

TUYỂN CHỌN MỘT SỐ BÀI TOÁN NÂNG CAO LỚP 7

A. PHẦN ĐẠI SỐ

Bài toán 1. So sánh: 2009^{20} và 20092009^{10} .

Bài toán 2. Tính tỉ số $\frac{A}{B}$, biết:

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2008} + \frac{1}{2009}$$
$$B = \frac{2008}{1} + \frac{2007}{2} + \frac{2006}{3} + \dots + \frac{2}{2007} + \frac{1}{2008}$$

Bài toán 3. Cho $x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng: $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$ có giá trị không phải là số tự nhiên.

Bài toán 4. Tìm $x; y \in \mathbb{Z}$ biết:

a. $25 - y^2 = 8(x - 2009)$

b. $x^3 - y = x - y^3 + 1997$

c. $x + y + 9 = xy - 7$.

Bài toán 5. Tìm x biết

a. $|5(2x+3)| + |2(2x+3)| + |2x+3| = 16$

b. $|x^2 + |6x - 2|| = x^2 + 4$.

Bài toán 6. Chứng minh rằng: $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$

Bài toán 7. Cho n số $x_1, x_2, \dots, x_n$ mỗi số nhận giá trị 1 hoặc -1. Chứng minh rằng nếu $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \dots + x_n \cdot x_1 = 0$ thì n chia hết cho 4.

Bài toán 8. Chứng minh rằng:

$$S = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} - \dots + \frac{1}{2^{4n-2}} - \frac{1}{2^{4n}} + \dots + \frac{1}{2^{2002}} - \frac{1}{2^{2004}} < 0,2$$

Bài toán 9. Tính giá trị của biểu thức $A = x^n + \frac{1}{x^n}$ giả sử $x^2 + x + 1 = 0$.

Bài toán 10. Tìm max của biểu thức: $\frac{3-4x}{x^2+1}$.

Bài toán 11. Cho x, y, z là các số dương. Chứng minh rằng

$$D = \frac{x}{2x+y+z} + \frac{y}{2y+z+x} + \frac{z}{2z+x+y} \leq \frac{3}{4}$$

Bài toán 12. Tìm tổng các hệ số của đa thức nhận được sau khi bỏ dấu ngoặc trong biểu thức: $A(x) = (3 - 4x + x^2)^{2004} \cdot (3 + 4x + x^2)^{2005}$

Bài toán 13. Tìm các số a, b, c nguyên dương thỏa mãn: $a^3 + 3a^2 + 5 = 5^b$ và $a + 3 = 5^c$

Bài toán 14. Cho $x = 2005$. Tính giá trị của biểu thức:

$$x^{2005} - 2006x^{2004} + 2006x^{2003} - 2006x^{2002} + \dots - 2006x^2 + 2006x - 1$$

Bài toán 15. Rút gọn biểu thức: $N = \frac{x|x-2|}{x^2+8x-20} + 12x - 3$

Bài toán 16. Trong 3 số x, y, z có 1 số dương, 1 số âm và một số 0. Hỏi mỗi số đó thuộc loại nào biết: $|x| = y^3 - y^2z$

Bài toán 17. Tìm hai chữ số tận cùng của tổng sau:

$$B = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2009}$$

Bài toán 18. Cho $3x - 4y = 0$. Tìm min của biểu thức: $M = x^2 + y^2$

Bài toán 19. Tìm x, y, z biết: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{5}$.

Bài toán 20. Tìm x, y biết rằng: $x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 4$

Bài toán 21. Cho a là số gồm $2n$ chữ số 1, b là số gồm $n + 1$ chữ số 1, c là số gồm n chữ số 6. Chứng minh rằng $a + b + c + 8$ là số chính phương.

Bài toán 22. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên a , tồn tại số tự nhiên b sao cho $ab + 4$ là số chính phương.

Bài toán 23. Chứng minh rằng nếu các chữ số a, b, c thỏa mãn điều kiện $\overline{ab} : \overline{cd} = a : c$ thì $\overline{abbb} : \overline{bbbc} = a : c$.

Bài toán 24. Tìm phân số $\frac{m}{n}$ khác 0 và số tự nhiên k , biết rằng $\frac{m}{n} = \frac{m+k}{nk}$.

Bài toán 25. Cho hai số tự nhiên a và b ($a < b$). Tìm tổng các phân số tối giản có mẫu bằng 7, mỗi phân số lớn hơn a nhưng nhỏ hơn b .

Bài toán 26. Chứng minh rằng: $A = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + n$ là số chính phương (n lẻ).

Bài toán 27. Tìm n biết rằng: $n^3 - n^2 + 2n + 7$ chia hết cho $n^2 + 1$.

Bài toán 28. Chứng minh rằng: $B = 2^{2^{2n+1}} + 3$ là hợp số với mọi số nguyên dương n .

Bài toán 29. Tìm số dư khi chia $(n^3 - 1)^{111} \cdot (n^2 - 1)^{333}$ cho n .

Bài toán 30. Tìm số tự nhiên n để $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ chia hết cho 5.

Bài toán 31.

a. Chứng minh rằng: Nếu a không là bội số của 7 thì $a^6 - 1$ chia hết cho 7.

b. Cho $f(x+1)(x^2-1) = f(x)(x^2+9)$ có ít nhất 4 nghiệm.

c. Chứng minh rằng: $a^5 - a$ chia hết cho 10.

Bài toán 32. Tính giá trị của biểu thức: $A = 5y^4 + 7x - 2z^5$ tại $(x^2-1) + (y-z)^2 = 16$.

Bài toán 33. Chứng minh rằng:

a. $0,5 (2007^{2005} - 2003^{2003})$ là một số nguyên.

b. $M = \frac{1986^{2004} - 1}{1000^{2004} - 1}$ không thể là số nguyên.

c. Khi viết dưới dạng thập phân thì số hữu tỉ $\left(\frac{9}{11} - 0,81\right)^{2004}$ có ít nhất 4000 chữ số 0 đầu tiên sau dấu phẩy.

Bài toán 34. So sánh A và B biết:

$$A = \frac{1}{101^2} + \frac{1}{102^2} + \frac{1}{103^2} + \frac{1}{104^2} + \frac{1}{105^2} \quad \text{và} \quad B = \frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7}.$$

Bài toán 35. Tìm x biết:

a.
$$\frac{7^{x+2} + 7^{x+1} + 7^x}{57} = \frac{5^{2x} + 5^{2x+1} + 5^{2x+3}}{131}$$

b. $(4x-3)^4 = (4x-3)^2$

Bài toán 36. Ba ô tô cùng khởi hành từ A đi về phía B. Vận tốc của ô tô thứ nhất kém vận tốc của ô tô thứ hai là 3km/h. Thời gian ô tô thứ nhất, thứ hai, thứ ba đi hết quãng

đường AB lần lượt là 40 phút, $\frac{5}{8}$ giờ, $\frac{5}{9}$ giờ. Tính vận tốc của mỗi ô tô.

Bài toán 37. Chứng minh rằng $\sqrt{2} + a$ ($a \in \mathbb{Z}^+$) là số vô tỉ.

Bài toán 38. Cho các số thực a, b sao cho tập hợp $\{a^2 + a; b\}$ và $\{b^2 + b; b\}$ bằng

nhau. Chứng minh rằng: $a = b$.

Bài toán 39. Cho năm số tự nhiên a, b, c, d, e thỏa mãn: $a^b = b^c = c^d = d^e = e^a$.

Chứng minh rằng: $a = b = c = d = e$.

Bài toán 40. Tìm x, y biết:

a. $5^x - 17^y = 2^{xy}$ và $x - y = 5$; $2x + 3^y = xy$.

b. $x + 2y - 3z = 5^{xyz}$ và $(x - 2y)(y + 7) - x = 19^2$. ($xyz > 0$)

B. Phần hình học

Bài toán 41. Tính $\hat{A}$ của tam giác ABC cân tại A biết đường thẳng d đi qua đỉnh A và chia tam giác ABC thành hai tam giác cân.

Bài toán 42. Cho ΔABC vuông cân tại A, trung tuyến AM. Lấy $E \in BC$. $BH, CK \perp AE$ ($H, K \in AE$). Chứng minh rằng ΔMHK vuông cân.

Bài toán 43. Cho ΔABC có góc $ABC = 50^\circ$; góc $BAC = 70^\circ$. Phân giác trong góc ACB cắt AB tại M. Trên MC lấy điểm N sao cho góc $MBN = 40^\circ$. Chứng minh rằng: $BN = MC$.

Bài toán 44. Cho ΔABC . Vẽ ra phía ngoài của tam giác này các tam giác vuông cân ở A là ABE và ACF. Vẽ $AH \perp BC$. Đường thẳng AH cắt EF tại O. Chứng minh rằng O là trung điểm của EF.

Bài toán 45. Cho ΔABC . Qua A vẽ đường thẳng $xy \parallel BC$. Từ điểm M trên cạnh BC vẽ các đường thẳng song song với AB, AC chúng cắt xy theo thứ tự tại D và E. Chứng minh rằng:

a. $\Delta ABC = \Delta MDE$

b. Ba đường thẳng AM, BD, CE cùng đi qua một điểm.

Bài toán 46. Cho ΔABC vuông tại A. Trên cạnh BC lấy hai điểm M và N sao cho $BM =$

BA; CN = CA. Tính $\widehat{MAN}$.

Bài toán 47. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$ ($AB < AC$), phân giác AD. Từ D vẽ một đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại M. Tính $\widehat{MBD}$.

Bài toán 48. $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 75^\circ$; $\widehat{C} = 60^\circ$. Kéo dài BC một đoạn thẳng CD sao cho $CD = \frac{1}{2} BC$. Tính $\widehat{ADB}$.

Bài toán 49. Cho $\triangle ABC$ cân, $\widehat{A} = 80^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm I sao cho $\widehat{BAI} = 50^\circ$; trên cạnh AC lấy điểm K sao cho $\widehat{ABK} = 30^\circ$. Hai đoạn thẳng AI và BK cắt nhau tại H. Chứng minh rằng $\triangle HIK$ cân.

Bài toán 50. Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Gọi M là một điểm nằm trên cạnh BC sao cho $MB < MC$. Lấy điểm O trên đoạn thẳng AM. Chứng minh rằng $\widehat{AOB} > \widehat{AOC}$.

Bài toán 51. Cho xOy. Trên hai cạnh Ox và Oy lấy lần lượt các điểm A và B sao cho $OA + OB = 2a$. Xác định vị trí của A và B để cho AB đạt min.

Bài toán 52. Cho đoạn thẳng $MN = 4\text{cm}$, điểm O nằm giữa M và N. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ MN vẽ các tam giác cân đỉnh O là OMA và OMB sao cho góc ở đỉnh O bằng 45° . Tìm vị trí của O để AB min. Tính độ dài nhỏ nhất đó.

Bài toán 53. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{A} = 100^\circ$, tia phân giác của góc B cắt AC tại D. Chứng minh rằng $BC = BD + AD$.

Bài toán 54. Cho $\triangle ABC$ vuông tại C có $AC = 3AB$. Trên AC lấy các điểm D và E sao cho $AD = DE = EC$. Chứng minh rằng $\widehat{AEB} + \widehat{ACB} = 45^\circ$.

Bài toán 55. Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 30^\circ$, $BC = 2\text{cm}$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{CBD} = 60^\circ$. Tính độ dài AD.

Bài toán 56. Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{B} = 75^\circ$. Kẻ CH vuông góc với AB. Chứng

minh rằng $CH = \frac{AB}{2}$.

Bài toán 57. Cho tam giác ABC vuông cân tại B và tồn tại một điểm M nằm trong tam giác sao cho $MA : MB : MC = 1 : 2 : 3$. Tính $\angle AMB$.

Bài toán 58. Nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 > 5c^2$ thì c là cạnh nhỏ nhất.

Bài toán 59. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên trung tuyến BD lấy E sao cho $\angle DAE = \angle ABD$. Chứng minh rằng: $\angle ADE = \angle ECB$.

Bài toán 60. Cho $\triangle ABC$ có $\angle BAC = 40^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$. Gọi D và E là các điểm tương ứng trên AC và AB sao cho $\angle CBD = 40^\circ$; $\angle BCE = 70^\circ$. Giả sử BD cắt CE tại F. Chứng minh rằng: $AF \perp BC$.

Bài toán 61. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM, phân giác AN. Từ N vẽ đường thẳng vuông góc với AN cắt AB, AM tại hai điểm P và Q. Từ Q vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt AN tại O. Chứng minh rằng $QO \perp BC$.

Bài toán 62. Cho $\triangle ABC$. Trung tuyến BM và đường phân giác CD cắt nhau tại I thỏa mãn $IB = IC$. Từ A kẻ $AH \perp BC$. Chứng minh rằng $IM = IH$.

Bài toán 63. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC, G là điểm trên cạnh AB sao cho $GB = 2GA$. Các đường thẳng GM và CA cắt nhau tại D. Đường thẳng qua M vuông góc với CG tại E và cắt AC tại K. Gọi P là giao điểm của DE và GK. Chứng minh rằng:

a. $DE = BC$

b. $PG = PE$.

Bài toán 64. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Giả sử D là điểm nằm bên trong tam giác sao cho tam giác ABD cân và $\angle ADB = 150^\circ$. Trên nửa mặt phẳng không chứa D có bờ

là đường thẳng AC lấy điểm E sao cho tam giác ACE đều. Chứng minh 3 điểm B, D, E thẳng hàng.

Bài toán 65. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến BM và đường phân giác CD cắt nhau tại J thỏa mãn điều kiện $JB = JC$. Từ A kẻ AH vuông góc với cạnh BC. Chứng minh rằng $JM = JH$.

Bài toán 66. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM, $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$, và $AM = \sqrt{3}\text{ cm}$.

a. Tính số đo góc BAC

b. Tính BC

c. Tính diện tích tam giác ABC.

Bài toán 67. Cho tam giác ABC có góc BAC bằng 105° , đường phân giác trong CD và đường trung tuyến BM cắt nhau tại K thỏa mãn $KB = KC$. Gọi H là chân đường cao hạ từ A của tam giác ABC.

a. Chứng minh rằng $HA = HB$

b. Tính góc ABC và góc ACB'

Bài toán 68. Cho tam giác ABC cân. Trên cạnh đáy BC lấy điểm D sao cho $CD = 2BD$.

So sánh số đo hai góc BAC và $\frac{1}{2} CAD$.

Bài toán 69. Gọi P là trung điểm cạnh BC của tam giác ABC và BE, CF là hai đường cao. Đường thẳng qua A, vuông góc với PE, cắt đường thẳng BE tại N. Gọi K và G lần lượt là trung điểm của BM và CN. Gọi H là giao điểm của đường thẳng KF và GE. CMR: $AH \perp EF$.

Bài toán 70. Cho $\triangle DEF$ vuông tại D, có EK là phân giác. Kẻ $KM \perp EF$, kéo dài KM cắt đường thẳng DE tại I. Chứng minh:

a/ $DK = KM$; $DE = EM$.

b/ $EK \perp IF$.

c/ Nếu cho M là trung điểm của EF. Chứng minh: $\frac{DK}{KF} = \frac{1}{2}$.