(a-r_1)}{ar_1}$$

$$\Delta E(P) = \Delta E_c(P) = \frac{1}{2} m (v_s^2 - v_r^2)$$

$$\frac{2\Delta E_c(P)}{m} = v_p^2 - v_r^2 \rightarrow v_p^2 = \frac{2\Delta E_c(P)}{m} + v_r^2 = v_r^2 + v_r^2 \left(a - r_1 \right) = v_r^2 \left(2 - \frac{r}{a} \right)$$

$$v_p = v_{r_1} \sqrt{\frac{2a}{a+r_1}}$$

4-b) De même, exprimer la variation d'énergie $\Delta E(A)$ du satellite au point A lorsqu'il passe de la vitesse V_p de l'orbite elliptique de transfert à la vitesse V_2 de l'orbite circulaire r_2 . Calculer V_A . Faut-il accélérer ou freiner le satellite ?

Exercice 11 : Orbite de transfert (de Hohman)

1. Demi grand axe : $a = \frac{r_1 + r_2}{2} = 48700 \text{ km}$
2. Vitesses : PFD.. $v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1}} = 7,7 \text{ km.s}^{-1}$ et $v_2 = 3,1 \text{ km.s}^{-1}$
3. Vitesses :
$$\begin{cases} v_P = v_1 \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} = 10,1 \text{ km.s}^{-1} \\ v_A = v_2 \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} = 1,6 \text{ km.s}^{-1} \end{cases}$$
4. Accroissements : $\Delta v_P = +3,4 \text{ km.s}^{-1}$, et $\Delta v_A = +1,5 \text{ km.s}^{-1}$. Il s'agit bien de deux poussées.