

Дата **19.12.2022** Группа ХКМ 2/1. Курс 2

Дисциплина: Техническая механика

Специальность: 15.02.06 «Монтаж и техническая эксплуатация холодильно-компрессорных машин и установок (по отраслям)»

Тема занятия: Геометрические характеристики плоских сечений

Цель занятия:

–*методическая*– совершенствование методики проведения лекционного занятия; сочетание инновационных методов обучения с традиционной методикой преподавания;

–*учебная*– дать представление о геометрических характеристиках плоских сечений

–*воспитательная*– воспитывать культуру общения с использованием специальной терминологии, усидчивость, внимательность, графические и аналитические способности, чувство гордости за выбранную профессию.

Вид занятия: лекция

Вид лекции: лекция-визуализация

Форма проведения занятия: объяснительно - иллюстративная с использованием моделей цепных.

Междисциплинарные связи:

Обеспечивающие: Материаловедение, Инженерная графика

Обеспечиваемые: Управление обслуживанием холодильного оборудования и контроль за ним (по отраслям), курсовое и дипломное проектирование.

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Аркуша А.И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов: Учеб. для средних спец. учебных заведений / А.И. Аркуша. – 4-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2002. – 352 с.: ил.
2. Олофинская В.П. Техническая механика: Курс лекций с вариантами практических и тестовых заданий: учебн. пособие. – 2-е изд. – М.: ФОРУМ: ИНФРА – М, 2008. – 349 с.

Дополнительная литература:

1. Куклин Н.Г., Куклина Г.С. Детали машин. Учебник для машиностроительных техникумов. – 4 изд., перераб. и доп. – М.: Высш.школа., 1987. – 383 с.
2. Леликов О.П. Основы расчета и проектирования деталей и узлов машин: М., Машиностроение, 2002. – 249 с.

<https://yandex.ru/video/preview/7156304452712978727> Оси центральные и главные.

Тема: Геометрические характеристики плоских сечений (4 часа)

4. Главные оси и главные центральные моменты инерции. Осевые моменты инерции простейших сечений.
5. Полярные моменты инерции круга и кольца.
6. Определение главных центральных моментов инерции составных сечений, имеющих ось симметрии.

4. Главные оси и главные центральные моменты инерции. Осевые моменты инерции простейших сечений

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называют *главными осями* (иногда их называют *главными осями инерции*). Через любую точку, взятую в плоскости сечения, можно провести в общем случае пару главных осей (в некоторых частных случаях их может быть бесчисленное множество).

В процессе поворота осей центробежный момент инерции изменяется **непрерывно**, следовательно, при некотором положении осей он становится равным нулю. Эти оси и являются **главными**.

Хотя мы и установили, что главные оси можно провести через любую точку сечения, но практический интерес представляют только те из них, которые проходят через центр тяжести сечения — **главные центральные оси**. В дальнейшем, как правило, для краткости будем называть их просто **главными осями**, опуская слово «центральные».

Осевыми моментами инерции сечения относительно осей x и y (см. рис. 32, а) называются определенные интегралы вида

$$\begin{aligned} J_x &= \int_A y^2 \cdot dA; \\ J_y &= \int_A x^2 \cdot dA. \end{aligned} \quad (38)$$

При определении осевых моментов инерции в некоторых случаях приходится встречаться с еще одной новой геометрической характеристикой сечения - центробежным моментом инерции.

Центробежным моментом инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей x и y (см. рис. 32, а) называется определенный интеграл вида

$$J_{xy} = \int_A xy \cdot dA. \quad (39)$$

Полярным моментом инерции сечения относительно начала координат O (см. рис. 32, а) называется определенный интеграл вида

$$J_\rho = \int_A \rho^2 \cdot dA, \quad (40)$$

где ρ - расстояние от начала координат до элементарной площадки dA .

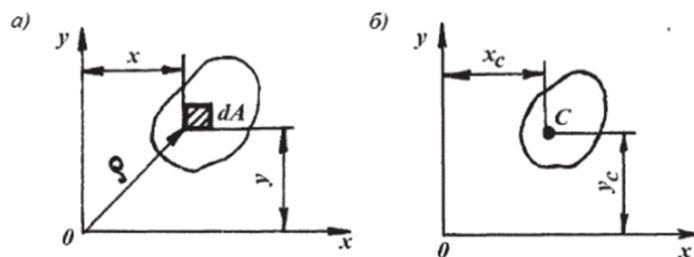


Рисунок 32- Расчетная модель определения статических моментов сечения: а) выделенное сечение в декартовой системе координат; б) положение центра тяжести сечения

Осевые и полярные моменты инерции всегда положительны, а центробежный момент в зависимости от выбора осей может быть положительным, отрицательным или равняться нулю. Единицы обозначения моментов инерции - см⁴, мм⁴.

Между полярным и осевыми моментами инерции существует следующая зависимость:

$$J_{\rho} = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA = \int_A x^2 \cdot dA + \int_A y^2 \cdot dA$$

$$J_{\rho} = J_x + J_y \quad (41)$$

Согласно формуле (41) сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно точки пересечения этих осей (начала координат).

Моменты инерции сечений относительно параллельных осей, одни из которых являются центральными (x_c, y_c) определяются из выражений:

$$\begin{aligned} J_x &= J_{xc} + a^2 A, \\ J_y &= J_{yc} + b^2 A, \\ J_{xy} &= J_{xcyc} + a \cdot b \cdot A, \end{aligned} \quad (42)$$

где a и b - координаты центра тяжести C сечения (рис. 34).

Формулы (42), имеющие большое практическое применение, читаются так: момент инерции сечения относительно какой-либо оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной и проходящей через центр тяжести сечения, плюс произведение площади сечения на квадрат расстояния между осями.

Обратите внимание: координаты a и b следует подставлять в приведенные выше формулы (42) с учетом их знаков.

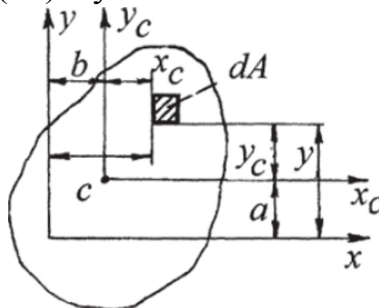


Рисунок 34 - Схема к выводу зависимостей между моментами инерции при параллельном переносе осей

Из формул (42) следует, что из всех моментов инерции относительно параллельных осей наименьший момент будет относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения, т. е. центральный момент инерции.

В формулы для определения прочности и жесткости конструкции входят моменты инерции, которые вычисляются относительно осей, являющихся не только центральными, но и главными. Для того чтобы определить, какие оси, проходящие через центр тяжести, являются главными, надо уметь определять моменты инерции относительно осей, повернутых относительно друг друга на некоторый угол.

Зависимости между моментами инерции при повороте координатных осей (рис. 35) имеют следующий вид:

$$J_u = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{(J_x - J_y) \cos 2\alpha}{2} - J_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$J_v = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{(J_x - J_y) \cos 2\alpha}{2} + J_{xy} \sin 2\alpha$$

$$J_{uv} = \frac{(J_x - J_y) \sin 2\alpha}{2} + J_{xy} \cos 2\alpha,$$

где α - угол поворота осей u и v относительно осей x и y соответственно. Угол α считается положительным, если поворот осей u и v происходит против часовой стрелки.

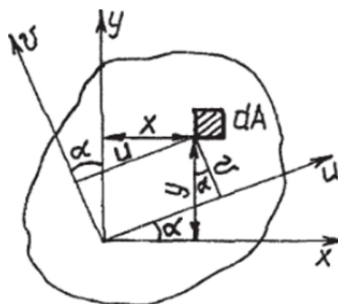


Рисунок 35- Схема к определению осевых моментов инерции при повороте координатных осей

Сумма осевых моментов инерции относительно любых взаимно перпендикулярных осей не меняется при их повороте:

$$J_u + J_v = J_x + J_y = J_{\max} + J_{\min} = \text{const.}$$

При повороте осей вокруг начала координат центробежный момент инерции меняется непрерывно, следовательно, при некотором положении осей он становится равным нулю.

Две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции сечения равен нулю, называются главными осями инерции.

Направление главных осей инерции можно определить так:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \quad (43)$$

Полученные из формулы (43) два значения угла α отличаются друг от друга на 90° и дают положение главных осей. Как видим, меньший из этих углов по абсолютной величине не превышает $\pi/4$. В дальнейшем будем пользоваться только меньшим углом. Проведенную под этим углом главную ось будем обозначать буквой x .

5. Полярные моменты инерции круга и кольца

Для круга вначале вычисляют полярный момент инерции, затем — осевые. Представим круг в виде совокупности бесконечно тонких колец (рис. 25.3).

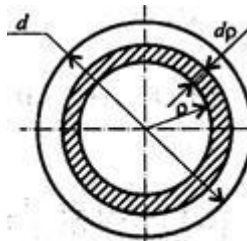


Рис. 25.3

Площадь каждого кольца можно рассчитать как площадь прямоугольника с длинной стороной, равной длине соответствующей окружности, и высотой, равной толщине кольца:

$$dA = 2\pi\rho d\rho.$$

Подставим это выражение для площади в формулу для полярного момента инерции:

$$\mathcal{J}_p = \int_A \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho; \quad \mathcal{J}_p = \frac{2\pi d^4}{4 \cdot 2^4} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Получим формулу для расчета полярного момента инерции круга:

$$\mathcal{J}_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Подобным же образом можно получить формулу для расчета полярного момента инерции кольца:

$$\mathcal{J}_p = \frac{\pi}{32}(d^4 - d_{\text{вн}}^4),$$

где d — наружный диаметр кольца; $d_{\text{вн}}$ — внутренний диаметр кольца.

Если обозначить

$$d_{\text{вн}}/d = c, \text{ то}$$

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} (1 - c^4).$$

Используя известную связь между осевыми и полярным моментами инерции, получим:

$$J_p = J_x + J_y; \quad J_x = J_y = \frac{J_p}{2};$$

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} \text{ (круг); } J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} (1 - c^4) \text{ (кольцо).}$$

Оси Ox и Oy параллельны.

При параллельном переносе прямоугольной системы осей y_0Ox_0 в новое положение yOx значения моментов инерции J_x , J_y , J_{xy} заданного сечения меняются. Задается формула перехода без вывода.

$$J_x = J_{x_0} + Aa^2,$$

здесь J_x — момент инерции относительно оси Ox ; J_{x_0} — момент инерции относительно оси Ox_0 ; A — площадь сечения; a — расстояние между осями.

6. Определение главных центральных моментов инерции составных сечений, имеющих ось симметрии (решение примера)

Координаты центра тяжести сечения можно выразить через статический момент:

$$x_c = \frac{S_y}{A} \quad y_c = \frac{S_x}{A}$$

где относительно оси Ox $S_x = \int y dA = y_c \cdot A$

относительно оси Oy $S_y = \int x dA = x_c \cdot A$

Статический момент площади фигуры относительно оси, лежащей в этой же плоскости, равен произведению площади фигуры на расстояние ее центра тяжести до этой оси. Статический момент имеет размерность L^3 . Статический момент может быть величиной положительной, отрицательной и равен нулю (относительно любой центральной оси).

Осевым моментом инерции сечения называется взятая по всему сечению сумма произведений или интеграл элементарных площадок на квадраты их расстояний до некоторой оси, лежащей в плоскости рассматриваемого сечения

$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA$$

Осевой момент инерции выражается в единицах - L^4 . Осевой момент инерции- величина всегда положительная и не равна нулю.

Оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называются центральными. Момент инерции относительно центральной оси называется центральным моментом инерции.

Момент инерции относительно какой-либо оси равен центральному моменту инерции относительно оси, параллельной данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями.

$$I_x = I_{xc} + a^2 A$$

$$I_y = I_{yc} + b^2 A$$

Из ряда параллельных осей момент инерции будет наименьшим относительно центральной оси.

Моменты инерции некоторых простых фигур:

для круга $I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4$

для кольца $I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64} (1 - c^4) \approx 0,05d^4 (1 - c^4)$ $c = d_o/d$

для полукруга $I_x \approx 0,11r^4 \approx 0,0068d^4$ $I_y = \frac{\pi r^4}{8}$

для квадрата $I_x = I_y = \frac{b^4}{12}$

для прямоугольника $I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{hb^3}{12}$

для треугольника $I_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_y = \frac{bh^3}{48}$

Алгоритм решения

1. Определяют положение центра следовательно тяжести сечения, а следовательно, и главных центральных осей (через статический момент)

2. Вычисляют (или берут) из таблиц значения моментов инерции отдельных частей сечения относительно собственных центральных осей, параллельных главным центральным осям всего сечения

3. Вычисляют моменты инерции частей, составляющих сечение, относительно его главных центральных осей. При этом используют зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей

4. Определяют главные центральные моменты инерции всего сечения путем суммирования для каждой из главных осей

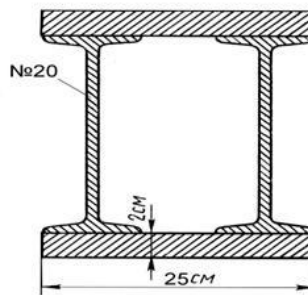
Задание.

Вычислить главные центральные моменты инерции плоского сечения.

Пример выполнения

Вычислить главные центральные моменты инерции плоского сечения.

Вычислить главные центральные моменты инерции плоского сечения.



Решение

1. Чертим чертеж в масштабе 1:2

2. Проводим оси координат и отмечаем точку О

3. Разбиваем сложную фигуру на простые

I – прямоугольник

II - прямоугольник

III- двутавр

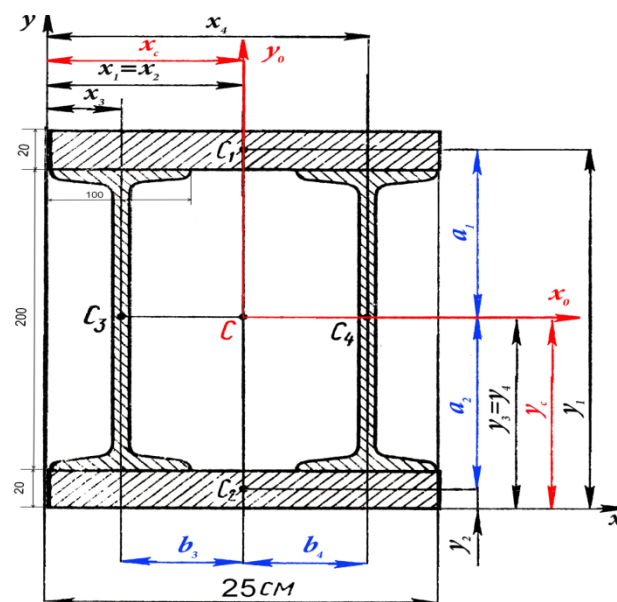
IV- двутавр

4. Вычислением и из таблиц (см. приложение) находим

- для прямоугольника $A_1 = A_2 = 25 \cdot 2 = 50 \text{ см}^2$

- для двутавра площадь $A_3 = A_4 = 26,8 \text{ см}^2$

($h = 200 \text{ мм}, b = 100 \text{ мм}, d = 5,2 \text{ мм}, t = 8,4 \text{ мм}, I_x = 1840 \text{ см}^4, I_y = 115 \text{ см}^4$)



Площадь всей фигуры

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 50 \cdot 2 + 26,8 \cdot 2 = 153,6 \text{ см}^2$$

5. Отмечаем положение центра тяжести и координаты каждой фигуры

C_1	C_2
$x_1 = 25/2 = 12,5 \text{ см}$	$x_2 = 25/2 = 12$

$y_1 = 2 + 20 + 2/2 = 23$	$y_2 = 2/2 = 1$ см
---------------------------	--------------------

C_3	C_4
$x_3 = \frac{10}{2} = 5$ см	$x_4 = 25 - 5 = 20$
$y_3 = 20/2 + 2 = 12$	$y_4 = 20/2 + 2 = 12$

6. Статический момент относительно оси

$$S_x = \sum Ay = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 + A_4 \cdot y_4$$

$$= 50 \cdot 23 + 50 \cdot 1 + 26,8 \cdot 12 + 26,8 \cdot 12 = 1843,2 \text{ см}^3$$

$$S_y = \sum Ax = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3 + A_4 \cdot x_4$$

$$= 50 \cdot 12,5 + 50 \cdot 12,5 + 26,8 \cdot 5 + 26,8 \cdot 20 = 1920 \text{ см}^3$$

7. Координата точки С

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{1920}{153,6} = 12,5 \text{ см}$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{1843,2}{153,6} = 12 \text{ см}$$

8. На чертеже отмечаем положение точки С (12,5; 12) и через нее проводим центральные (главные) оси x_0 и y_0

9. Отмечаем на чертеже и вычисляем расстояния от центра тяжести каждой фигуры до центральной оси x_0 и y_0

$a_1 = y_1 - y_c = 23 - 12 = 11$	$b_1 = 0$
$a_2 = y_c - y_2 = 12 - 1 = 11$	$b_2 = 0$
$a_3 = 0$	$b_3 = x_c - x_3 = 12,5 - 5 = 7,5$ см
$a_4 = 0$	$b_4 = x_4 - x_c = 20 - 12,5 = 7,5$

10. Осевой момент инерции для каждой фигуры

$$I_{x1} = I_{x2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{25 \cdot 2^3}{12} = 16,6 \text{ см}^4$$

$$I_{y1} = I_{y2} = \frac{hb^3}{12} = \frac{2 \cdot 25^3}{12} = 2604,16 \text{ см}^4$$

$$I_{x3} = I_{x4} = 1840 \text{ см}^4$$

$$I_{y3} = I_{y4} = 115 \text{ см}^4$$

11. Осевой момент инерции относительно главных осей

$$A) \quad I_{xo} = I_{xo1} + I_{xo2} + I_{xo3} + I_{xo4}$$

$$I_{xo1} = I_{x1} + a_1^2 \cdot A_1 = 16,6 + 11^2 \cdot 50 = 6066,6 \text{ см}^4$$

$$I_{xo2} = I_{x2} + a_2^2 \cdot A_2 = 16,6 + 11^2 \cdot 50 = 6066,6 \text{ см}^4$$

$$I_{xo3} = I_{x3} + a_3^2 \cdot A_3 = 1840 + 0^3 \cdot 26,8 = 1840 \text{ см}^4$$

$$I_{xo4} = I_{x4} + a_4^2 \cdot A_4 = 1840 + 0^3 \cdot 26,8 = 1840 \text{ см}^4$$

$$I_{xo} = 6066,6 + 6066,6 + 1840 + 1840 = 15813,2 \text{ см}^4$$

$$B) \quad I_{yo} = I_{yo1} + I_{yo2} + I_{yo3} + I_{yo4}$$

$$I_{yo1} = I_{y1} + b_1^2 \cdot A_1 = 2604,16 + 0^2 \cdot 50 = 2604,16 \text{ см}^4$$

$$I_{yo2} = I_{y2} + b_2^2 \cdot A_2 = 2604,16 + 0^2 \cdot 50 = 2604,16 \text{ см}^4$$

$$I_{yo3} = I_{y3} + b_3^2 \cdot A_3 = 115 + 7,5^2 \cdot 26,8 = 1622,5 \text{ см}^4$$

$$I_{yo4} = I_{y4} + b_4^2 \cdot A_4 = 115 + 7,5^2 \cdot 26,8 = 1622,5 \text{ см}^4$$

$$I_{yo} = 2604,16 + 2604,16 + 1622,5 + 1622,5 = 8453,32 \text{ см}^4$$

Контрольные вопросы

1. Что такое статический момент сечения?

Как определяется статический момент сечения относительно нейтральной оси?

2. Чему равен статический момент сечения относительно центральной оси?

3. Что такое осевой момент инерции сечения и в каких единицах он измеряется?

4. Какова зависимость между осевыми моментами инерции относительно параллельных осей?

5. Какие оси, проведенные в плоскости сечения, называются главными? главными центральными?

6. Как определяются осевые моменты инерции сложных составных сечений?

Задание для самостоятельной работы:

1. Ознакомиться с лекционным материалом
2. Разобраться в алгоритме решения задачи (вопрос 6)
3. Письменно ответить на контрольные вопросы

Фотографии отчета прислать в личном сообщении ВК
<https://vk.com/id139705283>

На фотографиях вверху должна быть фамилия, дата выдачи задания, группа, дисциплина. Например: «Иванов И.И, **19.12.2022**, группа ХКМ 3/1, Техническая механика».