

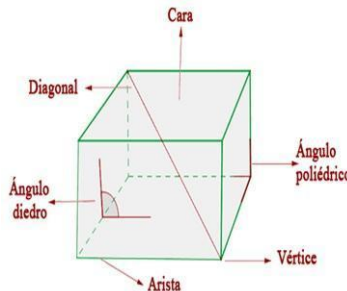
INSTITUTO EMPRESARIAL GABRIELA MISTRAL
MATEMATICAS 7

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

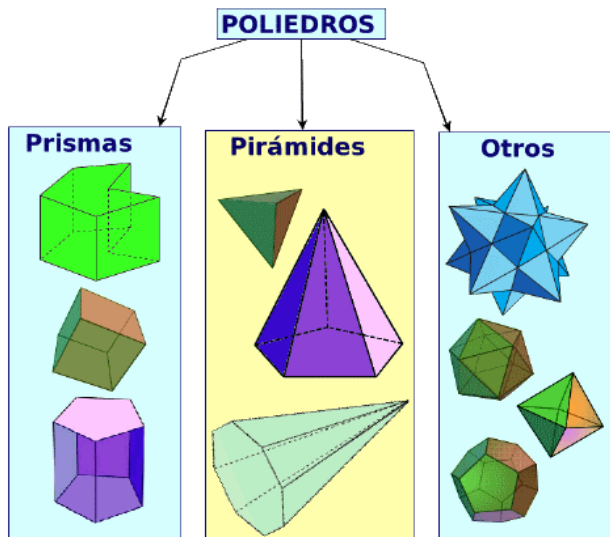
GUIA: GEOMETRIA. AREA Y VOLUMEN EN POLIEDROS

POLIEDROS

- Un **poliedro** es un cuerpo geométrico limitado por cuatro o más polígonos, siendo cada uno de ellos una cara.
- Se llaman **caras** del poliedro a los polígonos que lo limitan.
- Se llaman **aristas** del poliedro a los lados de los polígonos que lo limitan.
- Se llaman **vértices** del poliedro a los vértices de los polígonos que lo limitan.



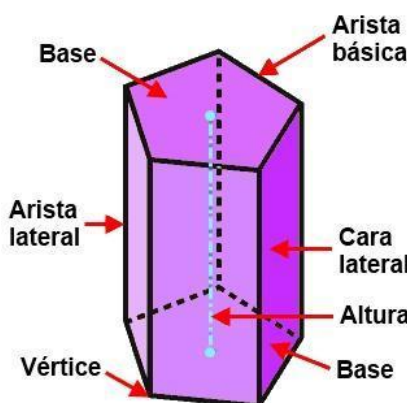
Clasificación debido a la forma de sus caras y a la distribución de estas:



PRISMAS

Un **prisma** es un poliedro que **tiene dos caras que son polígonos iguales y paralelos entre sí**, llamadas bases, y sus **otras caras laterales son paralelogramos**. La altura del prisma es la distancia entre las bases.

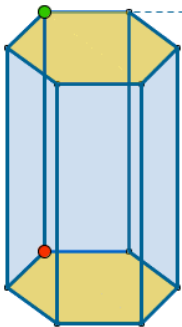
Elementos de un prisma



Altura de un prisma es la distancia entre las bases.

Los lados de las bases constituyen las aristas básicas y los lados de las caras laterales, las aristas laterales; éstas son iguales y paralelas entre sí.

ÁREA DE UN PRISMA



Como vemos, este prisma hexagonal tiene 6 caras laterales que son rectángulos y 2 bases que son hexágonos. El área lateral de un prisma es la suma de las áreas de sus caras laterales (los 6 rectángulos).

Las 6 caras laterales forman un rectángulo cuya base es el perímetro del hexágono de la base.

Por tanto, el área lateral del prisma es igual al producto del perímetro de la base por la altura:

$$\text{Área lateral} = \text{perímetro de la base} \times \text{altura}$$

El área total es la suma del área lateral más el área de las 2 bases:

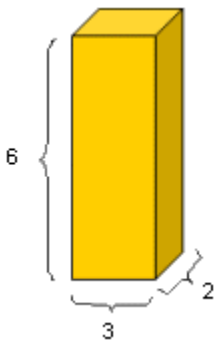
$$\text{Área total} = \text{Área lateral} + 2 \times \text{Área de la base}$$

VOLUMEN DE UN PRISMA

El volumen de un prisma se puede también definir como el producto del área de la base por la altura, es decir:

$$V = \text{Área base} \times \text{altura}$$

Ejemplos:



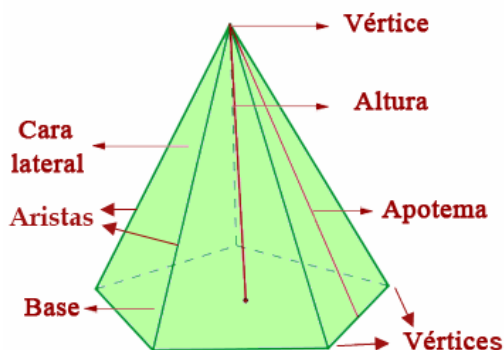
$$\text{En el ejemplo: } V = (3\text{cm} \times 2\text{ cm}) \times 6\text{ cm} = 6\text{cm}^2 \times 6\text{cm} = 36\text{cm}^3$$

PIRÁMIDES

Una **pirámide** es un poliedro cuya **base es un polígono** y **cuyas caras laterales son todas triángulos** que tienen un vértice común, llamado el vértice de la pirámide.

La altura es la distancia de este vértice a la base.

Elementos de una pirámide



Los elementos fundamentales de una pirámide son caras, aristas y vértices.

- Las caras pueden ser:

- Base de la pirámide, que es un polígono cualquiera.
- Caras laterales de la pirámide, que son triángulos.

- Las aristas pueden ser:

- Aristas básicas, que son los lados de la base.
- Aristas laterales, que son los lados de las caras laterales que no son aristas básicas.

- Los vértices pueden ser:

- Vértices de la base, que son los vértices del polígono de la base.
- Vértice o cúspide de la pirámide, que es el punto en el que se encuentran las aristas laterales.

Apotema de una pirámide regular es la altura de cualquiera de sus caras.

AREA DE UNA PIRÁMIDE

Área Lateral = Suma de las áreas de todas sus caras laterales

Área Total = Área Lateral + Área de la Base

VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE

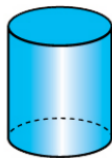
Volumen = $\frac{1}{3}$ x Área de la base x Altura

$$V = \frac{A_b \times h}{3}$$

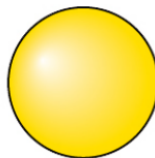
siendo A_b = Área de la base y h =altura

CUERPOS REDONDOS

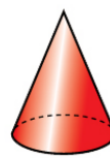
CILINDRO



ESFERA



CONO

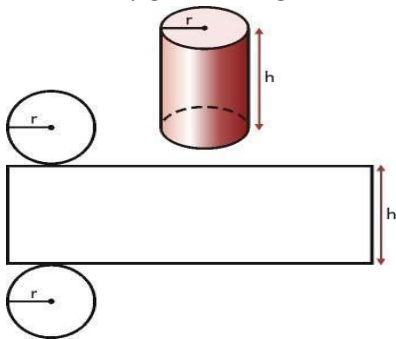


CILINDRO

El cilindro es el cuerpo geométrico engendrado por un rectángulo al girar por uno de sus lados.

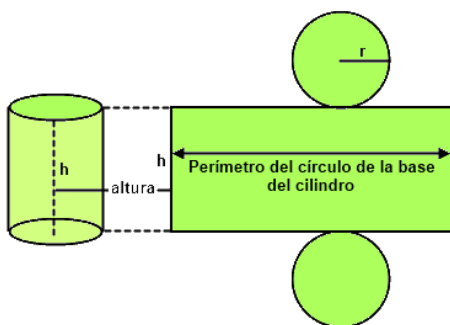
Desarrollo del cilindro

Si desarrollamos un cilindro nos damos cuenta que se descompone en un rectángulo y dos círculos. Llamamos r al radio de la base y generatriz g a la altura del cilindro.



AREA DEL CILINDRO

En el desarrollo de un cilindro se aprecia que su superficie lateral es un rectángulo cuya base es igual al perímetro del círculo, $2\pi r$, y cuya altura, h , es la del cilindro.



$$\text{Área lateral} = \text{Perímetro de la base} \times \text{Altura} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

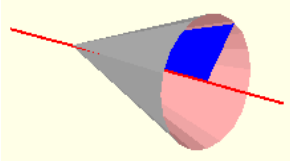
$$\text{Área total} = \text{Área Lateral} + 2 \cdot \text{Área de la base} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

VOLUMEN DEL CILINDRO

$$\text{Volumen} = \text{Área de la base} \times \text{Altura} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

CONO

El cono es el cuerpo geométrico engendrado por un triángulo rectángulo al girar por uno de sus catetos.

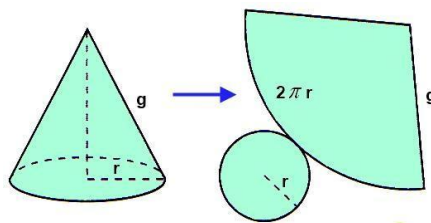


Desarrollo del cono

Si desarrollamos un cono nos damos cuenta que se descompone en un sector circular y un círculo que es la base. Llamamos r al radio de la base y generatriz g al radio del sector

ÁREA DEL CONO

En el desarrollo de un cono recto se aprecia que su superficie lateral es un sector circular de radio g . ¿Qué porción de círculo tiene ese sector?



La circunferencia completa tiene una longitud de $2\pi r$.

- El sector circular tiene una longitud de $2\pi r$.
- El área de la base es πr^2 .
- El área del sector circular es:

$$\frac{\text{longitud de la circunferencia}}{\text{superficie del círculo}} = \frac{\text{longitud del arco}}{\text{superficie del sector}} \rightarrow (A)$$

$$\frac{2\pi r}{\pi r^2} = \frac{2\pi g}{A} \rightarrow A = \frac{2\pi r \times \pi g^2}{2\pi g} = \pi r g$$

Área lateral del cono

Área total del cono = Área lateral + Área de la base = $\pi r g + \pi r^2$

VOLUMEN DEL CONO

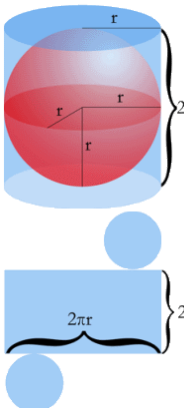
Al igual que todos los cuerpos geométricos que terminan en un vértice, su volumen es $1/3$ del área de la base por la altura

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot \text{Área de la base} \cdot \text{Altura} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$$

ESFERA

La esfera es el cuerpo geométrico engendrado por un semicírculo al girar sobre su diámetro.

ÁREA DE LA ESFERA



Arquímedes demostró que el área de una esfera es igual al área lateral de un cilindro que tenga el mismo radio y cuya altura sea el diámetro de la esfera.

La imagen muestra una esfera envuelta por un cilindro que se ajusta por completo a ella, un cilindro de radio R y altura $2R$.

Tenemos entonces que el área de la esfera es igual al área lateral de ese cilindro:

$$A_{\text{Esfera}} = A_{\text{Lateral del cilindro}} = 2\pi R \times 2R = 4\pi R^2$$

VOLUMEN DE LA ESFERA

La esfera solo ocupa las dos terceras partes del volumen del cilindro que la contiene:

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{2}{3} V_{\text{Cilindro}} = \frac{2}{3} \times \pi R^2 \times 2R = \frac{4}{3} \pi R^3$$

ACTIVIDAD

Resuelve los siguientes problemas:

1. Halla el área total de un prisma hexagonal regular de arista básica 8 cm y altura 10 cm. Halla el volumen de dicho prisma.
2. Calcular el área y el volumen de estos prismas. En ambos la arista de la base mide 3 cm y la altura 4 cm.
 - a) Prisma hexagonal regular
 - b) Prisma cuadrangular oblicuo
3. Calcula el área y el volumen de:
 - a) Un cubo de arista 12 cm.
 - b) Un prisma triangular regular de arista de la base 10 cm y altura 6 cm
4. Calcular el área total de una pirámide cuadrangular recta de arista básica 6 cm y altura 4 cm. Calcular también su volumen.
5. Halla el área total de una pirámide hexagonal regular con arista básica 5 cm y apotema de sus caras laterales 12 cm. Calcular también su volumen.
6. Halla el área y el volumen de las siguientes figuras:
 - a) Un cono de radio de la base 7 cm y generatriz 24 cm.
 - b) Un cilindro de radio de la base 4 cm y generatriz 10 cm.