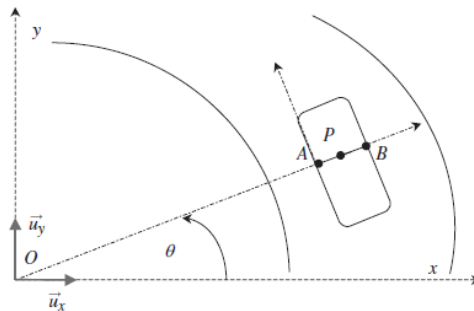




Correction Td N°3 : Mécanique du point : Changement de référentiel

Correction



On définit le référentiel terrestre $R_T = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ fixe et le référentiel $R_A = (A, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ le référentiel lié à l'autobus mobile par rapport à R_T . P effectue un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération a_0 dans la direction de $A \rightarrow B$ (direction de $\vec{u}_r$).

1- Étude dans le référentiel lié à l'autobus $R_A = (A, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

le référentiel terrestre $R_T = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ fixe et soit le référentiel $R_A = (O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ liée à l'autobus mobile par rapport à R_T .

1°) Etude de mouvement de point matériel P par rapport à $R_A = (A, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$

à $t=0$ P est en A et $\vec{V}(P/R_A) = \vec{0}$

On

$$\frac{d\vec{V}\left(\frac{P}{R_A}\right)}{dt} = a_0 \vec{e}_\rho \rightarrow \vec{V}(P/R_A) = (a_0 t + C) \vec{e}_\rho$$

$\vec{V}(P/R) = a_0 \vec{e}_\rho = \vec{k}$ Il s'agit d'un mouvement rectiligne selon $\vec{e}_\rho$ de $A \rightarrow B$ uniformément accéléré

$$\frac{d\vec{V}\left(\frac{P}{R_A}\right)}{dt} = a_0 \vec{e}_\rho$$

$$\rightarrow \vec{V}(P/R_A) = (a_0 t + C) \vec{e}_\rho \quad \text{car } \vec{e}_\rho \text{ est fixe dans } R_A$$

$$\text{A } t=0 \quad \vec{V}(P/R_A) = 0 \Rightarrow C=0$$

$$\text{Donc } \vec{V}(P/R_A) = a_0 t \vec{e}_\rho$$

$$\frac{d(\vec{AP})}{dt} \Big|_{R_A} = \vec{V}(P/R_A) = a_0 t \vec{e}_\rho$$

/ Donc

$$\vec{AP} = \left(\frac{a_0 t^2}{2} + C \right) \vec{e}_\rho$$

$$(\vec{e}_\rho \text{ est fixe dans } R_A)$$

$$\text{A } t=0 \quad P=A \quad \text{et } \vec{AP}=0 \rightarrow C=0$$

$$\vec{AP} = \frac{a_0 t^2}{2} \vec{e}_\rho$$

$$\vec{V}(P/R_A) = a_0 t \vec{e}_\rho$$

2° Etude du mouvement par rapport au référentiel R_T

$$\vec{V}(P/R_T) = \frac{d\vec{OP}}{dt} \Big|_{R_T} = \frac{d}{dt}(\vec{OA} + \vec{AP}) \Big|_{R_T} = \frac{d}{dt} \left(R \vec{e}_\rho + \frac{a_0 t^2}{2} \vec{e}_\rho \right) \Big|_{R_T} = a_0 t \vec{e}_\rho + \left(R + \frac{a_0 t^2}{2} \right) \omega_0 \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a}\left(\frac{P}{R_T}\right) = \frac{d}{dt} \vec{V}\left(\frac{P}{R_T}\right) \Big|_{R_T} = a_0 \vec{e}_\rho + a_0 t \omega_0 \vec{e}_\theta + a_0 t \omega_0 \vec{e}_\theta - \left(R + \frac{a_0 t^2}{2} \right) \omega_0^2 \vec{e}_\rho$$

$$\vec{a}(P/R_T) = \left(a_0 - \left(R + \frac{a_0 t^2}{2} \right) \omega_0^2 \right) \vec{e}_\rho + 2a_0 t \omega_0 \vec{e}_\theta$$

Equation de la trajectoire

$$\vec{\rho} = \vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP} = R \vec{e}_\rho + \frac{a_0 t^2}{2} \vec{e}_\rho = \left(R + \frac{a_0 t^2}{2} \right) \vec{e}_\rho$$

$$\{\rho = R + \frac{a_0 t^2}{2} \quad \theta = \omega_0 t \quad \Rightarrow \rho(t) = R + \frac{1}{2} + \frac{a_0}{\omega_0^2} \theta^2$$

(équation d'une spirale).

3°) Loi de composition des vitesses

Le repère R_A est en mouvement de rotation par rapport à R_T avec une vitesse angulaire

$$\vec{\Omega}_{\frac{R_A}{R_T}} = \omega_0 \vec{u}_z$$

On a donc la loi de composition des vitesses $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$

$$\vec{V}_e = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{R_T} + \vec{\Omega}_{\frac{R_A}{R_T}} \wedge \vec{AP}$$

$$\vec{V}_e = \vec{\Omega}_{\frac{R_A}{R_T}} \wedge \vec{OA} + \vec{\Omega}_{\frac{R_A}{R_T}} \wedge \vec{AP}$$

$$\vec{V}_e = \vec{\Omega}_{\frac{R_A}{R_T}} \wedge \vec{OP}$$

$$\vec{V}_e = \omega_0 \left(R + \frac{a_0 t^2}{2} \right) \vec{e}_\theta$$

La vitesse d'entraînement correspond à la vitesse du point P par rapport à R_T s'il était fixe dans l'autobus à ce moment-là. Il a alors un mouvement circulaire uniforme de rayon $(R + x)$ et de vitesse angulaire ω_0 , d'où l'expression du vecteur vitesse. On a donc

$$\vec{V}_r = \left(\frac{d\vec{AP}}{dt} \right)_{R_A} = a_0 t \vec{e}_\rho$$

$$\text{Donc } \vec{V}_T = \vec{V}_r + \vec{V}_e = a_0 t \vec{e}_\rho + \left(R + \left(\frac{a_0 t^2}{2} \right) \right) \omega_0 \vec{e}_\theta$$

Lois de composition des accélérations

$$\vec{a}_T = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

$$\vec{a}_r = \left(\frac{d\vec{V}_r}{dt} \right)_{R_A} = a_0 \vec{e}_\rho$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega}_{\frac{R_A}{R_T}} \wedge \vec{V}(P/R_A) = 2\omega_0 \vec{u}_z \wedge a_0 t \vec{e}_\rho = 2a_0 \omega_0 t \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{A/R_T} + \vec{\Omega}_{\frac{R_A}{R_T}} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\frac{R_A}{R_T}} \wedge \vec{AP} \right) + \frac{d\vec{\Omega}_{\frac{R_A}{R_T}}}{dt} \wedge \vec{AP}$$

$$\vec{a}_e = \frac{d}{dt} \left(\vec{\Omega}_{\frac{R_A}{R_T}} \wedge \vec{OA} \right) + \vec{\Omega}_{\frac{R_A}{R_T}} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\frac{R_A}{R_T}} \wedge \vec{AP} \right)$$

$$\vec{a}_e = \vec{\Omega}_{\frac{R_A}{R_T}} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\frac{R_A}{R_T}} \wedge \vec{OA} \right) = -R\omega_0^2 \vec{e}_\rho - \frac{1}{2}a_0 \omega_0^2 t^2 \vec{e}_\rho$$

$$\frac{d\vec{\Omega}_{\frac{R_A}{R_T}}}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_T = a_0 \vec{e}_\rho + 2a_0 \omega_0 t \vec{e}_\theta - \omega_0^2 \left(R + \frac{1}{2}a_0 t^2 \right) \vec{e}_\rho$$

$$\vec{a}_T = \left(a_0 - \omega_0^2 \left(R + \frac{1}{2}a_0 t^2 \right) \right) \vec{e}_\rho + 2a_0 \omega_0 t \vec{e}_\theta$$

4°) $a_0 = 6ms^{-2}$, $\omega_0 = 1/2 rad.s^{-1}$, $R = 120 \text{ nm}$ et $AB = 3m$

$$AB = 3m = \frac{1}{2}a_0 t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2AB}{a_0}} = 1s \rightarrow v_b = at = 6ms^{-1}$$

$$\theta = \omega_0 t = \frac{1}{6} rad = 9,55^\circ$$

et a parcouru $l = R\theta = 20 \text{ m}$.

Exercice 2

Correction

On définit le référentiel mobile $R_1(O, x_1, y_1, z_1)$ muni de la base $(\vec{u}_{x_1}, \vec{u}_{y_1}, \vec{u}_{z_1})$

et le référentiel fixe $R(O, x, y, z)$ muni de la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

On définit le vecteur angulaire de rotation de R_1 par rapport à R par ;

$$\vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}} = \omega \vec{u}_z$$

Le point matériel est repéré dans le référentiel R_1 par : $\vec{OM} = \rho(t) \vec{u}_{x_1} = \rho_0 \cos \omega t \vec{u}_{x_1}$

$$\vec{OM} = \rho(t) \vec{u}_{x_1} = \rho_0 \cos \omega t \vec{u}_{x_1}$$

1-

La vitesse de point M par rapport à R_1 est définie par :

$$\vec{V}(M/R_1) = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{R_1} = -\rho_0 \omega \sin \omega t \vec{u}_{x_1} + \rho_0 \omega \cos \omega t \left(\frac{d\vec{u}_{x_1}}{dt} \right)_{R_1} = -\rho_0 \omega \sin \omega t \vec{u}_{x_1}$$

$$\left(\frac{d\vec{u}_{x_1}}{dt} \right)_{R_1} = 0$$

$$\vec{V}(M/R_1) = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{R_1} = -\rho_0 \omega \sin \omega t \vec{u}_{x_1}$$

La vitesse d'entraînement est donnée par :

$$\vec{v}_e = \vec{v}_{(O/R)} + \vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}} \wedge \vec{OM}$$

$$\vec{v}_e = \vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}} \wedge \vec{OM} = \omega \vec{u}_z \wedge \rho(t) \vec{u}_{x_1} = \omega \rho_0 \cos \omega t \vec{u}_{y_1}$$

$$\vec{v}_e = \rho \omega \vec{u}_{z_1} = \rho_0 \omega \cos \omega t \vec{u}_{y_1}$$

2°) D'après la loi de composition de l'accélération on a :

$$\vec{v}_R = \vec{v}_{R_1} + \vec{v}_e = -\rho_0 \omega \sin \omega t \vec{u}_{x_1} + \rho_0 \omega \cos \omega t \vec{u}_{y_1}$$

$$\|\vec{v}_R\| = \rho_0 \omega$$

$$\vec{v}_R \cdot \vec{OM} = \|\vec{v}_R\| \cdot \|\vec{OM}\| \cos$$

$$\vec{v}_R \cdot \vec{OM} = -\rho_0 \cos \omega t \rho_0 \omega \sin \omega t$$

$$\|\vec{OM}\| = \rho_0 |\cos \omega t|$$

$$\cos = -\frac{\cos \omega t \sin \omega t}{|\cos \omega t|}$$

$$\text{Si } \cos\omega t > 0 \Rightarrow \cos = -\sin\omega t \Rightarrow = \omega t + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Si } \cos\omega t < 0 \Rightarrow \cos = \sin\omega t \Rightarrow = \omega t - \frac{\pi}{2}$$

$\vec{a}_{R_1}$: Accélération de M par rapport au repère R_1

$$\vec{a}_{R_1} = \left(\frac{d\vec{V}_{R_1}}{dt} \right)_{R_1} = -\rho_0 \omega^2 \cos\omega t \vec{u}_{x_1}$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{\frac{O}{R}} + \frac{d\vec{\Omega}_{\frac{R}{R}}}{dt} \wedge \vec{OM} + \vec{\Omega}_{\frac{R}{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{\frac{R}{R}} \wedge \vec{OM})$$

$$O' \equiv O \quad \vec{a}_{\frac{O}{R}} = \vec{0} \quad \text{fixe} \quad \vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}} = \omega \vec{u}_{z_1} \quad \frac{d\vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}}}{dt} = \vec{0}$$

$$\text{Donc } \vec{a}_e = \vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}} \wedge \vec{OM} \right) = -\omega^2 \rho_0 \cos\omega t \vec{u}_{x_1}$$

$$\vec{a}_e = -\omega^2 \rho_0 \cos\omega t \vec{u}_{x_1}$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}} \wedge \vec{V}_{\frac{M}{R_1}}$$

$$= 2\omega \vec{u}_z \wedge \vec{V}_{R_1} = 2\omega \vec{u}_z \wedge \left(-\rho_0 \omega \sin\omega t \vec{u}_{x_1} \right)$$

$$\vec{a}_c = -2\rho_0 \omega^2 \sin\omega t \vec{u}_{y_1}$$

$$\vec{a}_{R_1} = -\rho_0 \omega^2 \cos\omega t \vec{u}_{x_1}$$

$$\vec{a}_R = \vec{a}_{R_1} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

$$\vec{a}_R = -\rho_0 \omega^2 \cos\omega t \vec{u}_{x_1} - 2\rho_0 \omega^2 \sin\omega t \vec{u}_{y_1}$$

$$\|\vec{a}_R\| = \omega^2 \rho_0^2$$

L'angle $\Psi = (\vec{OM}, \vec{a}_R)$ est définie par :

$$\vec{OM} \cdot \vec{a}_R = \|\vec{OM}\| \|\vec{a}_R\| \cos$$

$$\cos = \frac{\vec{OM} \cdot \vec{a}_R}{\|\vec{OM}\| \|\vec{a}_R\|} = \frac{-2\omega^2 \rho_0^2 \cos \omega t \cos \omega t}{\omega^2 \rho_0^2 |\cos \omega t|}$$

Si $\cos \omega t > 0 \Rightarrow \cos = -\cos \omega t \Rightarrow = \pi - \omega t$

Si $\cos \omega t < 0 \Rightarrow \cos = \cos \omega t \Rightarrow = \omega t$

Remarque : on peut définir la trajectoire de point M par :

Remarque :

$$\vec{OM} = \rho_0 \cos \omega t \vec{u}_\rho = \rho_0 \cos \omega t (\cos \omega t \vec{u}_x + \sin \omega t \vec{u}_y)$$

$$\vec{OM} = \rho_0 [(\cos^2 \omega t) \vec{u}_x + (\cos \omega t \sin \omega t) \vec{u}_y]$$

$$\vec{OM} = \rho_0 \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t) \vec{u}_x + \frac{1}{2}(\sin 2\omega t) \vec{u}_y \right] \Rightarrow \left(x - \frac{\rho_0}{2}\right) = \frac{\rho_0}{2} \cos 2\omega t$$

$$\text{Et } y = \frac{\rho_0}{2} \sin 2\omega t$$

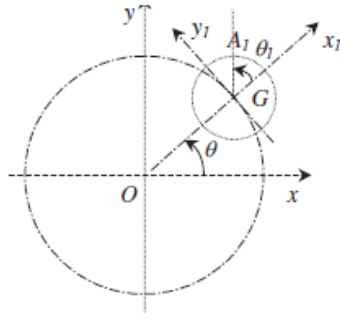
L'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes est donnée par

$$\left(x - \frac{\rho_0}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\rho_0}{2}\right)^2$$

Le point M décrit un cercle de rayon $\frac{\rho_0}{2}$ et de centre C de coordonnées $(\frac{\rho_0}{2}, 0)$.

Exercice 3

Correction



On définit le référentiel mobile $R_1(O, x_1, y_1, z_1)$ muni de la base $(\vec{G}, \vec{u}_{x_1}, \vec{u}_{y_1}, \vec{u}_{z_1})$

et le référentiel fixe $R(O, x, y, z)$ muni de la base $(\vec{O}, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et on définit la base

$(\vec{e}_{r_1}, \vec{e}_{\theta_1}, \vec{u}_{z_1})$ liée au point A_1

$$R = \|\vec{OG}\|, r = \|\vec{OA_1}\|$$

1°) la vitesse d'entraînement de point A_1 est définie par :

$$\vec{V}_e = \vec{V}_{\frac{G}{R}} + \vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}} \wedge \vec{GA}$$

$$\vec{V}_{\frac{G}{R}} = \frac{d\vec{OG}}{dt} \Big|_R = \frac{d\vec{OG}}{dt} \Big|_{R_1} + \vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}} \wedge \vec{OG}$$

$$\vec{V}_{\frac{G}{R}} = \vec{0} + \vec{\Omega}_{\frac{R}{R}} \wedge \vec{OG} = \vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}} \wedge \vec{OG} = \vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}} = \omega_0 \vec{u}_{z_1} \wedge a \vec{u}_{x_1} = a \omega_0 \vec{u}_{y_1}$$

$$\vec{V}_e = \vec{V}_{\frac{G}{R}} + \vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}} \wedge \vec{GA} = \vec{\Omega}_{\frac{R}{R}} \wedge \vec{OG} + \vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}} \wedge \vec{GA} = \vec{\Omega}_{\frac{R}{R}} \wedge \vec{OA}$$

$$\vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}} = \omega_0 \vec{u}_{z_1}$$

$$\vec{V}_e = \vec{\Omega}_{\frac{R}{R}} \wedge \vec{OA} = \omega_0 \vec{u}_{z_1} \wedge \left(r \vec{u}_{x_1} + r \cos \theta_1 \vec{u}_{x_1} + r \sin \theta_1 \vec{u}_{y_1} \right)$$

$$\vec{V}_e = \omega_0 a \vec{u}_y + \omega_0 r \cos \theta_1 \vec{u}_y - \omega_0 r \sin \theta_1 \vec{u}_{x_1}$$

$$\vec{V}_e = \omega_0 (a + r \cos \theta_1) \vec{u}_{y_1} - \omega_0 r \sin \theta_1 \vec{u}_{x_1}$$

$$\vec{OA} = \vec{OG} + \vec{GA} = a \vec{u}_{x_1} + r \vec{e}_r = a \vec{u}_{x_1} + r \cos \theta_1 \vec{u}_{x_1} + r \sin \theta_1 \vec{u}_y$$

Calcul de l'accélération de Coriolis, ou l'accélération complémentaire

$$\vec{a}_c = 2 \vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}} \wedge \vec{V}_e (A/R_1)$$

$$\vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}} = \omega_0 \vec{u}_{z_1}$$

$$\vec{V}_e (M/R_1) = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{GA} = \omega_1 r \left(-\sin \theta_1 \vec{u}_{x_1} + \cos \theta_1 \vec{u}_{y_1} \right)$$

$$\vec{a}_c = 2 \omega_0 \vec{u}_{z_1} \wedge \vec{V}_e (A/R_1) = \omega_0 \vec{u}_{z_1} \wedge \omega_1 r \left(-\sin \theta_1 \vec{u}_{x_1} + \cos \theta_1 \vec{u}_{y_1} \right) = 2 \omega_0 \omega_1 r \left(-\sin \theta_1 \vec{u}_{y_1} - \cos \theta_1 \vec{u}_{x_1} \right)$$

$$\vec{a}_c = -2 \omega_0 \omega_1 r \left(\cos \theta_1 \vec{u}_{x_1} + \sin \theta_1 \vec{u}_{y_1} \right)$$

On a le vecteur accélération d'entraînement :

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{\frac{G}{R}} + \frac{d\vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}}}{dt} \wedge \vec{GM} + \vec{\Omega}_{\frac{R}{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}} \wedge \vec{GM})$$

M=A

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{\frac{G}{R}} + \frac{d\vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}}}{dt} \wedge \vec{GA} + \vec{\Omega}_{\frac{R}{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}} \wedge \vec{GA})$$

$$\vec{a}_{\frac{G}{R}} = \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_{\frac{G}{R}} \right)_R = \frac{d}{dt} \left(a \omega_0 \vec{u}_{y_1} \right) = -a \omega_0^2 \vec{u}_{x_1}$$

$$\frac{d\vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}}}{dt} = \vec{0} \text{ mouvement circulaire uniforme}$$

$$\vec{\Omega}_{\frac{R}{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}} \wedge \vec{GA}) = \omega_0^2 r \vec{u}_{z_1} \wedge \left(\vec{u}_{z_1} \wedge (\cos \theta_1 \vec{u}_{x_1} + \sin \theta_1 \vec{u}_{y_1}) \right)$$

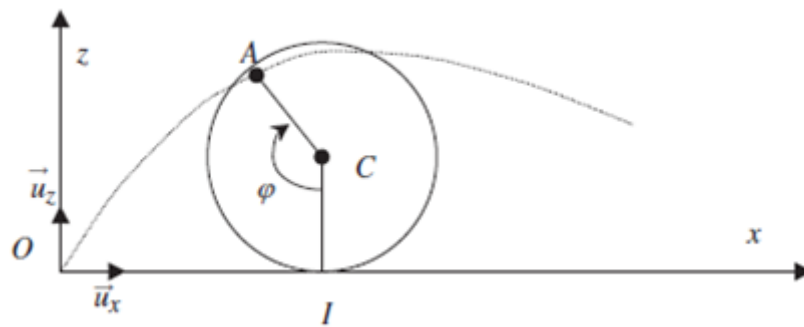
$$\vec{\Omega}_{\frac{R}{R}} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}} \wedge \vec{GA} \right) = \omega_0^2 r \vec{u}_{z_1} \wedge \left(\cos\theta_1 \vec{u}_y - \sin\theta_1 \vec{u}_{x_1} \right) = -\omega_0^2 r \left(\cos\theta_1 \vec{u}_{x_1} + \sin\theta_1 \vec{u}_y \right)$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{\frac{G}{R}} + \frac{d\vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}}}{dt} \wedge \vec{GA} + \vec{\Omega}_{\frac{R}{R}} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\frac{R_1}{R}} \wedge \vec{GA} \right) = -a\omega_0^2 \vec{u}_{x_1} + -\omega_0^2 r \left(\cos\theta_1 \vec{u}_{x_1} + \sin\theta_1 \vec{u}_y \right)$$

$$\vec{a}_e = -\omega_0^2 \left(a + r \cos\theta_1 \right) \vec{u}_{x_1} - \omega_0^2 r \sin\theta_1 \vec{u}_y$$

Exercice 4

Correction



le référentiel fixe $R(O, x, y, z)$ muni de la base $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

La roue de rayon a roule sans glisser. On a donc

$$OI = a\varphi \text{ et } \vec{OC} = \vec{OI} + \vec{IC} = a\varphi \vec{u}_x + a\vec{u}_z$$

La vitesse du point C est donc, dans le référentiel terrestre :

$$\vec{V}(C/R) = \vec{V}_0 = a\dot{\varphi} \vec{u}_x = V_0 \vec{u}_x \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{V_0}{a}$$

1-

$$\vec{OA} = a \left[(\varphi - \sin\varphi) \vec{u}_x + (1 - \cos\varphi) \vec{u}_z \right]$$

2-

$$\vec{V}(A/R) = a\dot{\varphi} \left[(1 - \cos\varphi) \vec{u}_x + \sin\varphi \vec{u}_z \right] = V_0 \left[(1 - \cos\varphi) \vec{u}_x + \sin\varphi \vec{u}_z \right]$$

$$\|\vec{V}(A/R)\| = \sqrt{2}V_0\sqrt{1 - \cos\varphi} \Rightarrow \|\vec{V}\| = 0 \text{ pour } \varphi = 2n\pi.$$

Chaque fois que le point A touche le sol (A confondu avec I), sa vitesse est nulle. Elle est maximale quand le point est à l'opposé de I par rapport à C .

3-

$$\vec{\Omega} = \dot{\varphi} \vec{u}_y \text{ et}$$

$$\begin{aligned} \vec{IA} &= \vec{IC} + \vec{CA} = a\vec{u}_z + \left(-a \sin\varphi \vec{u}_x - a \cos\varphi \vec{u}_z \right) = -a \sin\varphi \vec{u}_x + a(1 - \cos\varphi) \vec{u}_z \\ \vec{\Omega} \wedge \vec{IA} &= a\dot{\varphi} \left[(1 - \cos\varphi) \vec{u}_x + \sin\varphi \vec{u}_z \right] = \vec{V}(A/R) \end{aligned}$$

À l'instant considéré, le point A a un mouvement circulaire autour du point I avec un vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}$.

4-

$$\vec{V} = V_0 \vec{u}_x + V_0 \left[-\cos\varphi \vec{u}_x + \sin\varphi \vec{u}_z \right] = \vec{V}_0 + V_0 \vec{u} \text{ avec } \vec{u} = -\cos\varphi \vec{u}_x + \sin\varphi \vec{u}_z$$

Ce vecteur $\vec{u}$ est un vecteur tangent à la roue voir figure. En effet, on a : $\vec{u} \cdot \vec{CA} = 0$ Le vecteur vitesse peut donc se décomposer en deux vecteurs de même module (V_0), l'un parallèle à Ox ($\vec{V}_0$) et l'autre tangent à la roue ($V_0 \vec{u}$).

$$\vec{a} = V_0 \dot{\varphi} \left(\sin\varphi \vec{u}_x + \cos\varphi \vec{u}_z \right) = -\left(\frac{V_0}{a} \right)^2 \vec{CA}$$

Ce vecteur est dirigé de A vers C et $\|\vec{a}\| = \frac{V_0^2}{a}$

5-

La loi de composition des vitesses est

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_e$$

Dans le référentiel lié au vélo, repère de centre C , A décrit un cercle de rayon a d'un mouvement uniforme. On a donc :

$$\vec{V}' = \vec{\Omega} \wedge \vec{CA} = \dot{\varphi} \vec{u}_y \wedge \left(-a \sin\varphi \vec{u}_x - a \cos\varphi \vec{u}_z \right) = V_0 \left[-\cos\varphi \vec{u}_x + \sin\varphi \vec{u}_z \right] = V_0 \vec{u}$$

Le référentiel étant en translation rectiligne uniforme par rapport au sol, on a :

$$\vec{V}_e = \vec{V}_0$$

Conclusion : on retrouve

$$\vec{V} = V_0 \vec{u}_x + V_0 \left[-\cos\varphi \vec{u}_x + \sin\varphi \vec{u}_z \right]$$

Il n'y a pas d'accélération complémentaire (le référentiel n'est pas en rotation) ni d'accélération d'entraînement (la translation est rectiligne uniforme). On a donc $\vec{a}' = \vec{a}$

Pour un mouvement circulaire uniforme, le vecteur accélération est un vecteur normal centripète et a pour expression

