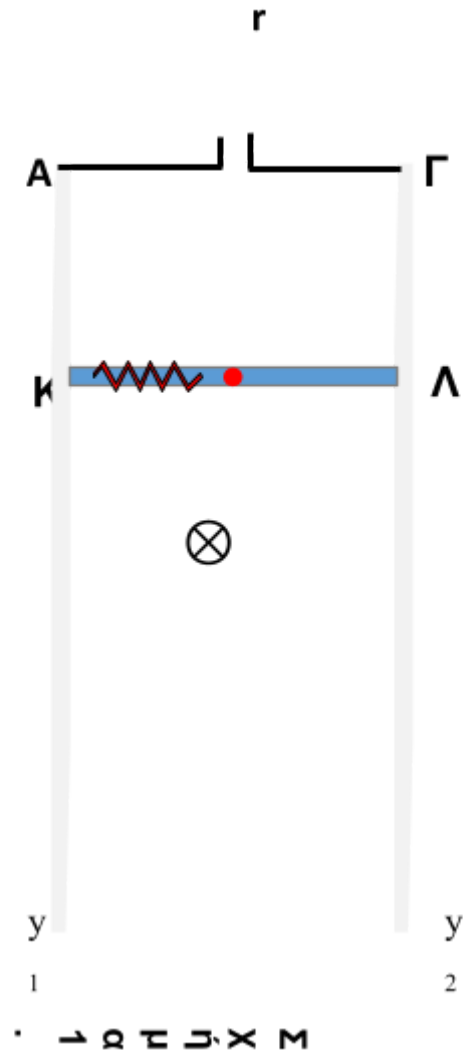


**Αυτεπαγωγή σε κυκλικό αγωγό**

Ένας ομογενής αγωγός ΚΛ μήκους  $\ell=25\text{cm}$ , μάζας  $m=10\text{g}$  και ωμικής αντίστασης  $R_{\text{ΚΛ}}=2\Omega$  βρίσκεται σε επαφή με δύο κατακόρυφους μεταλλικούς οδηγούς οδηγούς  $\text{Ay}_1$  και  $\text{Γy}_2$  που έχουν μηδενική ωμική αντίσταση. Ο αγωγός ΚΛ μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω στους κατακόρυφους μεταλλικούς οδηγούς, εφαπτόμενος διαρκώς σε αυτούς. Τα άκρα Α και Γ των μεταλλικών οδηγών είναι συνδεδεμένα με κυκλικό πλαίσιο. Το πλαίσιο έχει συνολική ωμική αντίσταση  $R_1=3\Omega$  και αποτελείται από  $N=200$  σπείρες ακτίνας  $r=1\text{cm}$ .

Στο χώρο των κατακόρυφων οδηγών υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$  μέτρου έντασης  $B=2\text{T}$ , κάθετο στο επίπεδο των αγωγών με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.

Αρχικά ο αγωγός ΚΛ συγκρατείται ακίνητος. (σχήμα 1)



i) Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής αυτεπαγωγής του κυκλικού πλαισίου

$$L_{\text{κυκλ.}} = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot \pi \cdot r}{2}$$

δίνεται από τη σχέση

δεχόμενοι την υπόθεση ότι το κυκλικό πλαίσιο έχει αρκετά μικρή ακτίνα, ώστε το μαγνητικό πεδίο μέσα στον βρόχο να αντιμετωπίζεται ως σταθερό και ίσο με την τιμή που έχει στο κέντρο του.

Κάποια στιγμή που θεωρούμε  $t_0=0$  αφήνουμε τον αγωγό ελεύθερο να κινηθεί.

Ο αγωγός ΚΛ αρχίζει να κατέρχεται παραμένοντας διαρκώς οριζόντιος και σε επαφή με τους κατακόρυφους μεταλλικούς οδηγούς  $\text{Ay}_1$  και  $\text{Γy}_2$  και κάποια χρονική στιγμή  $t_1$  αποκτά οριακή ταχύτητα.

ii) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της έντασης του ρεύματος τη στιγμή που αφήνουμε τον αγωγό ελεύθερο να κινηθεί.

iii) Να βρείτε το μέτρο της οριακής ταχύτητας  $v_{\text{ορ}}$ , που θα αποκτήσει ο αγωγός.

iv) Να γίνει ένα ποιοτικό διάγραμμα του μέτρου της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού πλαισίου σε όλη τη διάρκεια κίνησης του αγωγού ΚΛ.

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας  $g=10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , θεωρήστε  $\pi^2 \simeq 10$  και  $\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}\frac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}}$ .

### Απάντηση

i)

$$B_K = N \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I}{r} = \frac{N \cdot \mu_0 \cdot I}{2r}$$

$$\Phi = N \cdot B_K \cdot A \cdot \sin 0^\circ \rightarrow \Phi = N \cdot \frac{N \cdot \mu_0 \cdot I}{2r} \cdot \pi \cdot r^2 \rightarrow \Phi = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot I \cdot \pi \cdot r}{2}$$

$$|E_{\varepsilon\pi}| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot \pi \cdot r}{2} \frac{dI}{dt} = L_{\text{κυκλ.}} \cdot \frac{dI}{dt}$$

$$L_{\text{κυκλ.}} = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot \pi \cdot r}{2} = \frac{200^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \pi \cdot 10^{-2}}{2} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ H}$$

ii)

Τη στιγμή που αφήνουμε ελεύθερο τον αγωγό να κινηθεί η τάση από επαγωγή και το ρεύμα είναι μηδέν.

$$E_{\varepsilon\pi} = B \cdot v \cdot \ell = 0$$

Από το 2<sup>ο</sup> κανόνα Kirchhoff προκύπτει:

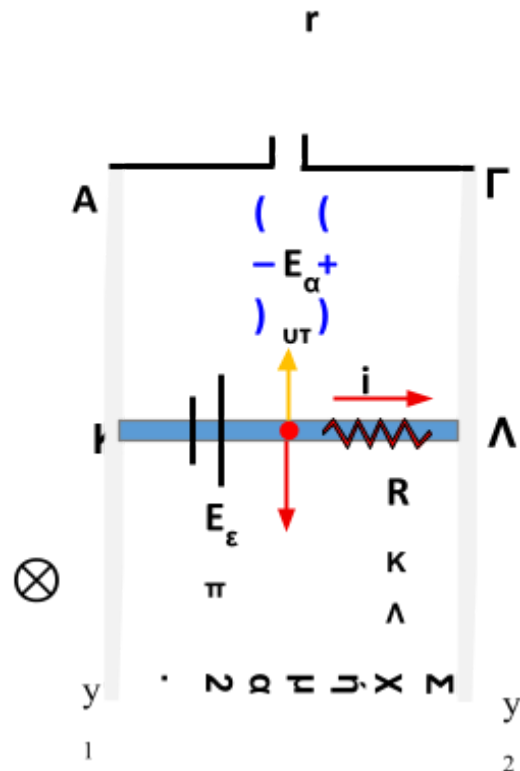
$$E_{\varepsilon\pi} - I \cdot R_{\text{ΚΛ}} - |E_{\text{αυτ}}| - iR_1 = 0 \rightarrow 0 - 0 -$$

$$|E_{\text{αυτ}}| - 0 = 0 \rightarrow E_{\text{αυτ}} = 0 \rightarrow L \frac{di}{dt} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{di}{dt} = 0$$

iii)

Κατά την πτώση του αγωγού εμφανίζεται στη ράβδο  $E_{\varepsilon\pi} = B \cdot v \cdot L$  με την πολικότητα που φαίνεται στο σχήμα 2 και αυτεπαγωγή στον κυκλικό πλαίσιο με τέτοια πολικότητα ώστε να αντιστέκεται στην αύξηση του ρεύματος σύμφωνα με τον κανόνα Lenz.



Από το 2<sup>ο</sup> κανόνα Κίρχοφ, για όσο χρόνο μεταβάλλεται το ρεύμα προκύπτει:

$$E_{\varepsilon\pi} - I R_{\text{ΚΛ}} - |E_{\text{αυτ}}| - iR_1 = 0 \rightarrow$$

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi} - |E_{\alpha\upsilon\tau}|}{R_{\phi\lambda} + R} \rightarrow I_{\varepsilon\pi} = \frac{Bv \cdot \ell - |E_{\alpha\upsilon\tau}|}{R}$$

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα θα καταλήξουμε ότι όταν οι δυνάμεις του βάρους και της δύναμης Laplace εξισωθούν ο αγωγός αποκτά οριακή ταχύτητα, το ρεύμα σταθεροποιείται και εξαλείφονται τα φαινόμενα αυτεπαγωγής.

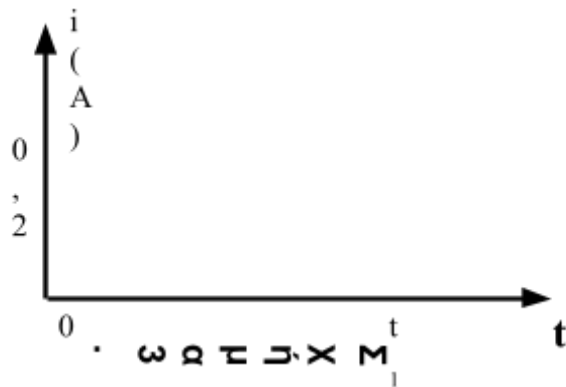
$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow w - F_L = 0 \Rightarrow$$

$$mg = BIL \Rightarrow mg = BL \frac{Bv_{op} \cdot L - |E_{\alpha\upsilon\tau}|}{R_{o\lambda}} \Rightarrow$$

$$v_{op} = \frac{mg \cdot R_{o\lambda}}{B^2 \ell^2} \quad \text{και} \quad I_{op} = \frac{Bv_{op} \cdot \ell}{R_{o\lambda}} \quad \text{ή} \quad I_{op} = mg/B \cdot \ell$$

$$R_{o\lambda} = R_1 + R_{KL} = 5 \, \Omega$$

Η οριακή ταχύτητα προκύπτει:



$$v_{op} = \frac{m \cdot g R_{o\lambda}}{B^2 \ell^2} = \frac{0,01 \cdot 10 \cdot 5}{2^2 \cdot 0,25^2} \rightarrow v_{op} = 2 \, m/s$$

ν) Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού πλαισίου δίνεται από τη

σχέση  $B = \mu_0 \frac{i}{2r} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-3} \cdot i \, (S.I.)$ . Συνεπώς όπως μεταβάλλεται το ρεύμα θα μεταβάλλεται και το μαγνητικό πεδίο.

Το ρεύμα αρχικά θα αυξάνεται μέχρι να αποκτήσει σταθερή τιμή. Προσοχή όμως την χρονική στιγμή μηδέν είναι  $I=0$  και  $E=0$  αφού η ράβδος ΚΛ είναι ακόμα ακίνητη και όπως υπολογίστηκε στο ερώτημα ii) και  $di/dt=0$  που σημαίνει ότι την  $t=0$  η κλίση του διαγράμματος θα είναι μηδενική.

### Σχόλια

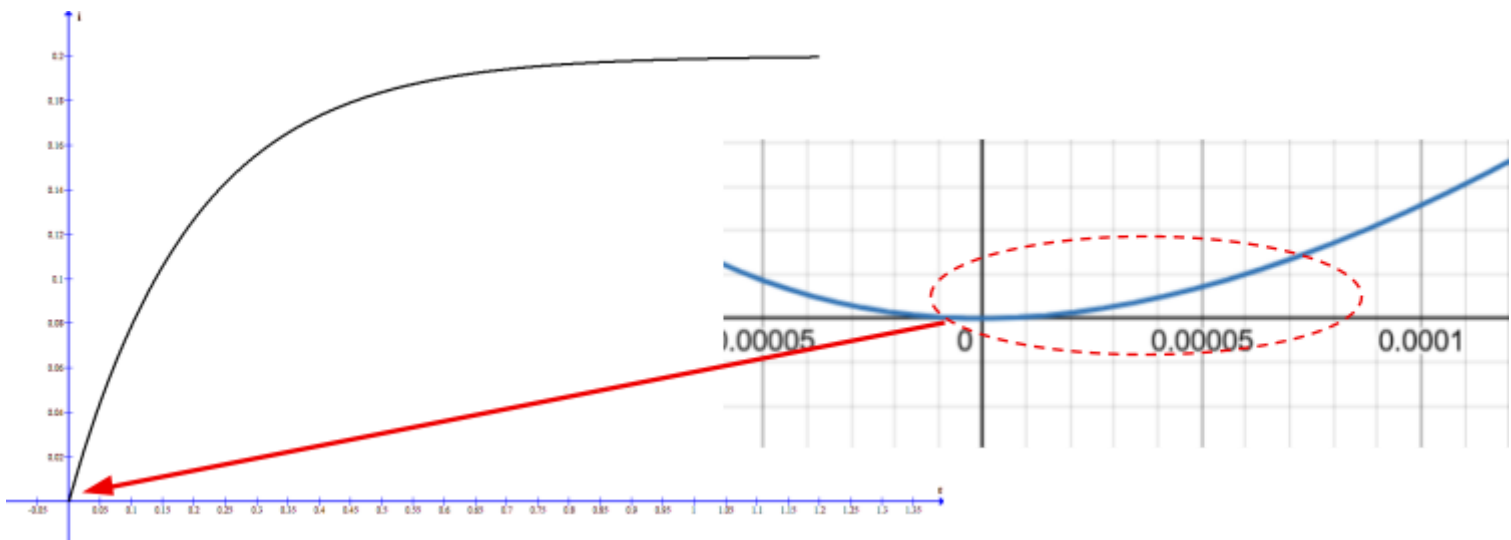
1. Ο συντελεστής του κυκλικού πλαισίου είναι μικρός και έτσι τα φαινόμενα αυτεπαγωγής είναι σχεδόν αμελητέα. Μάλιστα η μηδενική κλίση αρχικά δεν φαίνεται παρά μόνο με μεγάλη μεγέθυνση.

Για παράδειγμα την στιγμή 0,0212s το ρεύμα έχει τιμή  $i=0.02A$  το  $\frac{di}{dt} = 0.9008 A/s$

και από το δεύτερο κανόνα Κιρκοφ προκύπτει

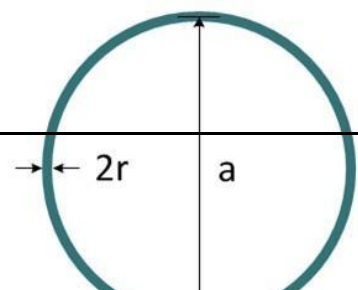
$$B \cdot v \cdot \ell - I \cdot R_{ολ} - |E_{αυτ}| = 0 \rightarrow 0,5v - 0,02 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 0,9008 = 0 \rightarrow 0,5v - 0,1 - 7,2064 \cdot 10^{-4} = 0 \rightarrow v = 0,2 + 14,4128 \cdot 10^{-4} = 0,20144128 \text{ m/s}$$

Αν δεν λαμβάναμε τα φαινόμενα της αυτεπαγωγής τότε η εξίσωση της ταχύτητας προκύπτει  $v = 2(1 - e^{-5t})$  και για την ίδια στιγμή προκύπτει  $v=0,2012 \text{ m/s}$ . Επομένως καλά κάνουμε και λαμβάνουμε τα φαινόμενα αυτεπαγωγής στα πηνία μιας και εκεί είναι πιο έντονα.



2. Η παραπάνω τιμή του συντελεστή αυτεπαγωγής που υπολογίστηκε στο ερώτημα i) για το κυκλικό

4



σύρμα είναι προσεγγιστική. Η πραγματική τιμή είναι η 
$$L = \mu_0 N^2 \alpha \left[ \ln \frac{8a}{r} - 2 \right]$$
, όπου  $a$  η διάμετρος του κυκλικού πλαισίου και  $2r$  η διάμετρος (πάχος) του σύρματος.

Στον ακόλουθο σύνδεσμο ο αναλυτικός υπολογισμός του συντελεστή αυτεπαγωγής  $L$  για κυκλικό πλαίσιο.

Και σε αυτόν τον σύνδεσμο δίνεται η δυνατότητα υπολογισμού του συντελεστή αυτεπαγωγής για διάφορες διατάξεις και χαρακτηριστικά αυτών.

<https://www.emissoftware.com/calculator/circular-loop/>