Матан179-2023-10д-л02-вер2 **Предел последовательности**

Определение: Число a – ***предел*** последовательности $\{a_i\} \leftrightharpoons (\forall \varepsilon > 0)$ $[U_\varepsilon(a)$ – ловушка $\{a_i\}]$

Обозначения: $\lim\limits_{i \to \infty} x_i = a$, или просто $\lim x_i = a$, или $x_i \to a$.

Сравните со школьным Определением: Число a называется пределом последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$, если для каждого положительного числа ε найдется номер k такой, что при всех $i > k$ выполняется неравенство $|a - x_i| < \varepsilon$.

1. Рассмотрим следующие десять последовательностей, там, где это не очевидно, найдите формулу общего члена последовательности:
   - 1.1. ○ 1, ½ , ⅓, ¼, …, $\frac{1}{n}$,...
   - 1.2. ○ 1, 0, ½ , 0 , 0, ⅓, 0, 0, 0, ¼, 0, 0, 0, 0, ⅕ …
   - 1.3. ○ $x_i = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^i}$
   - 1.4. $x_i = 1 + \frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^3 + \ldots + (\frac{2}{3})^i$
   - 1.5. ○ 1, 1, 1, …
   - 1.6. ○ 1, – 1, 1, – 1, 1, – 1, 1, …
   - 1.7. ○ 1, ½ ,1 , ⅓, 1, ¼, …
   - 1.8. ○ $1,\ -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots$
   - 1.9. ● $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{1}, \ldots, \frac{1}{9}, \frac{1}{1}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{1}{11}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{99}, \frac{1}{2}, \frac{1}{100}, \frac{1}{3}, \frac{1}{101}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{999}, \frac{1}{3}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{4}, \ldots$
   - 1.10. ○ $\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \ldots$
2. ○ Найдите пределы последовательностей: 1.1 – 1.4; 1.8 – 1.10
3. ○ Докажите, что 1 не предел последовательности 1.1
4. ○ Есть ли пределы у последовательностей 1.5 – 1.7

   ○ **Опр:** Число a – ***предельная точка*** последовательности $\{a_i\} \leftrightharpoons (\forall \varepsilon > 0)$ $[U_\varepsilon(a)$ – кормушка $\{a_i\}]$
5. ○ Приведите пример последовательности и ее *предельной точки*, которая не *предел*. Есть ли такие среди 1.
6. ○ Придумайте последовательность, у которой все натуральные числа – предельные точки.
7. ○ То же, но, чтобы там не было целых чисел и все члены последовательности были разными.
8. ○ Придумайте последовательность, у которой все числа вида $\frac{1}{n}$ – предельные точки.
9. ○ Придумайте последовательность, у которой все рациональные числа – предельные точки.
10. ○ Запишите, не используя отрицания формулу для свойства: число a <u>не</u> является пределом последовательности $\{x_i\}$.
11. ○ Выясните, что означают следующие формулы и какие из них означают уже известные нам понятия, найдите пары противоположных формул, формул с одинаковым смыслом:

$(\exists\varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\exists i > k)[x_i \in U_\varepsilon(a)]$	$(\exists\varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\exists i > k)[x_i \notin U_\varepsilon(a)]$
$(\exists\varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall i > k)[x_i \in U_\varepsilon(a)]$	$(\exists\varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall i > k)[x_i \notin U_\varepsilon(a)]$
$(\exists\varepsilon > 0)(\forall k \in \mathbb{N})(\exists i > k)[x_i \in U_\varepsilon(a)]$	$(\exists\varepsilon > 0)(\forall k \in \mathbb{N})(\exists i > k)[x_i \notin U_\varepsilon(a)]$
$(\exists\varepsilon > 0)(\forall k \in \mathbb{N})(\forall i > k)[x_i \in U_\varepsilon(a)]$	$(\exists\varepsilon > 0)(\forall k \in \mathbb{N})(\forall i > k)[x_i \notin U_\varepsilon(a)]$
$(\forall\varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\exists i > k)[x_i \in U_\varepsilon(a)]$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\exists i > k)[x_i \notin U_\varepsilon(a)]$
$(\forall\varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall i > k)[x_i \in U_\varepsilon(a)]$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall i > k)[x_i \notin U_\varepsilon(a)]$
$(\forall\varepsilon > 0)(\forall k \in \mathbb{N})(\exists i > k)[x_i \in U_\varepsilon(a)]$	$(\forall\varepsilon > 0)(\forall k \in \mathbb{N})(\exists i > k)[x_i \notin U_\varepsilon(a)]$
$(\forall\varepsilon > 0)(\forall k \in \mathbb{N})(\forall i > k)[x_i \in U_\varepsilon(a)]$	$(\forall\varepsilon > 0)(\forall k \in \mathbb{N})(\forall i > k)[x_i \notin U_\varepsilon(a)]$

12. ○ Среди следующих условий найдите эквивалентные:
   - 12.1. $(\exists\varepsilon > 0)(\forall k \in \mathbb{N})(\forall i > k)[x_i \in U_\varepsilon(a)]$
   - 12.2. $(\exists\varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall i > k)[x_i \in U_\varepsilon(a)]$
   - 12.3. $(\exists\varepsilon > 0)(\forall i)[x_i \in U_\varepsilon(a)]$
   - 12.4. $(\exists\varepsilon > 0)(\forall i)[|x_i| < \varepsilon]$
13. ○ напомним определения: Пусть $\{a_i\}$ – бесконечная последовательность

   число a – *предел* $\{a_i\} \leftrightharpoons$ любая α – окрестность точки a – $U_\alpha(a)$ – является ловушкой $\{a_i\}$.

   число a – *предельная точка* $\{a_i\} \leftrightharpoons$ любая α – окрестность точки a – $U_\alpha(a)$ – является кормушкой $\{a_i\}$.

   Предположим, члены последовательности выписаны на картах бесконечной колоды. (бесконечной в одну сторону, начало у колоды есть.) Кто-то взял и перетасовал колоду (т.е. поменял порядок карт. Любая перестановка множества $\mathbb{N}$ даст такую перетасовку)

13.1. Докажите: если число a – предел исходной последовательности, оно же будет и пределом перетасованной.

13.2. Докажите: если число a – предельная точка исходной последовательности, оно же будет предельной точкой перетасованной.

13.3. Что из (13.1; 13.2) будет верно, если при перетасовке какие-то карты выпадут? (но останется бесконечное количество карт)

14. Как вам известно, множество дробей счетно, т.е. его можно перенумеровать натуральными числами (тем самым расположить в последовательность). Следовательно, и множество рациональных чисел на интервале (0;1) тоже счетно. Придумайте счетное множество интервалов так, чтобы каждое рациональное число попадало в один из этих интервалов, и сумма длин всех интервалов была бы меньше ½.

14.1. Такое семейство интервалов называется ***покрытием*** данного множества.

14.2. ○ Докажите, что $\forall \varepsilon > 0$ найдется покрытие множества рациональных чисел на интервале (0;1) с суммарной длиной $< \varepsilon$

14.3. ○ Какова вероятность, бросая совершенно случайно точку на отрезок [0;1], попасть в рациональную точку. Считаем, что попадание в любую точку – элементарное событие и они все равновероятны.

14.4. ○ **(*лемма о компактности отрезка – очень важная*)** Пусть дан отрезок действительной прямой $[a; b]$. И пусть дано его покрытие открытыми интервалами (оно может быть бесконечным и даже несчетным). Докажите, что из данного покрытия можно выбрать конечное подмножество, являющееся покрытием $[a; b]$ (***конечное подпокрытие***) *Если не получается попробуйте от противного*

14.4.1. ○ А будет ли то же самое верно, если мы возьмем не замкнутый интервал?

15. ○ Может ли сходящаяся к 0 последовательность перестать сходиться к 0, если переставить её члены?

15.1. Последовательность $\{a_i\}$ стремится к 0, а последовательность $\{b_i\}$ ограничена. Доказать, что последовательность произведений $\{c_i: c_i = a_i \cdot b_i\}$ стремится к нулю.

15.2. Известно, что последовательность неотрицательных чисел стремится к нулю. Доказать, что последовательность квадратных корней из них также стремится к нулю.

16. ○ Найти предел последовательностей: а) $\sqrt[n]{2}$; б)● $\sqrt[n]{n}$; в) $a_0 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$;

17. ○ Доказать, что если последовательность x_n имеет ненулевой предел и все её члены отличны от нуля, то последовательность $y_n = 1/x_n$ ограничена.

18. ○ Может ли сходящаяся последовательность перестать сходиться, если изменить конечное число её членов?

19. ○ Может ли сходящаяся последовательность начать сходиться к другому пределу, если изменить все её члены с нечётными номерами?

20. ○ Может ли сходящаяся последовательность иметь расходящуюся подпоследовательность?

21. ○ Доказать, что сходящаяся последовательность всегда ограничена.

22. ○ Последовательность $\{a_i\}$ стремится к 0, а последовательность $\{b_i\}$ ограничена. Доказать, что последовательность произведений $\{c_i: c_i = a_i \cdot b_i\}$ стремится к нулю.

23. ○ Известно, что последовательность неотрицательных чисел стремится к нулю. Доказать, что последовательность квадратных корней из них также стремится к нулю.

24. ○ Сходится ли $10^n/2^{(n^2)}$?

25. ○ Может ли сходящаяся последовательность не иметь ни наибольшего, ни наименьшего членов?

26. ○ Последовательность состоит из положительных членов, при этом сумма любого числа её членов не превосходит 1. Доказать, что она стремится к 0.

27. ○ Для последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ докажите для следующих равенств: если существует правая часть, то существует и левая, и они равны:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$;

г) то же для отношения двух последовательностей. (каковы ограничения для в) и г)

28. ● Верно ли, что $\lim P(x_n) = P(\lim x_n)$ для а) многочлена; б) рациональной функции; в*) произвольной функции?

29. ● Пусть а) $x_n < y_n$; б) $x_n \le y_n$ и обе последовательности *сходятся*. Обязательно ли точно такие же неравенства выполняются и для их пределов?

30. ● Даны три последовательности: $\{z_n\}$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$; причем $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ сходятся к одному пределу, и $\forall n [x_n \le z_n \le y_n]$. Докажите, что $\{z_n\}$ имеет тот же предел. (***теорема о двух милиционерах***)

31. Найти пределы: а) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; б) $x_n = \sqrt{n^2 + n} - n$ в) $x_0 = 1, x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$; г) $x_0 = 1,\ x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{3}{x_n}}{2}$; д) $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$;

32. Последовательность чисел Фибоначчи задается так: $x_0 = x_1 = 1$; для $n > 1$ $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$.

Рассмотрим последовательность $\{y_i\} : y_i = \frac{x_i}{x_{i+1}}$. Докажите, что $\{y_i\}$ сходится, и найдите ее предел.

32.1. Выпишите первые 5 получающихся дробей

32.2. Для последовательности конечных цепных дробей вида: $1,\ 1 + \frac{1}{1},\ 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}},\ \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}$*… выпишите 5 первых членов.*

32.3. Являются ли эти последовательности возрастающими / убывающими?

32.4. А если взять из них только члены, стоящие на четных / нечетных местах?

32.5. Считая, что предел есть, найдите его.

32.6. Во сколько раз уменьшается длина “подозрительного” промежутка при увеличении n *на 1?*

33. Последовательность $\{x_i\}$ обладает свойством: $\forall i\ |x_{i+1} - x_i| < \frac{1}{i^2}$ Докажите, что она сходится.

33.1. А если $|x_{i+1} - x_i| < \frac{1}{i}$?

34. Есть ли последовательность, предельными точками которой являются числа вида $\frac{1}{n}$ и только они?

35. Имеется множество отрезков, любые два из которых имеют общую точку. Можно ли утверждать, что существует точка, принадлежащая всем отрезкам?

35.1. Тот же вопрос для кругов на плоскости.

35.2. Тот же вопрос для прямоугольников на плоскости со сторонами параллельными осям координат; (прямоугольник рассматривается вместе со внутренностью).

36. На плоскости имеется конечное множество кругов, причём любые три круга из этого множества имеют общую точку. Следует ли из этого, что существует точка, принадлежащая всем кругам?

36.1. Тот же вопрос для бесконечного множества кругов.

37. К задаче 27.

37.1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \wedge \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$ $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = x - y$

37.2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \wedge \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = xy$ *Рассмотрите последовательности* $x + (\Delta x)_n$, $y + (\Delta y)_n$ *вместо* x_n и y_n

37.3. Последовательность x_n сходится к $a \ne 0$. Доказать, что почти все её члены отличны от 0 и что последовательность $y_n = \frac{1}{x_n}$ сходится к $\frac{1}{a}$.

37.4. Найти предел последовательности: $\frac{2n^2+n+3}{3n^2-n-2}$

37.5. Если одна из последовательностей x_n и y_n сходится, а другая расходится? Что можно сказать о последовательности их почленных сумм? Произведений?

37.5.1. А если обе расходятся?

38. Дайте определения окрестности бесконечности, стремящейся к бесконечности последовательности. *При этом нужно, чтобы последовательность стремилась к бесконечности ⇔ последовательность обратных чисел стремилась к нулю.*

39. Дано $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Д-ть: $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$. Верно ли обратное? А $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1}/x_n) = ?$

40. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Что можно сказать о последовательностях: $x_n + y_n$, $x_n \cdot y_n$, x_n/y_n?