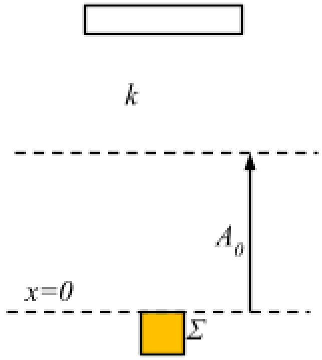
Ας προσεγγίσουμε πάλι μια φθίνουσα ταλάντωση

Στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς $k = 100N/m$, που το πάνω άκρο του είναι ακλόνητα δεμένο στο ταβάνι, είναι προσαρμοσμένο σώμα, μάζας $m = 1kg$ και ισορροπεί ακίνητο. Απομακρύνουμε το σώμα κατά $A_0 = 2m$, από τη θέση ισορροπίας και το αφήνουμε ελεύθερο, χωρίς αρχική ταχύτητα. Εκτός από τη δύναμη επαναφοράς $\vec{F}_{επ} = -k \cdot \vec{x}$, υπάρχει δύναμη τριβής αντίθετη της ταχύτητας της μορφής $\vec{F}_{αντ} = -b \cdot \vec{υ}$. Το σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με σταθερά απόσβεσης $b = 2kg/s$, η οποία θεωρείται «μικρή» για τις συνθήκες του προβλήματος.



α) Η κίνηση είναι περιοδική; Αν ναι ποια είναι η γωνιακή συχνότητα και η περίοδός της;

β) Στο σχολικό βιβλίο αναγράφεται η σχέση $A = A_0 \cdot e^{-\Lambda t}$

Ποια φυσικά μεγέθη περιλαμβάνει; Τι τιμές παίρνει ο χρόνος σε αυτή τη σχέση; Υπολογίστε το πηλίκο δύο διαδοχικών ποσοτήτων του μεγέθους A ανά περίοδο, δηλαδή το πηλίκο $\dfrac{A_ν}{A_{ν+1}}$

γ) Έχει νόημα η ερώτηση: Ποιος είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να γίνει το πλάτος $\dfrac{A_0}{2}$;

δ) Κάθε φορά που το σώμα διέρχεται από την αρχική θέση ισορροπίας $x = 0$, η επιτάχυνση είναι μηδέν και η ταχύτητα μέγιστη, όπως συμβαίνει και στην απλή αρμονική ταλάντωση;

ε) Κάθε φορά που η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης γίνεται μέγιστη, η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι μηδέν (όπως συμβαίνει και στην απλή αρμονική ταλάντωση);

στ) Στην ερώτηση 1.18 του σχολικού βιβλίου λέγεται ότι η ενέργεια της ταλάντωσης είναι φθίνουσα εκθετική συνάρτηση του χρόνου. Είναι σωστή αυτή η πρόταση;

Υπολογίστε το πηλίκο δύο διαδοχικών μέγιστων δυναμικών ενεργειών (ή ολικών ενεργειών) ανά περίοδο, δηλαδή το πηλίκο $\dfrac{U_{max,ν}}{U_{max,ν+1}}$

ζ) Αν γνωρίζουμε ότι τη χρονική στιγμή

$t = \dfrac{\pi}{8}s,\ x = -1{,}0625m,\ υ = +9{,}4645m/s,\ a = +87{,}3273m/s^2$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

ζ1) της κινητικής ενέργειας ταλάντωσης

ζ2) της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης

ζ3) της ολικής ενέργειας της ταλάντωσης

η) Αν κάποιος ισχυριστεί ότι η σχέση $\alpha = -\omega^2 \cdot x$ εξακολουθεί να ισχύει και στη φθίνουσα ταλάντωση, τι θα του απαντούσατε;

Απάντηση

- **Ό,τι βρίσκεται σε γκρίζες ζώνες είναι εκτός ύλης…**

α) Αν ως περίοδο θεωρήσουμε το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων του σώματος από τη θέση αναφοράς (τη $x=0$), με ταχύτητα της ίδιας κατεύθυνσης, ναι η κίνηση είναι περιοδική.
Η γωνιακή της συχνότητα είναι λίγο μικρότερη από την γωνιακή συχνότητα ω_0 της απλής αρμονικής ταλάντωσης. Δηλαδή

$$\omega < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 rad/s$$

Με ακρίβεια, αν $\Lambda = \frac{b}{2m} = 1 s^{-1}$ (εκθέτης ή παράγοντας απόσβεσης), η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2} = \sqrt{100-1} = \sqrt{99} \simeq 9,95 s$

Η περίοδός της είναι λίγο μεγαλύτερη από την περίοδο T_0 του αντίστοιχου απλού αρμονικού ταλαντωτή. Δηλαδή

$$T > T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{5} s = 0,628 s$$

Με ακρίβεια, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{9,95} = 0,631 s$

Βλέπουμε ότι σωστά θεωρήσαμε τη σταθερά b, μικρή.

Για την ακρίβεια, θα έχουμε φθίνουσα ταλάντωση με μικρή απόσβεση, αν ικανοποιείται η συνθήκη

$$\Lambda < \omega_0 \Leftrightarrow \frac{b}{2m} < \omega_0 \Leftrightarrow b < 2m\omega_0$$

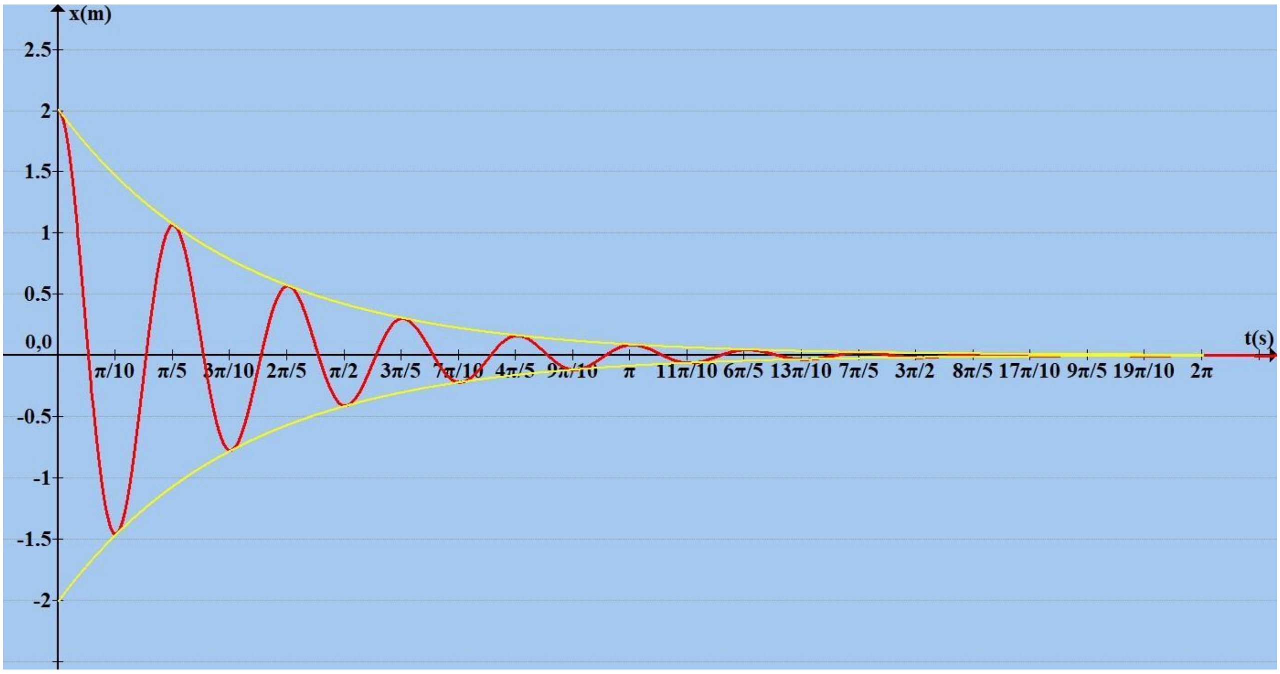
Εδώ είναι $b = 2 kg/s$ και $2m\omega_0 = 2 \cdot 1 \cdot 10 = 20 kg/s$

άρα ικανοποιείται η συνθήκη.

β) Η εξίσωση κίνησης της συγκεκριμένης ταλάντωσης, είναι η παρακάτω:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2\cdot 10}{9,95} \cdot e^{-t} \eta\mu(9,95t + \varphi) \\ \eta\mu\varphi &= \frac{9,95}{10} = 0,995 \Leftrightarrow \varphi = 0,47\pi \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow x = 2,01 \cdot e^{-t} \eta\mu(9,95t + 0,47\pi) \ (S.I.)$$

Η γραφική παράσταση σε βαθμολογημένους άξονες, θα είναι:



Η κόκκινη γραμμή είναι η γραφική παράσταση της θέσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο. Βλέπουμε τις δύο κίτρινες περιβάλλουσες γραφικές παραστάσεις. Τα σημεία που **ακουμπάνε** την κόκκινη, **λόγω της πολύ μικρής απόσβεσης**, είναι οι «θέσεις πλάτους» A, που αναφέρονται στην εξίσωση του βιβλίου.

Βλέπουμε όμως ότι οι επαφές γίνονται τις χρονικές στιγμές $t = k \cdot \frac{T}{2},\ k = 0,1,2,3,...$

Ας πούμε, η πάνω περιβάλλουσα, μπορούμε να γράψουμε ότι έχει εξίσωση

$$A = 2 \cdot e^{-t}\ \ (S.I.),\ t \geq 0$$

Για την ακρίβεια είναι $A = 2{,}01 \cdot e^{-t}\ (S.I.),\ t \geq 0$

Το πηλίκο δύο διαδοχικών «αγγιγμάτων» παραμένει σταθερό.

Πράγματι, από τη σχέση $A_\kappa = A_0\, e^{-\Lambda t}$, $t = kT$, $k = 0,1,2,...$έχουμε για $\kappa = \nu$ και $\kappa = \nu+1$:

$$\frac{A_\nu}{A_{\nu+1}} = \frac{A_0 e^{-\lambda \nu T}}{A_0 e^{-\lambda(\nu+1)T}} \Leftrightarrow \frac{A_\nu}{A_{\nu+1}} = e^{\Lambda T}$$

Αν θέσουμε $\Lambda = 1s^{-1},\ T \approx \frac{\pi}{5}s$ Προκύπτει $\frac{A_\nu}{A_{\nu+1}} = e^{\frac{\pi}{5}}$

γ) Βλέπετε στη γραφική παράσταση το πλάτος να παίρνει την τιμή $A=1m$; Η πρώτη χρονική στιγμή που δίνει $x = 1m$ είναι η $t \approx 0{,}108280645400524...s$ και δεν είναι σε θέση πλάτους! Άρα δεν έχει νόημα η ερώτηση.

Αν ρωτούσε, «πότε η περιβάλλουσα συνάρτηση $A = 2 \cdot e^{-t}$ μπορεί να πάρει τιμή $A = 1m$», έχει νόημα.

$$1 = 2 \cdot e^{-t} \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -t = ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = ln2 \Leftrightarrow t = 0{,}69s$$

ΑΝ ΠΕΣΕΙ ΣΕ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ μια τέτοια ερώτηση, ο μαθητής θα πρέπει να απαντήσει θεωρώντας εξίσωση πλάτους, την εξίσωση της περιβάλλουσας και να δώσει απάντηση $t = 0,69s$.

δ) Η απάντηση είναι ΟΧΙ.

Θέση ισορροπίας ταλάντωσης ορίζεται η θέση όπου $\Sigma\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$.

Η θέση $x = 0$ είναι η θέση ισορροπίας **μόνο στην αρχή** και **στο τέλος** της ταλάντωσης. Γιατί;

Ας γράψουμε τον 2ο Νόμο Newton σε μια τυχαία χρονική στιγμή:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F}_{\varepsilon\pi} + \vec{F}_{\alpha\pi} = m\vec{a} \Leftrightarrow -kx - b\upsilon = ma$$

Όταν με την εκάστοτε ταχύτητα διέρχεται από τη θέση $x = 0$, η επιτάχυνση δεν είναι μηδέν, αφού εκτός από τη δύναμη επαναφοράς δρα και η δύναμη αντίστασης. Πράγματι

$$-k \cdot 0 - b\upsilon = ma \Leftrightarrow -b\upsilon = ma \Leftrightarrow \alpha = -\frac{b}{m}\upsilon \neq 0$$

Όταν ο ταλαντωτής περνά από την αρχική θέση ισορροπίας $x = 0$, η ταχύτητα δεν είναι τοπικά μέγιστη. Η ταχύτητα γίνεται τοπικά μέγιστη όταν η κλίση της αντίστοιχης γραφικής παράστασης γίνεται μηδενική.

$$\frac{d\upsilon}{dt} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow -kx - b\upsilon = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b\upsilon}{k} \neq 0$$, όπου $\upsilon = \pm\upsilon_{max}$

Όταν κινείται προς τη θέση $x = 0$, με $-\upsilon_{max}<0$ τότε $x> 0$, ενώ όταν κινείται με $+\upsilon_{max}>0$ τότε $x< 0$, θέσεις οι οποίες αλλάζουν ανά περίοδο, αφού αλλάζει και η τοπικά μέγιστη ταχύτητα. Άρα οι θέσεις ισορροπίας, δηλαδή οι θέσεις όπου $\vec{a} = 0$ και το κινητό περνάει με μέγιστη ταχύτητα κινούμενο προς τη θέση $x = 0$, είναι ΔΥΟ σε κάθε περίοδο κίνησης και συνολικά ΑΠΕΙΡΕΣ…οι οποίες σιγά-σιγά προσεγγίζουν τη $x = 0$ με την οποία ταυτίζονται μετά από άπειρο χρόνο.

Στη φθίνουσα ταλάντωση η κάθε θέση ισορροπίας είναι μοναδική, με την έννοια ότι όσες φορές και να βρεθεί το σώμα σε αυτή τη θέση μια και μόνο μία φορά θα είναι θέση ισορροπίας !!! Το $x = 0$ δεν είναι ποτέ θέση ισορροπίας, απλά στη θέση αυτή το σώμα θα ηρεμήσει όταν τελειώσει την κίνησή του.

ε) Είδαμε πριν ότι η ταχύτητα είναι μέγιστη στις θέσεις $x = -\frac{b\upsilon}{k} \neq 0$ όπου $\upsilon = \pm\upsilon_{max}$

Άρα η απάντηση είναι ΟΧΙ. Όταν η κινητική ενέργεια γίνεται μέγιστη $K_{max} = \frac{1}{2} m\upsilon_{max}^2$ αυτή είναι μικρότερη της ενέργειας ταλάντωσης $E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2$

στ) Στις **ακραίες θέσεις** όπου $\upsilon = 0$ και η κινητική ενέργεια είναι μηδέν, η δυναμική ενέργεια είναι μέγιστη

$$U_{max} = \frac{1}{2}kA^2 \Leftrightarrow U_{max} = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (2 \cdot e^{-t})^2 \Leftrightarrow U_{max} = 200 \cdot e^{-2t} \ \ (S.I.)$$ Η σχέση αυτή ισχύει **μόνο** τις χρονικές στιγμές $t = kT/2,\ k = 0,1,2,\ldots$

Η ενέργεια της ταλάντωσης συνεχώς ελαττώνεται, είναι μια πολύπλοκη συνάρτηση του χρόνου και **δεν είναι φθίνουσα εκθετική συνάρτηση του χρόνου**, όπως υπονοείται στο σχολικό βιβλίο!

Το πηλίκο δύο διαδοχικών μέγιστων δυναμικών ενεργειών (ή ολικών ενεργειών) ανά περίοδο, δηλαδή τις χρονικές στιγμές $t = kT,\ k = 0,1,2,\ldots$ είναι σταθερό και ισούται με

$$\frac{U_{max,\nu}}{U_{max,\nu+1}} = \frac{E_\nu}{E_{\nu+1}} = \frac{200 \cdot e^{-2\nu T}}{E_0 e^{-2(\nu+1)T}} = e^{2T} = e^{\frac{2\pi}{5}}$$

ζ)

ζ1) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι

$$\frac{dK}{dt} = P_{\Sigma F} = \Sigma F \cdot \upsilon = ma \cdot \upsilon = 1 \cdot 87,3273 \cdot 9,4645 \approx 826,5J/s$$

ζ2) Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης είναι

$$\frac{dU}{dt} = -P_{F_{\varepsilon\pi}} = -F_{\varepsilon\pi}\upsilon = +k \cdot x \cdot \upsilon = +100 \cdot (-1,0625) \cdot 9,4645 \approx -1005,6J/s$$

ζ3) Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας ταλάντωσης είναι

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dW_{F_{\alpha\nu\tau}}}{dt} = F_{\alpha\nu\tau} \cdot \upsilon = -b\upsilon \cdot \upsilon = -b\upsilon^2 = -2 \cdot 9,4645^2 \approx -179,1J/s$$

Παρατηρούμε ότι ο ρυθμός μείωσης της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης, ισούται με το άθροισμα του ρυθμού αύξησης της κινητικής ενέργειας συν το ρυθμό παραγωγής θερμικής ενέργειας δηλαδή

- |dU/dt|(1005,6W)
- dK/dt(826,5W)
- dQ/dt(179,1W)

η) Ότι κάνει **λάθος**. Πως προκύπτει αυτή η σχέση;
Αν ο 2ος Νόμος Newton έχει τη μορφή

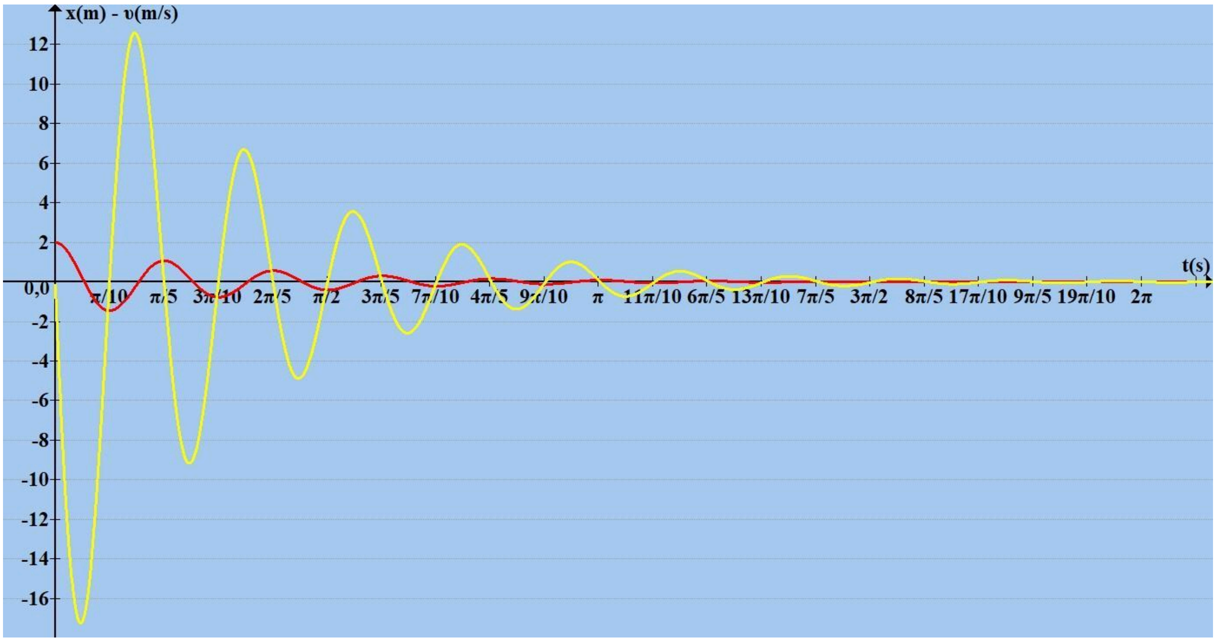
$$\vec{F}_{\varepsilon\pi} = m\vec{a} \Leftrightarrow -m\omega^2 \cdot x = ma \Leftrightarrow a = -\omega^2 \cdot x$$

, που ισχύει μόνο στην απλά αρμονική ταλάντωση.

Στο παράδειγμά μας $a = +87,3273m/s^2$ ενώ $-\omega^2 \cdot x = 105,2m/s^2$

Σχόλιο

Παρακάτω βλέπουμε μαζί τις γραφικές παραστάσεις $\acute{x} \rightarrow t(\kappa), \kappa\kappa\iota\nu\eta t(\acute{\upsilon} \rightarrow \kappa) \tau\rho\iota\nu\eta$ με τις τιμές της εφαρμογής μας.



Οι αντίστοιχες συναρτήσεις είναι

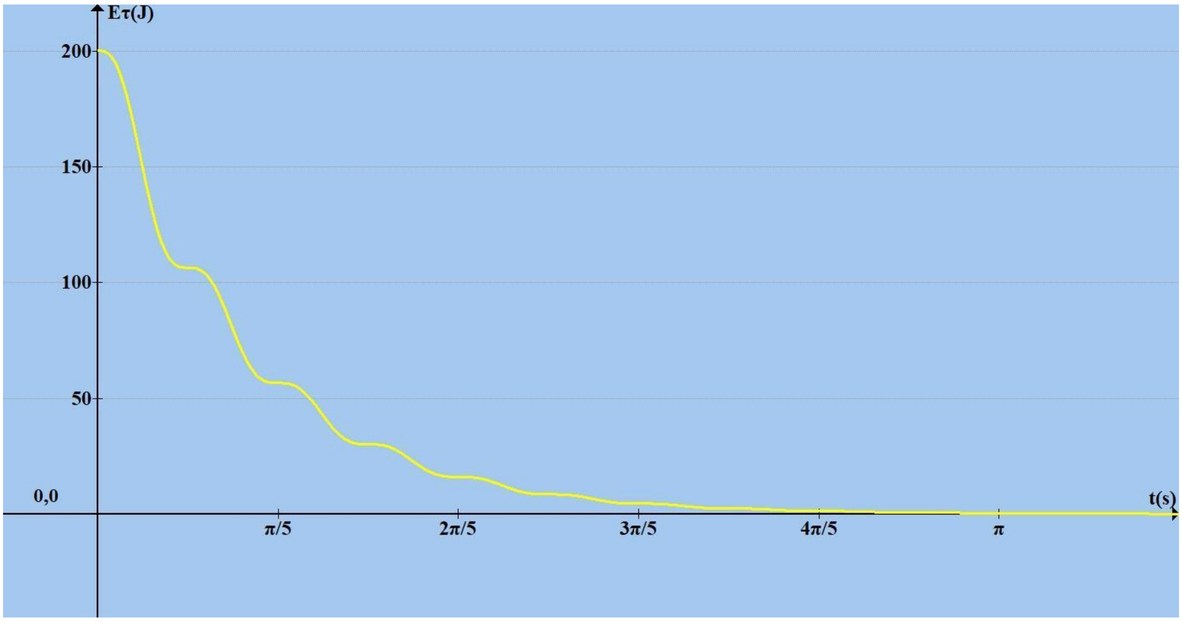
$$x = 2{,}01 \cdot e^{-t} \eta\mu(9{,}95t + 0{,}47\pi)$$

$$\upsilon = -2{,}01 \cdot e^{-t} \cdot \eta\mu(9{,}95t + 0{,}47\pi) + 19{,}9995 \cdot e^{-t} \cdot \sigma\upsilon\nu(9{,}95t + 0{,}47\pi)$$

Και για τον ισχυρισμό περί ενέργειας εκθετικής φθίνουσας συνάρτησης του χρόνου, η αντίστοιχη γραφική παράσταση της σχέσης

$$E = \frac{1}{2} m\upsilon^2 + \frac{1}{2} Dx^2$$

είναι:



Ανδρέας Ριζόπουλος