

Тема: Розв'язування показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей

<https://youtu.be/EROYO2ncbXc>

Мета:

- *Навчальна:* закріпити вміння розв'язувати показникові та логарифмічні рівняння і нерівності;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння математичною мовою висловлювати власну думку; правильно користуватись термінологією пов'язаною з вивченою темою;
- *Виховна:* виховувати наполегливість; вміння робити правильні висновки та бачити кінцеву мету;

Компетенції:

- *Математична компетентність:*
 - *Уміння:* оперувати числовою інформацією; прогнозувати в контексті навчальних та практичних задач;
 - *Ставлення:* усвідомлення значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві, розвитку технологічного, економічного і оборонного потенціалу держави, успішного вивчення інших дисциплін;
 - *Навчальні ресурси:* розв'язування математичних задач;

Тип уроку: удосконалення умінь і навичок;

Обладнання: опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

- Які рівняння називають логарифмічним?
- Які нерівності називаються найпростішими логарифмічними нерівностями?
- Чи існує логарифм від'ємного числа або нуля?
- Як розв'язати рівняння виду $f(x) = g(x)$?
- Як розв'язати найпростішу логарифмічну нерівність? Наведіть приклад.
- Сформулюйте основну логарифмічну тотожність

- Сформулюйте основні властивості логарифмів
- Як розв'язувати більш складні логарифмічні рівняння? Чи можна дотримуватися якогось єдиного алгоритму?
- Як розв'язати нерівність типу $f(x) > g(x)$, якщо $a > 1$?
- Як розв'язати нерівність типу $f(x) > g(x)$, якщо $0 < a < 1$?
- Запишіть формулу переходу від однієї основи до іншої та наслідки з неї
- У чому полягає графічний спосіб розв'язування логарифмічних рівнянь?

III. Розв'язування задач

№1

Знайдіть десятковий логарифм числа:

1) 10	$lg 10 = 1$
2) 1000	$lg 1000 = 3$
3) 0,01	$lg 0,01 = -2$
4) 0,000001	$lg 0,000001 = -6$

№2

Розв'яжіть рівняння:

1) $x = \frac{1}{2}$

2) $x = 0$

3) $2 = 2$

Розв'язок:

1) $x = \frac{1}{2}$

$$x = 4^{\frac{1}{2}}$$

2) $x = 0$

$$x = 2^0 = 1$$

3) $2 = 2$

$$2 = x^2$$

$$x = \sqrt{2}$$

Розв'яжіть рівняння:

$$1) 5^x = 10$$

$$2) 2^{x-3} = 5$$

$$3) 0,3^{3x+2} = 7$$

Розв'язок:

$$1) 5^x = 10$$

$$x = 10$$

Відповідь: 10

$$2) 2^{x-3} = 5$$

$$x - 3 = 5$$

$$x = 3 + 5$$

Відповідь: 3 + 5

$$3) 0,3^{3x+2} = 7$$

$$3x + 2 = 7$$

$$3x = 7 - 2$$

$$x = \frac{1}{3}(7 - 2)$$

Відповідь: $\frac{1}{3}(7 - 2)$

Обчисліть:

$$1) \left(\frac{1}{3}\right)^6$$

$$2) 6^{1+5}$$

$$3) 2^{35+4}$$

$$4) 8^{1-3}$$

$$5) 8$$

$$6) \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$$

Розв'язок:

$$1) \left(\frac{1}{3}\right)^6$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \left(3^{-1}\right)^6 = 3^{-6} = 3^{6^{-1}} = 3^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

Відповідь: $\frac{1}{6}$;

$$2) 6^{1+5}$$

$$6^{1+5} = 6^1 + 6^5 = 6 \cdot 5 = 30$$

Відповідь: 30;

$$3) 2^{35+4}$$

$$2^{35+4} = 2^{5^3+4} = 2^{125} \cdot 2^4 = 125 \cdot 16 = 2000$$

Відповідь: 2000;

4) 8^{1-3}

$$8^{1-3} = 8^1 : 8^3 = 8 : 2^{33} = 8 : 2^{3^3} = 8 : 3^3 = \frac{8}{27}$$

Відповідь: $\frac{8}{27}$;

5) 8

$$2^3 = 3 = \frac{1}{2}$$

$$\left| \text{Так як } 2^3 = 3 \right.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$

6) $tg \frac{\pi}{3}$

$$tg \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} = \frac{1}{2}$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$;

№5

Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{x+3} - 3 \cdot 5^{x+1} - 10 \cdot 5^x = 4$

2) $3^{x+1} - 8 = 3^{1-x}$

Розв'язок:

1) $5^{x+3} - 3 \cdot 5^{x+1} - 10 \cdot 5^x = 4$

$$5^x (5^3 - 3 \cdot 5^1 - 10) = 4$$

$$5^x \cdot 100 = 4$$

$$5^x = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

$$5^x = 5^{-2}$$

$$x = -2$$

Відповідь: -2 ;

Винесли за дужки спільний множник 5^x

Поділили обидві частини рівняння на 100

Так як ці степені числа 5 рівні, то рівні також і показники їх степенів.

За теоремою, розглянутою на уроці №1

$$a^{x_1} = a^{x_2} \quad a > 0 \text{ і } a \neq 1 \mid \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$2) 3^{x+1} - 8 = 3^{1-x}$$

Розв'язок:

$$3^x \cdot 3^1 - 8 = \frac{3^1}{3^x}$$

$$3^x \cdot 3 - 8 = \frac{3}{3^x}$$

Використали властивості степеня з дійсним показником

Нехай $|t = 3^x| t > 0$

$$3t - 8 = \frac{3}{t}$$

$$3t^2 - 8t = 3$$

$$3t^2 - 8t - 3 = 0$$

$$D = 64 + 36 = 100 = 10^2$$

$$t_{1,2} = \frac{8 \pm 10}{6} = [t_1 = 3 \quad t_2 = -\frac{1}{3} \text{ (не задовольняє, так як } t > 0)]$$

$$t = 3^x \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$$

Відповідь: 1;

№6

Розв'яжіть нерівність:

$$1) \sqrt[10]{2^{x^2-14,5x}} < \frac{1}{8}$$

$$2) \frac{1}{3^x+5} \leq \frac{1}{3^{x+1}-1}$$

Розв'язок:

$$1) \sqrt[10]{2^{x^2-14,5x}} < \frac{1}{8}$$

$$2^{\frac{x^2-14,5x}{10}} < 2^{-3}$$

$$\frac{x^2-14,5x}{10} < -3$$

$$x^2 - 14,5x < -30$$

$$x^2 - 14,5x + 30 < 0$$

Більш зручний для розв'язку запис

$$\text{нерівності } \sqrt[10]{2^{x^2-14,5x}} < \frac{1}{8}$$

За теоремою, розглянутою на уроці №5

Якщо $a > 1$ і $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, то $f(x) > g(x)$ Як

Помножили обидві частини рівняння на 10

$$f(x) = x^2 - 14,5x + 30$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

2. Нулі функції $f(x)$: $x^2 - 14,5x + 30 = 0$

$$D = 210,25 - 120 = 90,25 = 9,5^2$$

$$x_{1,2} = \frac{14,5 \pm 9,5}{2} = [x_1 = 12 \quad x_2 = 2,5$$

Так як знак нерівності «<», оберемо проміжок (2, 5; 12)

Відповідь: $x \in (2, 5; 12)$



$$2) \frac{1}{3^x+5} \leq \frac{1}{3^{x+1}-1}$$

$$\frac{1}{3^x+5} \leq \frac{1}{3^x \cdot 3^1 - 1}$$

Нехай $|t = 3^x \quad t > 0$

$$\frac{1}{t+5} \leq \frac{1}{3t-1}$$

$$\frac{1}{t+5} - \frac{1}{3t-1} \leq 0$$

$$\frac{3t-1-t-5}{(t+5)(3t-1)} \leq 0$$

$$\frac{2t-6}{(t+5)(3t-1)} \leq 0$$

1. ОДЗ:

$$(t+5)(3t-1) \neq 0$$

Врахуємо, що $t > 0$

$$t \neq -5$$

$$t \neq \frac{1}{3}$$

$$\text{Отже } |t < -5 \quad t > \frac{1}{3}$$

$$2. \text{ Нулі функції } f(x): \frac{2t-6}{(t+5)(3t-1)} = 0$$

$$2t - 6 = 0$$

$$2t = 6$$

$$t = 3$$

Так як знак нерівності «≤», оберемо проміжок $(-\infty; 3]$

Отже, розв'язок нерівності $t \in (\frac{1}{3}; 3]$

$$t = 3^x \quad t > \frac{1}{3} \quad t \leq 3 \quad | \Rightarrow \quad \frac{1}{3} < 3^x \leq 3$$

$$\frac{1}{3} < 3^x \leq 3$$

$$3^{-1} < 3^x \leq 3^1$$

|



$$\begin{matrix} -1 < x \leq 1 \\ (-1; 1] \end{matrix}$$

Більш зручний для розв'язку запис
нерівності $\frac{1}{3} < 3^x \leq 3$

За теоремою, розглянутою на уроці №5
Якщо $a > 1$ і $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, то $f(x) > g(x)$ і

Відповідь: $(-1; 1]$

№7

Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2 + 4x - 5) = -4$

2) $x + x = \frac{1}{\lg 5}$

Розв'язок:

1) $(x^2 + 4x - 5) = -4$

$x^2 + 4x - 5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$ (За означенням логарифма)

$x^2 + 4x - 5 = 16$

$x^2 + 4x - 21 = 0$

За теоремою Вієта $|x_1| = -7$ $x_2 = 3$

Відповідь: $-7; 3$

2) $x + x = \frac{1}{\lg 5}$

$\frac{x}{2} + x = \frac{1}{\frac{5}{10}}$

$\frac{x}{2} + x = 10$

Перейшли до логарифмів з основою 10

Так як $\frac{1}{\frac{5}{10}} = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 1 : \frac{1}{10} = 1 \cdot \frac{10}{1} = 10$

$x + x \cdot 2 = 10 \cdot 2$ (Помножили на 2)

$x(1 + 2) = 10 \cdot 2$

$x(5 + 2) = 10 \cdot 2$ (Так як $5 = 10$)

$x \cdot 10 = 10 \cdot 2$ (За теоремою про логарифм добутку, розглянутою на уроці №5)

$x = 2$ (Поділили обидві частини рівняння на 10)

$x = 2$

Відповідь: 2;

№8

Розв'яжіть нерівність:

1) $x > 1$

2) $(2x + 1) \geq -2$

3) $\lg(x^2 - x) \leq \lg(3x - 3)$

4) $(x^2 - 2x - 3) \leq (9 - x)$

Розв'язок:

$$1) \ x > 1$$

$$x > \frac{1}{3} \quad \left(\text{Так як } \frac{1}{3} = 1 \right)$$

$$\{x < \frac{1}{3} \mid x > 0\} \quad (\text{За теоремою, розглянутою на уроці №11 } f(x) > g(x) \mid 0 < a)$$

$$\{x < \frac{1}{3} \mid x > 0\} \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{3}$$

$$\text{Відповідь: } \left(0; \frac{1}{3}\right);$$

$$2) \ (2x + 1) \geq -2$$

$$(2x + 1) \geq 4 \quad (\text{Так як } 4 = -2)$$

$$\{2x + 1 \leq 4 \mid 2x + 1 > 0\} \quad (\text{За теоремою, розглянутою на уроці №11 } f(x) > g(x))$$

$$\{2x + 1 \leq 4 \mid 2x + 1 > 0\} \Rightarrow \{2x \leq 3 \mid 2x > -1\} \Rightarrow \{x \leq \frac{3}{2} \mid x > -\frac{1}{2}\} \Rightarrow \{x \leq 1,5 \mid x > -0,5\} \Rightarrow -0,5 < x \leq 1,5$$

$$\text{Відповідь: } (-0,5; 1,5]$$

$$3) \ \lg(x^2 - x) \leq \lg(3x - 3)$$

$$\{x^2 - x \leq 3x - 3 \mid x^2 - x > 0\} \quad (\text{За теоремою, розглянутою на уроці №11 } f(x))$$

$$\{x^2 - x - 3x + 3 \leq 0 \mid x^2 - x > 0\} \Rightarrow \{x^2 - 4x + 3 \leq 0 \mid x(x - 1) > 0\} \Rightarrow \{(x - 3)(x - 1) \leq 0 \mid x(x - 1) > 0\}$$

$$\{(x - 3)(x - 1) \leq 0\} \text{ Корені } |x_1 = 3 \mid x_2 = 1 \text{ Урахуємо, що це парабола і знак нерівності } \leq$$

$$\text{Відповідь: } (1; 3]$$

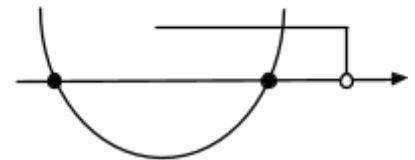
$$4) \ (x^2 - 2x - 3) \leq (9 - x)$$

$$\{x^2 - 2x - 3 \geq 9 - x \mid 9 - x > 0\} \quad (\text{За теоремою, розглянутою на уроці №11 } f(x))$$

$$\{x^2 - 3x - 12 \geq 0 \mid x < 9\}$$

$$\{x^2 - x - 12 \geq 0\} \text{ За теоремою Вієта } |x_1 = -3 \mid x_2 = 4 \text{ Урахуємо, що це парабола і знак нерівності } \geq | x < 9 \Rightarrow -3 \leq x < 4$$

$$\text{Відповідь: } (-\infty; -3] \cup [4; 9)$$



IV. Підсумок уроку

- Які рівняння називають логарифмічним?
- Які нерівності називаються найпростішими логарифмічними нерівностями?
- Чи існує логарифм від'ємного числа або нуля?

- Як розв'язати рівняння виду $f(x) = g(x)$?
- Як розв'язати найпростішу логарифмічну нерівність?
Наведіть приклад.
- Сформулюйте основну логарифмічну тотожність
- Сформулюйте основні властивості логарифмів
- Як розв'язувати більш складні логарифмічні рівняння? Чи можна дотримуватися якогось єдиного алгоритму?
- Як розв'язати нерівність типу $f(x) > g(x)$,
якщо $a > 1$?
- Як розв'язати нерівність типу $f(x) > g(x)$,
якщо $0 < a < 1$?
- Запишіть формулу переходу від однієї основи до іншої та наслідки з неї
- У чому полягає графічний спосіб розв'язування логарифмічних рівнянь?

V. Домашнє завдання

Повторити §1 (ст.20-37) Виконати № 4.8 (2,4,6); 4.10 (3); 4.16 (2,3,6); 4.18 (3,4); 7.2 (6); 7.4 (5,6); 7.8 (3); 7.10 (6)	Мерзляк А.Г.
Повторити §4-7 Виконати № 6.8 (3,4); 6.16 (2); 6.20 (2); 6.24 (3,4); 7.2 (3,4); 7.6 (3,4); 7.10 (2)	Істер О.С.
Повторити §3-5 Виконати № 5.1.2 (3,4); 5.1.4 (3,4); 5.1.6 (2,4); 5.2.1 (2,4); 5.2.3 (2,3); 5.2.4 (2,3); 5.2.5 (2,4)	Нелін Є.П.
Повторити §3-4 Виконати № 155 (б,г); 161 (а,г); 163 (б,г); 166 (б,г); 176 (в,б); 178 (б); 180 (а,в);	Бевз Г.П.