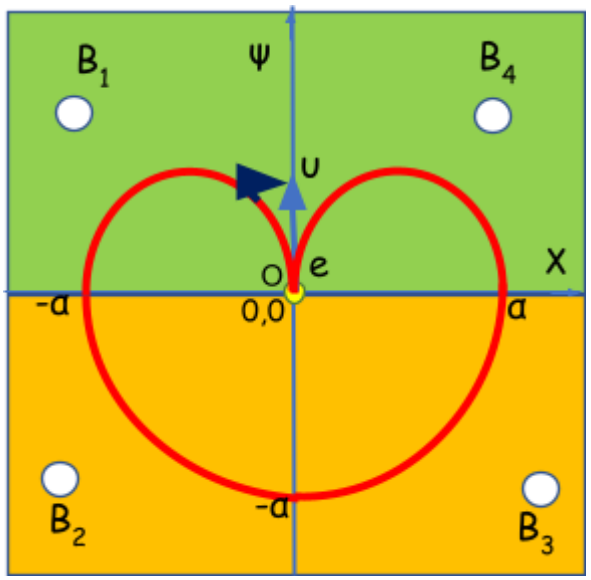
Από την τροχιά του e, στις εντάσεις των ΜΠ…

Στο διπλανό σχήμα βλέπετε την οριζόντια τροχιά ενός e που βλήθηκε την t=0 από το σημείο (0,0) του ορθογώνιου συστήματος (χ,ψ), με ταχύτητα υ οριζόντια ,ενώ στην περιοχή επικρατούν μαγνητικά πεδία κατακόρυφα, οπότε το e διαγράφει την τροχιά που φαίνεται στο σχήμα και η οποία βέβαια συνεχίζει.

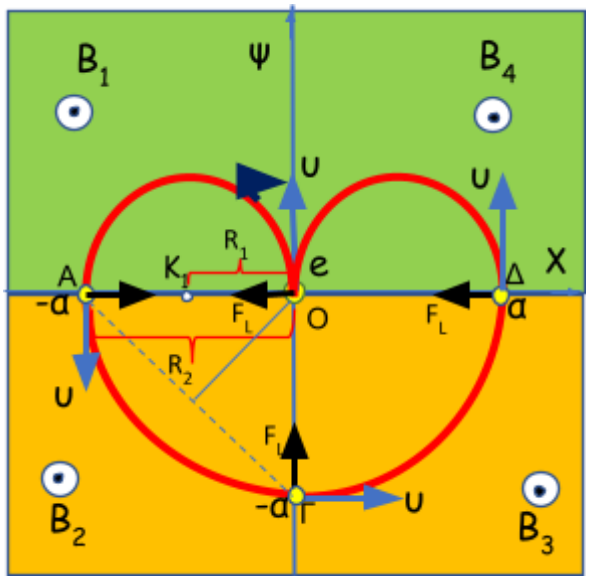


1) Να προσδιορίσετε την φορά των ΜΠ καθώς και τα μέτρα των εντάσεων τους.
2) Ποια χρονική στιγμή το e θα επανέλθει στη Θέση Ο(0,0)
3) Να προσδιορίσετε ποια χρονική στιγμή t>0 η τροχιά του e θα τμήσει τον άξονα χ για 15η φορά.
4) Ποιο το μήκος της τροχιάς μέχρι τη χρονική στιγμή του 3ου ερωτήματος
5) Ποια η Θέση του e την χρονική στιγμή $t = \frac{7\pi\alpha}{4\upsilon}$

Δίδονται : ο λόγος e/m_e , υ ,α

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1) Στο δοθέν σχήμα βλέπουμε την φορά κίνησης του e αμέσως μετά την t=0 από το οποίο συμπεραίνουμε ότι η δύναμη Lorentz, που θα αναγκάσει το e να εκτελέσει ομαλή κυκλική κίνηση, θα έχει τη διεύθυνση του άξονα χ προς τ'αρνητικά. Με βάση τον κανόνα των τριών δακτύλων (ο αντίχειρας αντίθετα με την υ ,ο μέσος η F_L και ο δείκτης δείχνει την κατεύθυνση της B_1) η οποία θα είναι



κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω. Η τροχιά του e μέχρι να περάσει από τη θέση Α(-α,0) είναι ημικύκλιο με κέντρο, στη θέση $K_1(-α/2,0)$ που είναι το σημείο τομής της F_L (κάθετη στην εφαπτόμενη υ) και της μεσοκαθέτου της χορδής (διαμέτρου) ΟΑ.

Γνωρίζουμε ότι η ακτίνα του παραπάνω ημικυκλίου δίδεται από τη σχέση:

$$R=\frac{m\upsilon}{|q_e|B}\xrightarrow{\text{αλλά } R=\frac{a}{2}}\frac{a}{2}=\frac{m\upsilon}{|q_e|B_1}\Rightarrow \boxed{B_1=\frac{2m_e\upsilon}{a|q_e|}} \quad (1)$$

Φτάνοντας στο Α η ταχύτητα είναι αντίθετη αυτής της αρχικής, καθώς και η F_L αντίστοιχα, οπότε με τον κανόνα των τριών δακτύλων συμπεραίνουμε ότι η $\vec{B}_2$ θα έχει όμοια κατεύθυνση με την $\vec{B}_1$.

Η τροχιά του e μέχρι να περάσει από τη θέση Γ(0,-α) είναι τεταρτοκύκλιο με κέντρο, στη θέση Ο(0,0) που είναι το σημείο τομής της F_L (κάθετη στην εφαπτόμενη υ) και της μεσοκαθέτου της χορδής ΑΓ (που επειδή το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές θα διέρχεται από την κορυφή Ο.

Γνωρίζουμε ότι η ακτίνα του παραπάνω ημικυκλίου δίδεται από τη σχέση:

$$R=\frac{m_e\upsilon}{|q_e|B}\xrightarrow{\text{αλλά } R=\alpha}\alpha=\frac{m_e\upsilon}{|q_e|B_2}\Rightarrow \boxed{B_2=\frac{m_e\upsilon}{a|q_e|}} \quad (2)$$

Σκεπτόμενοι όπως προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι η κίνηση από το Γ στο Δ είναι συνέχεια της προηγούμενης αφού τα μέτρα των υ και F_L διατηρούν το μέτρο τους οπότε η ακτίνα δεν αλλάζει και $\boxed{B_3=B_2=\frac{m_e\upsilon}{a|q_e|}}$ με κατεύθυνση ίδια της $\vec{B}_2$.

Μετά το Δ η κατάσταση είναι όπως η αρχική από το Ο στο Α. Δηλαδή ακτίνα α/2 ,άρα $\boxed{B_4=B_1=\frac{2m_e\upsilon}{a|q_e|}}$ και το $\vec{B}_4$ *ομόρροπο του* $\vec{B}_1$.

2) Η σχέση που δίνει την περίοδο κατά την ομαλή κυκλική κίνηση του e σε ΟΜΠ είναι: $T=\frac{2\pi m_e}{|q_e|B}$

Από το Ο στο Α και από το Δ στο Ο:

$$\Delta t_{OA}=\frac{T_1}{2}=\frac{1}{2}\frac{2\pi m_e}{|q_e|B_1}\xrightarrow{(1)}\Delta t_{OA}=\frac{1}{2}\frac{2\pi m_e}{|q_e|\frac{2m_e\upsilon}{\alpha|q_e|}}\Rightarrow \Delta t_{OA}=\frac{\pi\alpha}{2\upsilon}=\Delta t_{\Delta O}$$

Από το Α στο Δ:

$$\Delta t_{A\Delta} = \frac{T_2}{2} = \frac{1}{2}\frac{2\pi m_e}{|q_e|B_2} \xrightarrow{(1)} \Delta t_{A\Delta} = \frac{1}{2}\frac{2\pi m_e}{|q_e|\frac{m_e\upsilon}{\alpha|q_e|}} \Rightarrow \Delta t_{A\Delta} = \frac{\pi\alpha}{\upsilon}$$

Η ζητούμενη χρονική στιγμή θα είναι:

$$t = \Delta t_{OA} + \Delta t_{\Delta O} + \Delta t_{A\Delta} = \frac{\pi\alpha}{2\upsilon} + \frac{\pi\alpha}{2\upsilon} + \frac{\pi\alpha}{\upsilon} \Rightarrow \quad t = \frac{2\pi\alpha}{\upsilon}$$

Εννοείται πως συντομότερα ,μια και το μέτρο της υ παραμένει σταθερό, μπορούμε και μέσω του μήκους των τροχιών που είναι ημικύκλια :

$$t = \frac{S}{\upsilon} = \frac{\pi\frac{\alpha}{2} + \pi\alpha + \pi\frac{\alpha}{2}}{\upsilon} = \frac{2\pi\alpha}{\upsilon}$$

3) 1η φορά: $t_1 = \frac{T_1}{2} = 1\frac{\pi\alpha}{2\upsilon}$

2η φορά: $t_2 = t_1 + \frac{T_2}{2} = \frac{\pi\alpha}{2\upsilon} + \frac{\pi\alpha}{\upsilon} = 3\frac{\pi\alpha}{2\upsilon}$

3η φορά: $t_3 = t_2 + t_1 = \frac{3\pi\alpha}{2\upsilon} + \frac{\pi\alpha}{2\upsilon} = 4\frac{\pi\alpha}{2\upsilon}$

4η φορά: $t_4 = t_3 + \frac{T_2}{2} = \frac{4\pi\alpha}{2\upsilon} + \frac{\pi\alpha}{\upsilon} = 6\frac{\pi\alpha}{2\upsilon}$

5η φορά: $t_5 = t_4 + \frac{T_1}{2} = \frac{6\pi\alpha}{2\upsilon} + \frac{\pi\alpha}{2\upsilon} = 7\frac{\pi\alpha}{2\upsilon}$

6η φορά: $t_6 = t_5 + \frac{T_2}{2} = \frac{7\pi\alpha}{2\upsilon} + \frac{\pi\alpha}{\upsilon} = 9\frac{\pi\alpha}{2\upsilon}$

Πιάνοντας το μοτίβο των συντελεστών της παράστασης $\frac{\pi\alpha}{2\upsilon}$ και συνεχίζοντας το ,έχουμε :1 , 3, 4 ,6, 7,9, 10,12,13,15,16,18,19,21,22,... Άρα:

15η φορά: $t_{15} = 22\frac{\pi\alpha}{2\upsilon} = 11\frac{\pi\alpha}{\upsilon}$

4) Μια και το μέτρο της ταχύτητας δεν αλλάζει : $S = \upsilon t_{15} = \upsilon\frac{22\pi\alpha}{2\upsilon} \Rightarrow$

$S = 11\pi\alpha$

5) Έχουμε παρατηρήσει ότι η τροχιά του e αποτελείται από ημικύκλια τα οποία διανύονται σε $\Delta t_{OA}=\frac{\pi\alpha}{2\upsilon}$ το πρώτο ημικύκλιο ακτίνας α/2 , σε $\Delta t_{A\Delta}=\frac{\pi\alpha}{\upsilon}$ το επόμενο ημικύκλιο ακτίνας α ,οπότε τα δύο ημικύκλια σε

$$\Delta t_{OA\Delta}=\Delta t_{OA}+\Delta t_{A\Delta}=\frac{\pi\alpha}{2\upsilon}+\frac{\pi\alpha}{\upsilon}=\frac{3\pi\alpha}{2\upsilon}=\frac{6\pi\alpha}{4\upsilon}<\frac{7\pi\alpha}{4\upsilon}$$

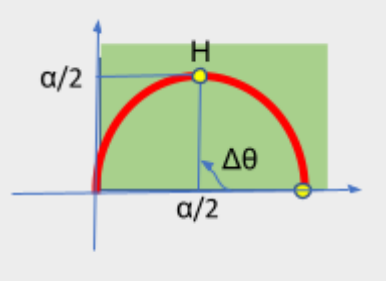
Το τρίτο ημικύκλιο από το Δ στο Ο διανύεται σε $\Delta t_{\Delta O}=\frac{\pi\alpha}{2\upsilon}$

Η διαφορά $\frac{7\pi\alpha}{4\upsilon}-\frac{6\pi\alpha}{4\upsilon}=\frac{\pi\alpha}{4\upsilon}<\Delta t_{\Delta O}=\frac{\pi\alpha}{2\upsilon}$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το e θα βρίσκεται κάπου στο 3° ημικύκλιο έχοντας διαγράψει σ'αυτό γωνία:

$$\Delta\theta=\omega\Delta t_{\Delta O}=\frac{2\pi}{T_1}\frac{\pi\alpha}{4\upsilon}=\frac{2\pi}{\frac{\pi\alpha}{\upsilon}}\frac{\pi\alpha}{4\upsilon}\Rightarrow\Delta\theta=\frac{\pi}{2}$$

Στο σχηματάκι βλέπουμε τη θέση του e τη δεδομένη χρονική στιγμή οπότε η θέση του ως προς το σύστημα χ,ψ είναι: Η(α/2,α/2)



Παντελεήμων Παπαδάκης
14/7/2022