



TD N°7 : Mouvement d'un point matériel dans un champ de force centrale

Exercice 1

Une particule de masse m est soumise de la part du point O à une force d'attraction newtonienne $\vec{f} = -\frac{k}{r^2}\vec{u}$. Sa position initiale est un point M_0 , à la distance r_0 de O . Le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ est perpendiculaire à $\vec{OM}_0$ et de module v_0 . Discuter la nature de la trajectoire selon les valeurs du paramètre v_0 .

Exercice 2

Une particule de masse m est soumise à une interaction newtonienne de force $\vec{f} = -\frac{k}{r^2}\vec{u}$ de la part d'un point O . Trouver la relation qui lie son énergie E , la constante K , le paramètre p et l'excentricité e de sa trajectoire.

Exercice 3

Mouvement d'un satellite artificiel autour de la terre

Données numériques :

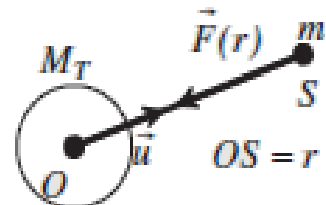
- Masse de la Terre $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg
- Rayon de la Terre $R_T = 6\,400$ km
- Constante de gravitation universelle $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N.m².kg⁻²
- Période de rotation de la Terre (dans le référentiel géocentrique) $T_o = 86\,164$ s

Correction

I. Force de gravitation et moment cinétique

1-

$$\vec{F}(r) = -G \frac{M_T m}{r^2} \vec{u}$$



2- Moment cinétique :

a-

$$\vec{L}_0 = \vec{OS} \wedge m \vec{v}$$

b-

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d\vec{OS}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{OS} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{OS} \wedge m\vec{a} = \vec{OS} \wedge m\vec{a}$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur la masse m étudiée dans le référentiel géocentrique galiléen et sachant que l'unique force est $\vec{F}(r)$, on obtient :

$m\vec{a} = \vec{F}(r)$ est donc :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{OS} \wedge \vec{F}(r) = \vec{M}_o(\vec{F})$$

Théorème du moment cinétique

c- $\vec{M}_o(\vec{F})$ est le moment de $\vec{F}(r)$ par rapport au point O . Dans le cas présent, la force a la même direction que le vecteur $\vec{OS}$ est donc le moment est nul $\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{0}$

d-

$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_0 = \vec{OS} \wedge m\vec{v} = \text{vecteur constant. A tout instant, } \vec{OS} \text{ et } \vec{v} \text{ sont des vecteurs perpendiculaires à un vecteur constant } \vec{L}_0$. Donc O , S et $\vec{v}$ reste dans un même plan

(contenant le centre des forces O et perpendiculaire au moment cinétique $\vec{L}_0$). $\vec{L}_0$ est constant au cours du temps et le mouvement du satellite s'effectue donc dans un plan contenant le centre des forces O et perpendiculaire au moment cinétique $\vec{L}_0$

II. Étude du mouvement du satellite

Le satellite est sur une **orbite circulaire** autour de la Terre à l'**altitude** h .

1) Référentiel géocentrique : origine le centre de la Terre et trois directions restant fixes par rapport au référentiel de Copernic. Le référentiel géocentrique (R) est donc en translation circulaire uniforme par rapport au référentiel galiléen de Copernic et n'est donc pas rigoureusement galiléen. Cependant, pour l'étude du mouvement du satellite il peut être considéré comme galiléen.

2) Montrer par les 3 différentes méthodes suivantes que le mouvement est uniforme :

a-

$$\delta W = \vec{F}(r) \cdot d\vec{l}. \text{ sur l'orbite circulaire, la force de gravitation } \vec{F}(r) = -G \frac{M_r m}{r^2} \vec{u}$$

est normale à la trajectoire alors que le déplacement élémentaire $d\vec{l} = dl \cdot \vec{u}_\theta$ est tangent à la trajectoire. On a donc :

$$\delta W = \vec{F}(r) \cdot d\vec{l} = 0$$

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre les instant t et $t + dt$ on a :

On a : $\delta W = dE_c = 0$, L'énergie cinétique ne varie pas donc la valeur de la vitesse est constante et le mouvement est uniforme.

b- $\vec{L}_0 = \vec{OS} \wedge m\vec{v}$. Sur une orbite circulaire de rayon $r = OS = \text{constante}$,

(Normale à la trajectoire) et (tangente à la trajectoire) sont 2 vecteurs orthogonaux.

On obtient donc : $\|\vec{L}_0\| = OS \cdot mv = mrv$. Le moment cinétique L_0 est une grandeur constante au cours du mouvement donc $mr v = \text{constante}$ soit $v = \text{constante}$ et le mouvement est uniforme.

c) Le vecteur accélération, dans le cas d'un mouvement circulaire, a pour expression

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2 \vec{u} + r\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique on obtient :

$$\vec{F}(r) = -G \frac{M_T m}{r^2} \vec{u} = m\vec{a} = -mr\dot{\theta}^2 \vec{u} + mr\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

La composante tangentielle de l'accélération (suivant $\vec{u}_\theta$) est donc nulle. Cela implique que l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ est nulle et que la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$ est constante. Le mouvement est uniforme.

On a : $\vec{v} = r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$ c'est-à-dire $v = r\dot{\theta} = r\omega$. Le rayon r et la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$ étant constant, v est constant.

1) d'après la réponse précédente, on a :

$$\vec{F}(r) = -G \frac{M_T m}{r^2} \vec{u} = m\vec{a} = -mr\dot{\theta}^2 \vec{u} = -\frac{mv^2}{r} \vec{u}$$

On en tire la relation :

$$G \frac{M_T m}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{g \frac{M_T}{r}} = \sqrt{g \frac{M_T}{R_T + h}}$$

2) Le satellite S.P.O.T. évolue à l'altitude $h = 832 \text{ km}$. Sa période de révolution T est donnée par le temps mis pour faire un tour c'est-à-dire : $T = 2\pi r/v$. En élevant au carré on

obtient

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{r^2}{v^2} = 4\pi^2 \frac{r^3}{GM_T} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM_T}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(6400+832)^3}{6,67 \cdot 10^{-24}}} = 6108,42 \text{ s}$$

Le satellite n'est pas géostationnaire. En effet, un satellite géostationnaire reste fixe par rapport à la Terre. Il tourne donc avec la même vitesse angulaire que la Terre dans

le référentiel géocentrique et à la même période $T_0 = 86164$ s.

5-

$T^2 = 4\pi^2 \frac{r^3}{v^2} = 4\pi^2 \frac{r^3}{GM_T}$ L'expression littérale de la constante de proportionnalité est donc :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

6) Pour le satellite géostationnaire la valeur de l'altitude sera :

$$r^3 = (R_T + h)^3 = \frac{GM_T T^2}{4\pi^2} \Rightarrow R_T + h = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 4,222 \cdot 10^7 \text{ m} = 42\,220 \text{ km}$$

soit une altitude de $42\,220 - 6\,400 = 35\,820$ km (environ 36 000 km)

III. Vitesse d'évasion d'un satellite.

1-

$$\delta W = \vec{F}(r) d\vec{r} = F(r) dr = - \frac{GM_T m}{r^2} dr = - d\left(-G \frac{M_T m}{r} \right) = - d(E_p)$$

$$\Rightarrow E_p = - \frac{GM_T m}{r} + c$$

$E_p(\infty) = 0$ alors $E_p = - \frac{GM_T m}{r}$

2-

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{R_T + h}$$

3-

$E = 0$ donne :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{R_T + h} = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T + h}}$$

Pour un corps à la surface de la terre ($h=0$) on a :

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11,18 \text{ km.s}^{-1}$$

Exercice 4 : Mouvement d'un point matériel dans un champ de gravitation.

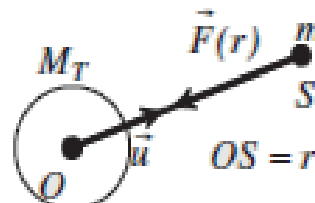
Etude énergétique.

Correction

1-

Force de gravitation et moment cinétique

$$\vec{f}(r) = -G \frac{M_T m}{r^2} \vec{u}$$



2- Moment cinétique :

$$\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{OM} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{OM} \wedge m\vec{a} = \vec{OM} \wedge m\vec{a}$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur la masse m étudiée dans le référentiel géocentrique galiléen et sachant que l'unique force est $\vec{f}(r)$, on obtient :

$m\vec{a} = \vec{f}(r)$ est donc :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{f}(r) = \vec{M}_O(\vec{F})$$

Théorème du moment cinétique

a- $\vec{M}_O(\vec{F})$ est le moment de $\vec{F}(r)$ par rapport au point O . Dans le cas présent, la force a la même direction que le vecteur $\vec{OM}$ est donc le moment est nul $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$

d- $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \text{vecteur constant}$. A tout instant, $\vec{OM}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs perpendiculaires à un vecteur constant. $\vec{L}_0$. Donc O , M et $\vec{v}$ reste dans un même plan (contenant le centre des forces O et perpendiculaire au moment cinétique $\vec{L}_0$).

$\vec{L}_0$ est constant au cours du temps et le mouvement du satellite s'effectue donc dans un plan contenant le centre des forces O et perpendiculaire au moment cinétique $\vec{L}_0$

3-

Moment cinétique et constant des aires.

$$a- \vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m \vec{v} = r \vec{u} \wedge m \left(\dot{r} \vec{u} + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \right) = mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z \Rightarrow L_0 = mr^2 \dot{\theta}$$

b- $C = r^2 \dot{\theta} = L_0 / m = \text{constante}$. Cette constante est homogène à une surface par unité de temps. En fait la surface balayée par unité de temps par le rayon $\vec{OM}$ correspond à $2C$

$$c- \vec{L}_0 = r_0 \vec{u} \wedge m \vec{v}_0 = mr_0 v_0 \sin \alpha \Rightarrow c = r_0 v_0 \sin \alpha$$

II. Étude énergétique

1-

$$\delta W = \vec{f}(r) \cdot d\vec{r} = f(r) dr = - G \frac{Mm}{r^2} dr = - d\left(G \frac{Mm}{r}\right) = - d(E_p)$$

$$\Rightarrow E_p = - G \frac{Mm}{r} + \text{cte avec } E_p(\infty) = 0 \text{ alors } E_p = - G \frac{Mm}{r}$$

2 -

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right] = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right)$$

3-

L'énergie mécanique

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right) + - \frac{k}{r}$$

Le système est conservatif car il subit uniquement une force conservative.
Cette énergie mécanique E est une constante

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E'(r) \text{ avec } E'(r) = - \frac{k}{r} + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2}$$

4-

L'énergie mécanique

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{k}{r_0} \quad \text{Correspond à l'état initial en fonction}$$

III. Étude de l'énergie potentielle effective $E'(r)$: États liés, États de diffusion.

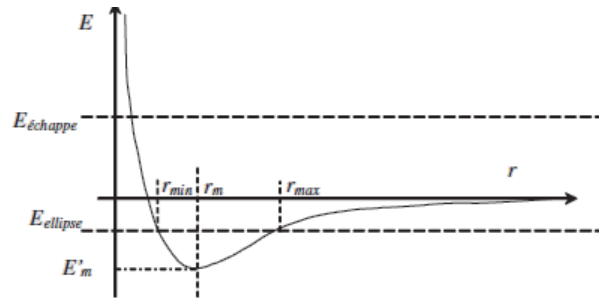
1-

$$\frac{dE'}{dr} = \frac{k}{r^2} - \frac{mC^2}{2r^3} = \frac{1}{r^2} \left[k - \frac{mC^2}{2r} \right] \Rightarrow \frac{dE'}{dr} = 0 \Rightarrow r_m = \frac{mC^2}{K} = \frac{m(r_0 v_0 \sin \alpha_0)^2}{K}$$

$$E'_m = - \frac{K^2}{mC^2} + \frac{K^2}{2mC^2} = - \frac{K^2}{mC^2} = - \frac{K^2}{2m(r_0 v_0 \sin \alpha_0)^2}$$

2-

$E(r \rightarrow 0) \rightarrow \infty$ et $E(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0^-$



3) Si $E > 0$ alors r peut varier de 0 à l'infini. Si $E < 0$ alors r peut varier entre 2 valeurs r_{min} et r_{max} (la masse décrit une ellipse). La masse reste prisonnière du centre de force. Pour $E = 0$: valeur limite pour échapper à l'attraction de O .

4) Lorsque $E = E'_m$ alors $r = r_m$ et donc la masse décrit un cercle

5) **Applications :**

a-

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{k}{r_0} \geq 0, \text{ la valeur minimale de la vitesse est : } V_{om} = \left(\frac{2K}{mr_0} \right)^{1/2}$$

b- Vitesse de libération V_{LT} de la gravitation de la Terre pour un objet se trouvant à la surface de la Terre : $K = GMm = m \cdot 4 \cdot 10^{14}$ donc :

$$V_{LT} = \left(\frac{2K}{mR_T} \right)^{1/2} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$V_{LT} = \left(\frac{2GM}{R_T} \right)^{1/2} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$