

Η εξίσωση $x = f(t)$ μιας παλινδρομικής κίνησης

Υλικό σημείο μάζας $m = 1\text{kg}$, εκτελεί αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $x = 0,5 \cdot \eta\mu(10t)$ (S.I.)

A) Αν είναι απλή αρμονική ταλάντωση:

i) Βρείτε τις χρονικές εξισώσεις

$$v \rightarrow t, a \rightarrow t, \Sigma F \rightarrow t, K \rightarrow t, U \rightarrow t, E_T \rightarrow t, P_{\Sigma F} \rightarrow t$$

ii) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις

α) $K \rightarrow t, U \rightarrow t, E_T \rightarrow t$, σε ένα διάγραμμα και

β) σε ένα άλλο διάγραμμα την $P_{\Sigma F} \rightarrow t$

από $t_0 = 0\text{s} \rightarrow t_1 = \frac{\pi}{5}\text{s}$

iii) Υπολογίστε το έργο της συνισταμένης δύναμης από $t_0 = 0\text{s} \rightarrow t_1 = \frac{\pi}{10}\text{s}$

B) Αν είναι εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με δύναμη απόσβεσης της μορφής

$F = -2v$ (S.I.) και γωνιακής ιδιοσυχνότητας $\omega_0 = 8\text{ rad/s}$:

i) Βρείτε τις χρονικές εξισώσεις

$$v \rightarrow t, a \rightarrow t, \Sigma F \rightarrow t, F_{\varepsilon\pi} \rightarrow t, F_{\alpha\pi} \rightarrow t, K \rightarrow t, U \rightarrow t, E_T \rightarrow t, P_{\Sigma F} \rightarrow t, P_{F\varepsilon\pi} \rightarrow t, P_{F\alpha\pi} \rightarrow t, P_{F\delta\iota\epsilon\gamma} \rightarrow t$$

ii) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις

α) $K \rightarrow t, U \rightarrow t, E_T \rightarrow t$, σε ένα διάγραμμα και

β) σε ένα άλλο διάγραμμα τις $P_{\Sigma F} \rightarrow t, P_{F\varepsilon\pi} \rightarrow t, P_{F\alpha\pi} \rightarrow t, P_{F\delta\iota\epsilon\gamma} \rightarrow t$

από $t_0 = 0\text{s} \rightarrow t_1 = \frac{\pi}{5}\text{s}$

iii) Υπολογίστε το έργο της συνισταμένης δύναμης, το έργο της δύναμης επαναφοράς, το

έργο της δύναμης απόσβεσης και το έργο της διεγείρουσας δύναμης, από $t_0 = 0\text{s} \rightarrow t_1 = \frac{\pi}{20}\text{s}$

iv) Να γίνει έλεγχος της ΑΔΕ στο παραπάνω χρονικό διάστημα.

v) Να υπολογιστούν όλοι οι ρυθμοί ενέργειας τη χρονική στιγμή $t' = \pi/120\text{ s}$.

Απάντηση

(A)

i) $v = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t) \Leftrightarrow v = 5 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t)$ (S.I.)

$$a = -\omega^2 A \cdot \eta\mu(\omega t) \Leftrightarrow a = -50 \cdot \eta\mu(10t)$$
 (S.I.)

$$\Sigma F = m \cdot a \Leftrightarrow \Sigma F = -50 \cdot \eta\mu(10t)$$
 (S.I.)

Εφόσον η συνισταμένη δύναμη είναι και η δύναμη επαναφοράς, μπορεί να υπολογιστεί και ως

$$\Sigma F = F_{\varepsilon\pi} \Leftrightarrow \Sigma F = -Dx \Leftrightarrow \Sigma F = -m\omega^2 x \Leftrightarrow \Sigma F = -1 \cdot 10^2 \cdot 0,5 \eta\mu(2\pi t) \Leftrightarrow \Sigma F = -50 \cdot \eta\mu(10t) \text{ (S.I.)}$$

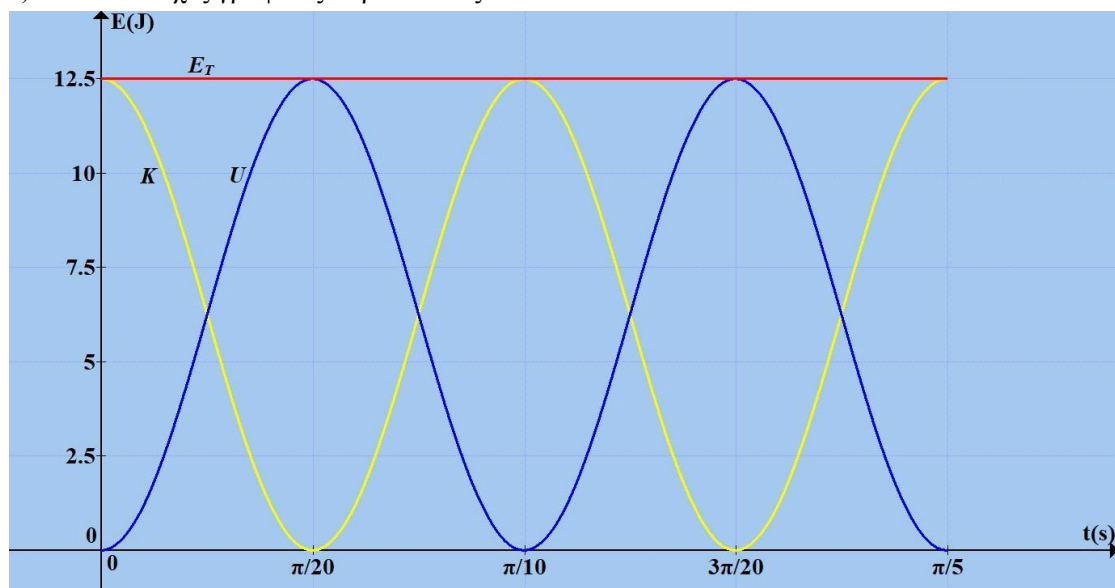
$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow K = \frac{1}{2}[5 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t)]^2 \Leftrightarrow K = 12,5 \cdot \sigma\upsilon\nu^2(10t) \text{ (S.I.)}$$

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 \Leftrightarrow U = \frac{1}{2}100 \cdot [0,5 \eta\mu(10t)]^2 \Leftrightarrow U = 12,5 \cdot \eta\mu^2(10t) \text{ (S.I.)}$$

$$E_T = K + U \Leftrightarrow E_T = 12,5[\sigma\upsilon\nu^2(10t) + \eta\mu^2(10t)] \Leftrightarrow E_T = 12,5 J$$

$$P_{\Sigma F} = P_{F\varepsilon\pi} = \Sigma F \cdot v = -50 \cdot \eta\mu(10t) \cdot 5 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t) \Leftrightarrow P_{\Sigma F} = -125 \cdot \eta\mu(20t) \text{ (S.I.)}$$

ii) Οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις θα είναι



iii) Τα έργα είναι:

$$W_{\Sigma F} = \Delta K = K_1 - K_0 = 0 - 12,5 = -12,5 J$$

ή

$$W_{\Sigma F} = W_{F_{\varepsilon\pi}} = -\Delta U = U_0 - U_1 = 0 - 12,5 = -12,5 J$$

ή

$$W_{\Sigma F} = \int_0^{t_1} P \cdot dt = \int_0^{t_1} -125 \cdot \eta\mu(20t) \cdot dt = -125 \cdot \int_0^{t_1} \eta\mu(20t) \cdot dt =$$

$$- \frac{125}{20} \cdot \left[-\sigma\upsilon\nu(20t) \right]_0^{\pi/20} = 6,25 \cdot [\sigma\upsilon\nu(20 \cdot \frac{\pi}{20}) - \sigma\upsilon\nu(20 \cdot 0)] = 6,25 \cdot (-2) = -12,5 J$$

(B)

ι) Έχουμε εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με μικρή απόσβεση, αφού $b < 2m\omega_0 = 16 kg/s$. Η ταλάντωση γίνεται με τη γωνιακή συχνότητα $\omega_\delta = 10 rad/s$ του διεγέρτη.

$$v = \omega_\delta A \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega_\delta t) \Leftrightarrow v = 5 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t) \text{ (S.I.)}$$

$$a = -\omega_\delta^2 A \cdot \eta\mu(\omega_\delta t) \Leftrightarrow a = -50 \cdot \eta\mu(10t) \text{ (S.I.)}$$

$$\Sigma F = m \cdot a \Leftrightarrow \Sigma F = -50 \cdot \eta\mu(10t) \text{ (S.I.)}$$

Οι εξισώσεις αυτές δεν διαφέρουν από αυτές της (α) περίπτωσης.

Εδώ όμως ισχύει $\overset{\vee}{\Sigma F} \neq \overset{\vee}{F}_{\varepsilon\pi}$ αφού στο υλικό σημείο δρουν 3 δυνάμεις:

Η δύναμη επαναφοράς

$$F_{\varepsilon\pi} = -Dx = -m\omega_0^2 x = -64x = -64 \cdot 0,5 \eta\mu(10t) \Leftrightarrow$$

$$F_{\varepsilon\pi} = -32 \cdot \eta\mu(10t) \text{ (S.I.)}$$

Η δύναμη απόσβεσης

$$F_{\alpha\pi} = -2 \cdot 5 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t) \Leftrightarrow F_{\alpha\pi} = -10 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t) \text{ (S.I.)}$$

Η διεγείρουσα δύναμη, που προκύπτει από τη σχέση

$$\overset{\vee}{\Sigma F} = \overset{\vee}{F}_{\varepsilon\pi} + \overset{\vee}{F}_{\alpha\pi} + \overset{\vee}{F}_{\delta\iota\epsilon\gamma} \Leftrightarrow \overset{\vee}{F}_{\delta\iota\epsilon\gamma} = \overset{\vee}{\Sigma F} - \overset{\vee}{F}_{\varepsilon\pi} - \overset{\vee}{F}_{\alpha\pi} \Leftrightarrow$$

$$F_{\delta\iota\epsilon\gamma} = -50 \cdot \eta\mu(10t) + 32 \cdot \eta\mu(10t) + 10 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t) \Leftrightarrow$$

$$F_{\delta\iota\epsilon\gamma} = -18 \cdot \eta\mu(10t) + 10 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t) \text{ (S.I.)}$$

Οι ενέργειες είναι

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \Leftrightarrow K = \frac{1}{2} [5 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t)]^2 \Leftrightarrow K = 12,5 \cdot \sigma\upsilon\nu^2(10t) \text{ (S.I.)}$$

$$U = \frac{1}{2} D x^2 \Leftrightarrow U = \frac{1}{2} 64 \cdot [0,5 \eta\mu(10t)]^2 \Leftrightarrow U = 8 \cdot \eta\mu^2(10t) \text{ (S.I.)}$$

$$E_T = K + U \Leftrightarrow E_T = 12,5 \sigma\upsilon\nu^2(10t) + 8 \eta\mu^2(10t)$$

Παρατηρούμε ότι

$$K_{\max} > U_{\max}, E_T = f(t) \neq \text{σταθ.}$$

Αυτά δεν ισχύουν στην απλή αρμονική ταλάντωση. Είναι λοιπόν προφανές ότι δεν ισχύει η κοινώς λεγόμενη ΑΔΕΤ...

Οι στιγμιαίες ισχύεις:

$$P_{\Sigma F} = P_{F_{\varepsilon\pi}} = \Sigma F \cdot v = -50 \cdot \eta\mu(10t) \cdot 5 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t) \Leftrightarrow P_{\Sigma F} = -125 \cdot \eta\mu(20t) \text{ (S.I.)}$$

$$P_{F_{επ}} = F_{επ} \cdot v = -32 \cdot \eta\mu(10t) \cdot 5 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t) \Leftrightarrow P_{F_{επ}} = -80 \cdot \eta\mu(20t) \text{ (S.I.)}$$

$$P_{F_{απ}} = F_{απ} \cdot v = -10 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t) \cdot 5 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t) \Leftrightarrow P_{F_{απ}} = -50 \cdot \sigma\upsilon\nu^2(10t) \Leftrightarrow$$

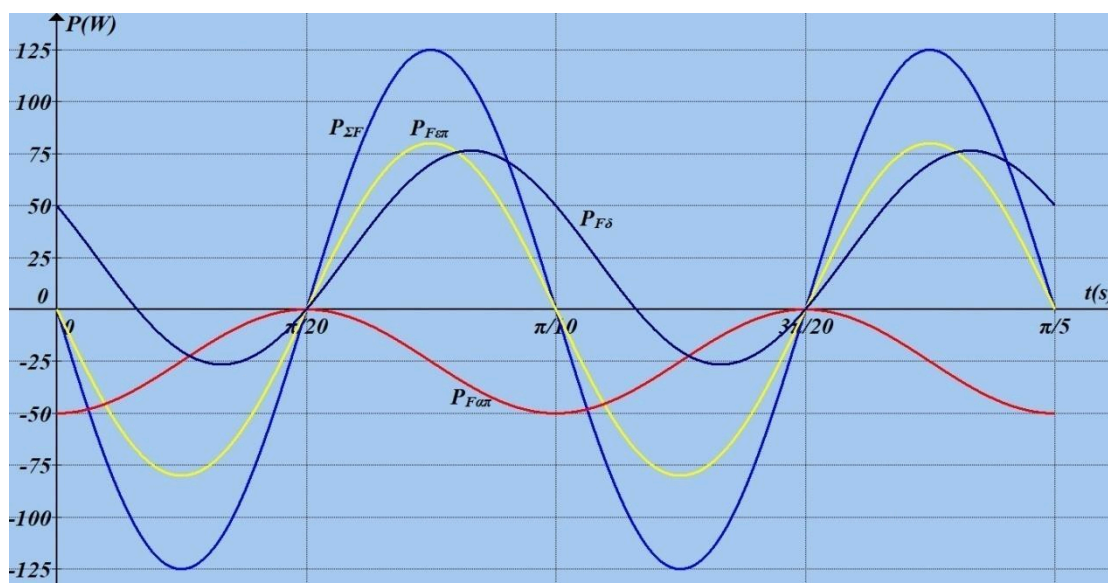
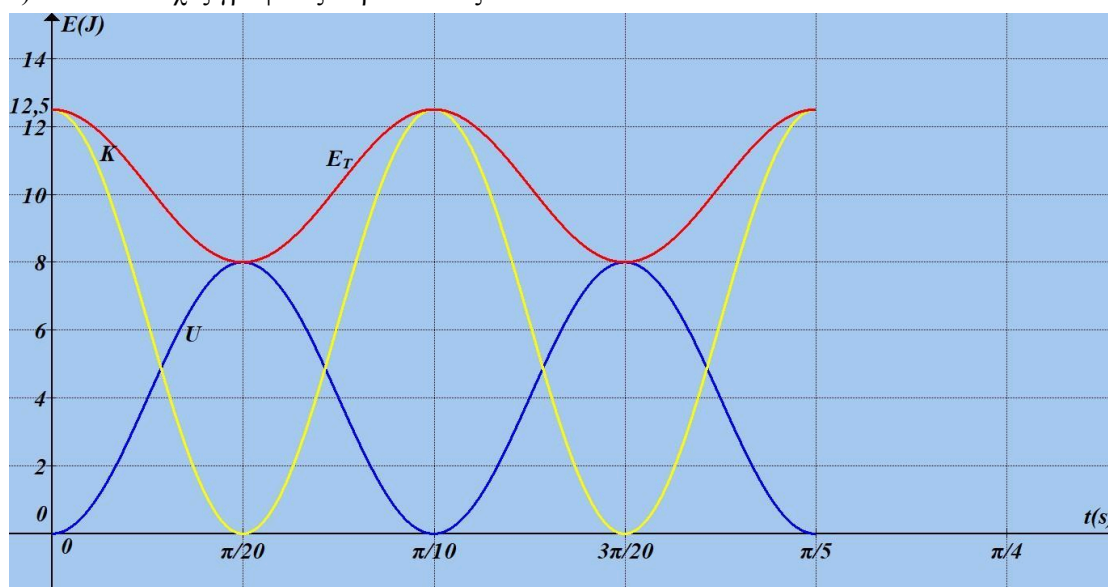
$$P_{F_{απ}} = -50 \cdot \frac{1 + \sigma\upsilon\nu(20t)}{2} \Leftrightarrow P_{F_{απ}} = -25 \cdot [1 + \sigma\upsilon\nu(20t)] \text{ (S.I.)}$$

$$P_{F_{δισγ}} = F_{δ} \cdot v = [-18 \cdot \eta\mu(10t) + 10 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t)] \cdot 5 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t) \Leftrightarrow$$

$$P_{F_{δισγ}} = -90 \cdot \eta\mu(10t) \sigma\upsilon\nu(10t) + 50 \cdot \sigma\upsilon\nu^2(10t) \Leftrightarrow$$

$$P_{F_{δισγ}} = -45 \cdot \eta\mu(20t) + 50 \cdot \sigma\upsilon\nu^2(10t) \text{ (S.I.)}$$

ii) Οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις θα είναι



iii) Τα έργα είναι:

$$W_{\Sigma F} = \Delta K = K_I - K_0 = 0 - 12,5 = -12,5 J$$

$$W_{F_{επ}} = -\Delta U = U_0 - U_I = 0 - 8 = -8 J$$

$$W_{F_{απ}} = \int_0^{t_I} P_{F_{απ}} \cdot dt = \int_0^{t_I} -25 \cdot [1 + \sin(20t)] \cdot dt = -25 \cdot \int_0^{t_I} [1 + \sin(20t)] \cdot dt =$$

$$-25 \left[t + \frac{1}{20} \eta\mu(20x) \right]_0^{\pi/20} = -25 \left[\left(\frac{\pi}{20} - 0 \right) + \frac{1}{20} \left(\eta\mu 20 \frac{\pi}{20} - \eta\mu 0 \right) \right] = -\frac{5\pi}{4} \approx -3,9 J$$

$$W_{F_{δισγ}} = \int_0^{t_I} P_{F_{δισγ}} \cdot dt = \int_0^{t_I} -45 \cdot \eta\mu(20t) + 50 \cdot \sin^2(10t) \cdot dt = -45 \int_0^{t_I} \eta\mu(20t) \cdot dt + 50 \int_0^{t_I} \sin^2(10t) \cdot dt =$$

$$\frac{9}{4} \sin(20t) \Big|_0^{\pi/20} + \left[25t + \frac{5}{4} 20 \left(\frac{\pi}{20} - \sin \right) \right]_0^{\pi/20} = \frac{9}{4} \left(\sin \frac{\pi}{20} - \sin 0 \right) + \left(\frac{\pi}{20} - 0 \right) + \frac{5}{4} \left(\eta\mu \frac{\pi}{20} - \eta\mu 0 \right) =$$

$$\frac{9}{4} \cdot (-2) + \frac{5\pi}{4} = \left(\frac{5\pi}{4} - 4,5 \right) J \approx 3,9 - 4,5 = -0,6 J$$

iv) Για να δούμε, ισχύει η ΑΔΕ στο χρονικό διάστημα $t_0 = 0s \rightarrow t_I = \frac{\pi}{20} s$;

Η κινητική ενέργεια μειώθηκε κατά 12,5J.

Από αυτό το ποσό:

Η δυναμική ενέργεια αυξήθηκε κατά 8J.

Ο διεγέρτης **απορρόφησε** 0,6J.

Η απόσβεση απορρόφησε 3,9J.

Άρα $|\Delta K| = \Delta U + |W_{F_{δισγ}}| + |W_{F_{απ}}| = 12,5 J$

v) Ας δούμε τους ρυθμούς ενέργειας τη χρονική στιγμή $t_I = \pi/120 s$.

$$P_{\Sigma F} = -125 \cdot \eta\mu\left(20 \frac{\pi}{120}\right) = -62,5 J / s$$

$$P_{F_{επ}} = -80 \cdot \eta\mu\left(20 \frac{\pi}{120}\right) = -40 J / s$$

$$P_{F_{απ}} = -25 \cdot \left[1 + \sin\left(20 \frac{\pi}{120}\right) \right] = -25 - 25 \frac{\sqrt{3}}{2} = -25 - 12,5\sqrt{3} W \approx -46,6 J/s$$

$$P_{F_{δισγ}} = -45 \cdot \eta\mu\left(20 \frac{\pi}{120}\right) + 50 \cdot \sin^2\left(10 \frac{\pi}{120}\right) =$$

$$-45 \cdot \eta\mu \frac{\pi}{6} + 50 \cdot \frac{1 + \sin \frac{\pi}{6}}{2} = -22,5 + 25 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2,5 + 12,5\sqrt{3} W \approx 24,1 J / s$$

Η κινητική ενέργεια μειώνεται κατά 62,5J/s

Η δυναμική ενέργεια αυξάνεται κατά 40J/s

Η διεγείρουσα δύναμη προσφέρει ενέργεια 24,1J/s

Η απόσβεση καταναλώνει ενέργεια 46,6J/s

Άρα $\left| \frac{dK}{dt} \right| + \frac{dF_{δισγ}}{dt} = \frac{dU}{dt} + \left| \frac{dF_{απ}}{dt} \right| = 86,6 \frac{J}{s}$

Σχόλια

α) Η κινηματική αρκεί για να περιγράψει το φαινόμενο της αρμονικής ταλάντωσης σε άξονα; Η παραπάνω ανάλυση συνηγορεί υπέρ του ΟΧΙ. Απαιτούνται πληροφορίες και για τις δυνάμεις που ασκούνται.

Είδαμε την ίδια εξίσωση κίνησης να περιγράφει δύο διαφορετικά φυσικά φαινόμενα:

- Απλή αρμονική ταλάντωση, όπου δρα μόνο μια χωροεξαρτώμενη συντηρητική δύναμη επαναφοράς, που είναι και η συνισταμένη δύναμη

$$\vec{F}_{\varepsilon\pi} = \Sigma \vec{F} = -D \cdot \vec{x}, \quad D = m\omega_0^2$$

Η ενέργεια ταλάντωσης $E_T = K + U$ είναι χρονικά σταθερή και είναι ένα εύχρηστο φυσικό μέγεθος στην ενεργειακή μελέτη της απλής αρμονικής ταλάντωσης.

- Εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με μικρή απόσβεση, μετά το πέρας των μεταβατικών φαινομένων, όπου δρουν:

Μια χωροεξαρτώμενη συντηρητική δύναμη επαναφοράς $\vec{F}_{\varepsilon\pi} = -D \cdot \vec{x}, \quad D = m\omega_0^2$

Μια χρονοεξαρτώμενη δύναμη $\vec{F}_{\delta\iota\epsilon\gamma}(t)$

Μια χρονοεξαρτώμενη δύναμη $\vec{F}_{\alpha\pi}(t)$

Η «ενέργεια ταλάντωσης» $E_T = K + U$, είναι χρονικά μεταβλητή, άρα δεν έχει νόημα να αναφέρεται ή να χρησιμοποιείται σε αυτό το φαινόμενο.

β) Ερωτήματα όπως: «Βρείτε το έργο της δύναμης επαναφοράς» δεν έχουν απάντηση, αφού είδαμε ότι αν είναι απλή αρμονική ταλάντωση προέκυψε $-12,5J$, ενώ αν είναι εξαναγκασμένη $+8J \dots$

Μόνο αν ο εξαναγκασμένος ταλαντωτής βρίσκεται σε συντονισμό, ταυτίζονται τα αποτελέσματα.

γ) Είδαμε ότι $K_{\max} > U_{\max}$, δηλαδή «επικρατεί η κινητική ενέργεια». Αυτό συμβαίνει όταν $\omega_\delta > \omega_0$

Αν $\omega < \omega_0$ «επικρατεί η δυναμική ενέργεια», θα είχαμε δηλαδή $K_{\max} < U_{\max}$

Μην ξεχνάμε άλλωστε ότι $K_{\max} = \frac{1}{2} m\omega_\delta^2 A^2$ ενώ $U_{\max} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2$

δ) Στην εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση ισχύει ότι:

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \omega_\delta^2 x^2 = \frac{1}{2} m \omega_\delta^2 A^2$$

Η σχέση αυτή όμως **δεν εκφράζει διατήρηση ενέργειας**, αλλά προκύπτει από το γεγονός ότι η απομάκρυνση x και η ταχύτητα v είναι αρμονικές συναρτήσεις του χρόνου και μπορεί εύκολα να αποδειχτεί από τις χρονικές τους εξισώσεις.

Ανδρέας Ριζόπουλος