

Première partie : Oscillateur électronique

1. Régimes transitoires d'un circuit RLC :

1.1. D'après les conventions d'orientation du schéma, il est clair que : $q = C \cdot v$; $i = \frac{dq}{dt}$ et par conséquent : $i = C \cdot \frac{dv}{dt}$

1.2. En utilisant la loi des mailles sur le circuit entier, on obtient : $E = Ri + L \frac{di}{dt} + v$, soit en utilisant les relations précédentes de façon à éliminer le courant, et avec les notations de l'énoncé : $v'' + 2mw_o \cdot v' + w_o^2 \cdot v = w_o^2 \cdot E$

1.3. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle sans second membre est : $r^2 + 2mw_o^2 r + w_o^2 = 0$. Le discriminant réduit vaut : $D' = (m^2 - 1) \cdot w_o^2$ avec m positif ou nul d'après l'énoncé. On a donc trois cas suivant le signe de Δ'

■ soit $m > 1$: $\Delta' > 0$ et les racines sont réelles négatives : $r = w_o \left[-m \pm \sqrt{m^2 - 1} \right] < 0$: on a un **régime apériodique**.

■ soit $m < 1$: $\Delta' < 0$ et les racines sont complexes avec une partie réelle négative : on a un **régime pseudosinusoidal**.

■ soit $m = 1$: $\Delta' = 0$ et on a une racine double négative : $r = -w_o < 0$: on a un **régime apériodique critique** qui s'apparente au régime apériodique.

1.2.3. La résistance critique correspond à $\Delta' = 0$ c'est-à-dire $m = 1$ d'où : $R_c = 2Lw_o$ i.e. : $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

1.2.3. A.N. : $m = 0,25 < 1$: on est en régime pseudosinusoidal ;

$w_o = 5 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ et $R_c = 400 \Omega$.

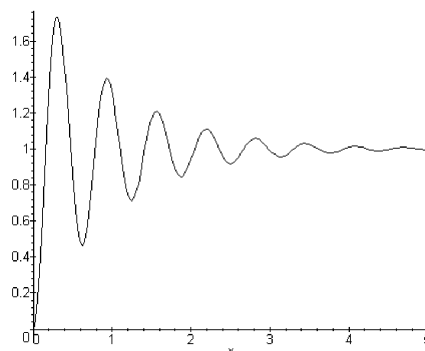
Lorsque $t = 0$:

■ la charge $q(t)$ du condensateur étant une fonction continue on a $q = 0$ d'où $v = 0$,

■ le courant $i(t)$ traversant la bobine étant une fonction continue on a $i = 0$ d'où $v' = 0$,

■ enfin, quand $t \rightarrow +\infty$: $q \rightarrow E$.

On obtient une courbe dont l'allure est la suivante :



1.3.1. Le générateur a disparu du circuit, l'équation différentielle est donc

la même que précédemment avec $E = 0$: $v'' + 2mw_o \cdot v' + w_o^2 \cdot v = 0$.

1.3.2. L'équation caractéristique associée est la même que celle de la question 1.2.2. et d'après les valeurs numériques (qui restent valables), on a $m = 0,25 < 1$. On a donc deux racines complexes que l'on note a_1 et a_2 :

$$a_1 = -mw_o + iw_o\sqrt{1-m^2} \text{ et } a_2 = -mw_o - iw_o\sqrt{1-m^2}.$$

1.3.3. Au nouvel instant initial, la charge q du condensateur vaut $q = C \cdot E$, et le courant i traversant la bobine est nul. En effet, le régime transitoire ayant disparu, le condensateur s'est chargé (sous la tension E) ce qui a eu pour effet de « couper » le courant (le condensateur se comportant alors comme un interrupteur ouvert). Comme précédemment q et i sont des fonctions continues et cela impose : $v = E$ et $v' = 0$ à $t = 0$. D'où : $A_1 + A_2 = E$ et $A_1 a_1 + A_2 a_2 = 0$. Soit, en résolvant ce système de deux équations à deux inconnues et en remplaçant a_1 et a_2 par leurs valeurs :

$$A_1 = \left[1 - \frac{\Im}{\sqrt{1-m^2}} \right] \frac{E}{2} \text{ et } A_2 = \left[1 + \frac{\Im}{\sqrt{1-m^2}} \right] \frac{E}{2}.$$

1.3.4. On a $\tan \varphi = \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$, donc en remplaçant dans les expressions de A_1 et

A_2 et en reportant dans celle de v , on trouve :

$v = (1 - itanq)\frac{E}{2}\exp(-mw_0t) \cdot \exp(iwt) + (1 + itanq)\frac{E}{2}\exp(-mw_0t) \cdot \exp(-iwt)$ On développe les exponentielles complexes et on a : $v = \frac{E}{\cos q}\exp(-mw_0t)[\cos q \cos wt + \sin q \sin wt]$ alors en comparant avec la relation donnée dans l'énoncé, on trouve : $K = \frac{E}{\cos q}$. La courbe correspondante est dessinée ci-contre :

1.3.5. Intéressons-nous aux transferts d'énergie entre l'instant initial ($t = 0$) et un instant « final » ($t \rightarrow \infty$).

■ Pour le condensateur, la variation d'énergie est : $DW_e = W_e(\infty) - W_e(t = 0) = 0 - \frac{1}{2}CE^2$.

■ Pour la bobine, il n'y a de courant ni au début, ni à la fin (seulement « entre les deux »), donc $DW_m = 0$.

■ Pour la résistance, de l'énergie est dissipée par effet Joule dès qu'un courant circule. La puissance ainsi dissipée est $P_{\text{joule}} = Ri^2$. D'où l'énergie totale dissipée par effet Joule : $W_{\text{joule}} = \int Ri^2 \cdot dt$. Mais on sait que $i = C \cdot \frac{dv}{dt}$ alors on peut trouver

$i(t)$ à l'aide de l'expression de $v(t) = K \cdot \exp(-m\omega_0 t) \cdot \cos(\omega t - \theta)$. On trouve : $i = \frac{-KCw}{\cos q} \sin \omega t \cdot \exp(-mw_0 t)$. Ainsi,

$W_{\text{joule}} = \frac{RK^2C^2w^2}{\cos^2 q} \int \exp(-2mw_0 t) \cdot \sin^2 \omega t \cdot dt$, on décompose alors le sinus en exponentielles complexes et on intègre

chacun des trois termes ainsi obtenus : $W_{\text{joule}} = \frac{RK^2C^2w^2}{4\cos^2 q} \left(\frac{1}{mw_0} + \frac{1}{-2mw_0 + 2iw} + \frac{1}{-2mw_0 - 2iw} \right)$. En réduisant au même

dénominateur et en remarquant que $m^2\omega_0^2 + \omega^2 = \omega_0^2$ on trouve : $W_{\text{joule}} = \frac{RK^2C^2w^4}{4\cos^2 q \cdot mw_0^3}$. Remplaçons K et R par leurs

valeurs : $W_{\text{joule}} = \frac{1}{2}CE^2 \left(\frac{w}{w_0 \cos q} \right)^4 = \frac{1}{2}CE^2 \left(\frac{m}{\sin q} \right)^4 = \frac{1}{2}CE^2 m^4 \left(1 + \frac{w^2}{m^2w_0^2} \right)^2$. Donc : $W_{\text{joule}} = \frac{1}{2}CE^2$.

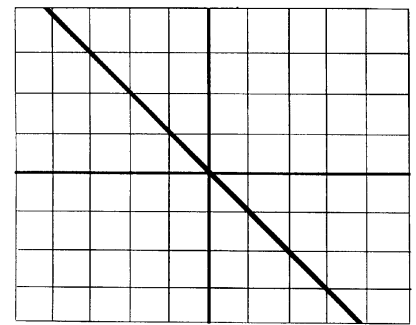
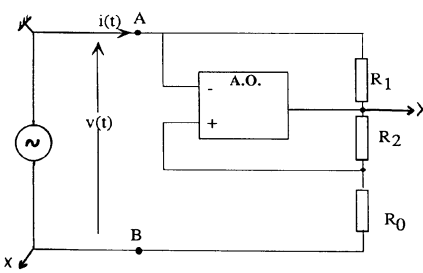
On peut donc déduire de cette étude : $DW_e + W_{\text{joule}} = 0$. **L'énergie qui était emmagasinée dans le condensateur a été dissipée dans la résistance par effet Joule.**

2. Oscillateur LC :

2.1.1. L'A.O. fonctionnant en régime linéaire et étant parfait, on peut affirmer que les courants de polarisation sont nuls, donc il passe un courant i dans R_1 et on appellera i' le courant traversant à la fois R_2 et R_0 , et par ailleurs, la tension entre les deux entrées (+ et -) de l'A.O. est nulle. Si on utilise la loi des mailles entre A, les deux entrées de l'A.O. et B, on obtient : $v = R_0 \cdot i'$ et pour la maille « faisant le tour de l'A.O. » on trouve : $R_1 \cdot i + R_2 \cdot i' = 0$ soit, après élimination de i' :

$v = -\frac{R_0 R_1}{R_2} i$, donc après identification, on a : $R = \frac{R_0 R_1}{R_2} = 100 \Omega$. On a ici un « montage à résistance négative ».

2.1.1. Afin de tracer la caractéristique $i = f(v)$ de ce montage, on doit mesurer sur la voie Y une tension proportionnelle au courant, on prend donc la tension aux bornes de la résistance R_1 comme l'indique le montage ci-contre. On mesure alors $X = -v$ et $Y = -R_1 \cdot i$. Si on passe en XY (ou **Lissajou**) on obtient donc $-R_1 \cdot i$ en fonction de $-v$, c'est-à-dire $R_1 \cdot i$ en fonction de v . Le facteur R_1 vaut 1000 d'où le calibre utilisé sur la voie Y. On voit alors sur l'oscilloscope la trace ci-contre :



2.1.2. Le circuit RLC est celui du premier paragraphe avec $R = 100 \Omega$. La loi des mailles nous donne donc, en supposant que l'A.O. fonctionne en régime linéaire, $Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} - Ri = 0$ soit : $q'' + w_0^2 q = 0$. La solution est donc sinusoïdale de

pulsation ω_0 : $q = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi)$. Or à $t=0$ $q=0$ donc $A=0$. **On observe donc des oscillations sinusoïdales dans le circuit.**

L'énergie dissipée par la résistance provenant des alimentations +15V/-15V de l'A.O. En fait, on a un oscillateur de Van der Pol qui va faire passer alternativement l'A.O. du régime linéaire au régime saturé, les oscillations dans le circuit étant alors quasi-sinusoïdales.

Deuxième partie : Oscillateur électromagnétique

3. Propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide :

3.1. L'équation de Maxwell-Faraday est $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\nabla \vec{B}}{\nabla t}$ d'où $\text{rot} \text{rot} \vec{E} = -\frac{\nabla \text{rot} \vec{B}}{\nabla t}$, or l'équation de Maxwell-Ampère dans le vide sans courant est : $\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\nabla \vec{E}}{\nabla t}$, par conséquent $\text{grad} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\nabla^2 \vec{E}}{\nabla t^2}$.

Or, l'équation de Maxwell-Gauss dans le vide en l'absence de charge est : $\text{div} \vec{E} = 0$, on obtient donc : $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\nabla^2 \vec{E}}{\nabla t^2} = \vec{0}$. Par ailleurs, en utilisant la même méthode pour $\vec{B}$, on obtient : $\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\nabla^2 \vec{B}}{\nabla t^2} = \vec{0}$.

3.2. L'équation de $\vec{E}$ projetée sur l'axe Ox donne : $\Delta E_x - \frac{1}{c^2} \frac{\nabla^2 E_x}{\nabla t^2} = 0$, c'est-à-dire : $\frac{\nabla^2 E_x}{\nabla x^2} + \frac{\nabla^2 E_x}{\nabla y^2} + \frac{\nabla^2 E_x}{\nabla z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\nabla^2 E_x}{\nabla t^2} = 0$ mais on cherche un champ indépendant de x et y, d'où : $\frac{\nabla^2 E_x}{\nabla z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\nabla^2 E_x}{\nabla t^2} = 0$ et l'équation est similaire pour E_y et E_z . On peut donc affirmer que chaque composante du champ électrique est solution de l'équation d'onde, donc chaque composante est de la forme : $E_x = f_1\left(t - \frac{z}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{z}{c}\right)$. Le terme $f_1\left(t - \frac{z}{c}\right)$ correspond à une onde plane progressive se propageant à la vitesse $+c \cdot \vec{k}$, tandis que le second terme $f_2\left(t + \frac{z}{c}\right)$ est une onde plane progressive se propageant à la vitesse $-c \cdot \vec{k}$.

3.3. On s'intéresse à une onde $\vec{E} = |E_x\left(t - \frac{z}{c}\right) E_y\left(t - \frac{z}{c}\right) E_z\left(t - \frac{z}{c}\right)|$ et on sait d'après l'équation de Maxwell-Gauss en l'absence de charges que $\text{div} \vec{E} = 0$. Cela nous donne : $0 + 0 + \frac{\nabla E_z}{\nabla z} = 0$. D'où $-\frac{1}{c} E_z' = 0$, c'est-à-dire $E_z = \text{cte}$. Mais on cherche une onde, c'est-à-dire un phénomène propagatif, les champs uniformes ne font pas partie des ondes donc pour l'onde $E_z = 0$.

Etudions par ailleurs $E_x\left(t - \frac{z}{c}\right)$: Soit (t_0, z_0) et cherchons l'ensemble des couples (t, z) tel que $E_x\left(t - \frac{z}{c}\right) = E_x\left(t_0 - \frac{z_0}{c}\right)$, on obtient $t - \frac{z}{c} = t_0 - \frac{z_0}{c}$ soit $z = z_0 + c(t - t_0)$ donc : $\frac{dz}{dt} = c$, l'onde se propage à la vitesse $+c \cdot \vec{k}$.

La direction de propagation est $\vec{k}$ et $E_z = 0$: **l'onde est transversale** car $\vec{E}$ est orthogonal à la direction de propagation. La vitesse de propagation de l'onde est $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$.

3.4. On prend $\vec{E} = E_1 \cdot \cos\left[w\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \cdot \vec{i}$ qui correspond à une onde progressive plane se propageant suivant $+\vec{i}$. On sait que $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\nabla \vec{B}}{\nabla t}$ d'où $\frac{\nabla \vec{B}}{\nabla t} = -E_1 \cdot \frac{w}{c} \sin\left[w\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \cdot \vec{j}$, ce qui s'intègre (en éliminant le champ statique) : $\vec{B} = \frac{E_1}{c} \cdot \cos\left[w\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \cdot \vec{j}$ d'où $\frac{E_1}{B_1} = c$ ce qui est rassurant pour une OPPM dans le vide...

3.5. On s'intéresse cette fois-ci à $\vec{E} = E_2 \cdot \cos\left[w\left(t + \frac{z}{c}\right)\right] \cdot \vec{i}$, un calcul analogue au précédent permet d'écrire : $\vec{B} = -\frac{E_2}{c} \cdot \cos\left[w\left(t + \frac{z}{c}\right)\right] \cdot \vec{j}$ d'où $\frac{E_2}{B_2} = c$.

4. Réflexion d'une onde plane sur un plan parfaitement conducteur :

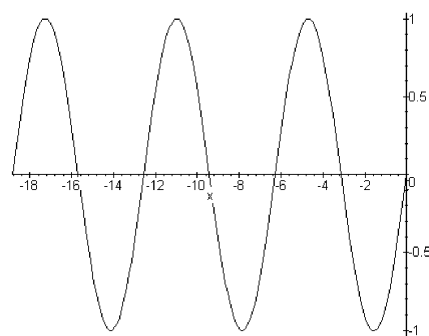
4.1. L'onde incidente $\vec{E}_i = E_1 \cdot \cos\left[w\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \cdot \vec{i}$ arrive en incidence normale sur le conducteur parfait. Appelons $\vec{E}_r$ l'éventuelle onde réfléchie. Il n'y a pas d'onde transmise puisque le champ électrique est nul dans le conducteur. Utilisons une relation de continuité du champ électrique afin de trouver $\vec{E}_r$. On sait en effet que $n_1 \cdot \vec{E}_1 + n_2 \cdot \vec{E}_2 = \vec{0}$ où l'indice 1 correspond, par exemple, à $z < 0$ et l'indice 2 à $z > 0$; les normales $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ étant orientées vers leur milieu respectif. On a donc dans le cas présent $\vec{E}_2 = \vec{0}$ et $\vec{n}_1 = -\vec{k}$. On obtient donc (puisque sur l'interface $z = 0$) : $-\vec{k} \cdot \left(E_1 \cos w t \cdot \vec{i} + \vec{E}_r(z = 0)\right) = \vec{0}$. On en déduit aisément que $\vec{E}_r = \vec{E}_1$ donc **une onde réfléchie prend naissance à la surface du conducteur**.

4.2. Posons $E_r = |E|. \cos\left[w\left(t + \frac{z}{c}\right)\right]$, en effet l'onde réfléchie se propage suivant $-k$ et a la même pulsation et la même vitesse que l'onde incidente (puisqu'elle se propage dans le même milieu). En $z = 0$ on a $E_r = E. \cos wt. i + E. \cos wt. j$. La relation de passage établie à la question précédente nous donne alors : $E_1 + E' = 0$ et $E = 0$. On en déduit le champ électrique réfléchi : $E_r = -E_1. \cos\left[w\left(t + \frac{z}{c}\right)\right]. i = E_2$. La question 3.4. permet alors de dire : $B_i = \frac{E_1}{c}. \cos\left[w\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]. j$ pour l'onde incidente, et la question 3.5. nous indique : $B_2 = \frac{E_1}{c}. \cos\left[w\left(t + \frac{z}{c}\right)\right]. j$ pour l'onde réfléchie.

4.1. Le champ électrique total est $E = E_i + E_r$ d'où : $E = 2E_1. \sin(wt). \sin\left(\frac{wz}{c}\right). i$ et de même pour

$$B = B_i + B_r \text{ qui nous donne : } B = \frac{2E_1}{c}. \cos(wt). \cos\left(\frac{wz}{c}\right). j.$$

4.2. On obtient donc une onde stationnaire qui ne se propage pas mais « vibre sur place ». Si on fixe le temps $t = t_0$ on obtient l'allure ci-contre pour le champ électrique. Le premier noeud de champ électrique est pour $z = -\frac{pc}{w}$



5. Oscillateur électromagnétique :

5.1. Soit w_e la densité volumique d'énergie électrique et w_m la densité volumique d'énergie magnétique. Il est bien clair que pour une onde électromagnétique cela n'a pas de sens de séparer ainsi l'énergie électromagnétique en énergie électrique et magnétique puisque les deux sont indissociablement liées. Par analogie avec la statique on définit cependant

$$w_e = \frac{e_o E^2}{2} = 2e_o E_1^2 \sin^2(wt) \cdot \sin^2\left(\frac{wz}{c}\right) \text{ et } w_m = \frac{B^2}{2m_o} = 2e_o E_1^2 \cos^2(wt) \cdot \cos^2\left(\frac{wz}{c}\right) \text{ puisque } \frac{1}{m_o c^2} = e_o.$$

5.2. Soit W_e et W_m les énergies électrique et magnétiques contenues dans le cylindre de section S et de longueur d . On a donc : $W_e = \iiint w_e \cdot dt$ et $W_m = \iiint w_m \cdot dt$.

$$\blacksquare W_e = 2Se_o E_1^2 \sin^2 wt \int \sin^2\left(\frac{wz}{c}\right) \cdot dz = \frac{2Se_o E_1^2 \sin^2 wt}{2} \int \left[1 - \cos\left(\frac{2wz}{c}\right)\right] \cdot dz \text{ mais comme } d = \frac{n\lambda}{2}, \text{ le}$$

cosinus est périodique de période $\lambda' = \frac{pc}{w} = \frac{\lambda}{2} = \frac{d}{n}$ il ne reste plus que : $W_e = Sde_o E_1^2 \sin^2 wt$ avec $S = 1 \text{ m}^2$.

$$\blacksquare \text{ De même } W_m = 2Se_o E_1^2 \cos^2 wt \int \cos^2\left(\frac{wz}{c}\right) \cdot dz = \frac{2Se_o E_1^2 \cos^2 wt}{2} \int \left[1 + \cos\left(\frac{2wz}{c}\right)\right] \cdot dz \text{ donc :}$$

$$W_m = Sde_o E_1^2 \cos^2 wt.$$

$$\blacksquare \text{ Par conséquent, l'énergie électromagnétique } W = W_e + W_m = Sde_o E_1^2 = cte \text{ avec } S = 1 \text{ m}^2.$$

5.3. On a donc $W_e = W \cdot \sin^2 \omega t$ et $W_m = W \cdot \cos^2 \omega t$. On peut donc en déduire aisément qu'il y a **échange permanent d'énergie entre le champ électrique et le champ magnétique**.