НИУ ИТМО

Факультет ПиИКТ

Вычислительная математика

Лабораторная работа № 3

Численное интегрирование

Вариант № **12**

Работу выполнил: Полошков Борис

Группа: P3213

Преподаватель: Малышева Татьяна Алексеевна

Санкт-Петербург

2022 г.

Цель работы: найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

<u>Обязательное задание (до 80 баллов)</u>

Исходные данные:

1. Пользователь выбирает функцию, интеграл которой требуется вычислить (3-5 функций), из тех, которые предлагает программа.
2. Пределы интегрирования задаются пользователем.
3. Точность вычисления задается пользователем.
4. Начальное значение числа разбиения интервала интегрирования: n=4.
5. Ввод исходных данных осуществляется с клавиатуры.

Программная реализация задачи:

1. Реализовать в программе методы по выбору пользователя, исходя из варианта:
   - Метод прямоугольников (3 модификации: левые, правые, средние)
   - Метод трапеций
   - Метод Симпсона
2. Методы должны быть оформлены в виде отдельной(ого) функции/класса.
3. Вычисление значений функции оформить в виде отдельной(ого) функции/класса.
4. Для оценки погрешности и завершения вычислительного процесса использовать правило Рунге.
5. Предусмотреть вывод результатов: значение интеграла, число разбиения интервала интегрирования для достижения требуемой точности.

Вычислительная реализация задачи:

1. Вычислить интеграл, приведенный в таблице 1 (столбец 3), точно.
2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при $n = 6$.
3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при $n = 6$.
4. Сравнить результаты с точным значением интеграла.
5. Определить относительную погрешность вычислений.
6. В отчете ***отразить последовательные вычисления***.

Вычислительная реализация

$$\int_1^2 (x^3 + 2x^2 - 3x - 12)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 12x\,[1,\ 2] = -\frac{97}{12} \sim -8.033$$

Формула Ньютона-Котеса

n	Коэффициенты Котеса c_n^i			
1	$c_1^0 = c_1^1 = \frac{b-a}{2}$			
2	$c_2^0 = c_2^2 = \frac{b-a}{6}$,	$c_2^1 = \frac{4(b-a)}{6}$		
3	$c_3^0 = c_3^3 = \frac{b-a}{8}$,	$c_3^1 = c_3^2 = \frac{3(b-a)}{8}$		
4	$c_4^0 = c_4^4 = \frac{7(b-a)}{90}$,	$c_4^1 = c_4^3 = \frac{16(b-a)}{45}$,	$c_4^2 = \frac{2(b-a)}{15}$	
5	$c_5^0 = c_5^5 = \frac{19(b-a)}{288}$,	$c_5^1 = c_5^4 = \frac{25(b-a)}{96}$,	$c_5^2 = c_5^3 = \frac{25(b-a)}{144}$	
6	$c_6^0 = c_6^6 = \frac{41(b-a)}{840}$,	$c_6^1 = c_6^5 = \frac{9(b-a)}{35}$,	$c_6^2 = c_6^4 = \frac{9(b-a)}{280}$,	$c_6^3 = \frac{34(b-a)}{105}$

N = 6 => h = 1/6

$$\int_1^2 (x^3 + 2x^2 - 3x - 12)dx = f(1) * c^0_6 + f(7/6) * c^1_6 + f(8/6) * c^2_6 + f(9/6) * c^3_6 + f(10/6) * c^4_6 + f(11/6) * c^5_6 + f(2) * c^6_6 = -7.986$$

Ошибка составила 0.047

Относительная погрешность: 0.5%

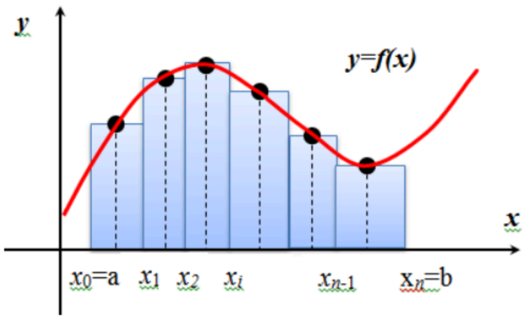
Формула средних прямоугольников:

Метод прямоугольников. Метод средних

Для аналитически заданных функций более точным является использование значений в средних точках элементарных отрезков (полуцелых узлах):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} h_i\, f(x_{i-1/2})$$

$$x_{i-1/2} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-1} + \frac{h_i}{2}, i = 1, 2, \ldots n$$



При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = const$:

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2})$$

$\int_1^2 (x^3 + 2x^2 - 3x - 12)dx = 1/6 * (f(1 + 1/12) + f(1 + 3/12) + f(1 + 5/12) + f(1 + 7/12) + f(1 + 9/12) + f(1 + 11/12) = -8.098$

Ошибка составила 0.065

Относительная погрешность: 0.8%

Формула трапеций:

Метод трапеций

Подынтегральную функцию на каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ заменяют интерполяционным многочленом первой степени:

$$f(x) \approx \varphi_i(x) = a_i x + b$$

Используют линейную интерполяцию, т.е. график функции $y = f(x)$ представляется в виде ломаной, соединяющий точки (x_i, y_i) . Площадь всей фигуры (криволинейной трапеции):

$$S_{\text{общ}} = S_1 + S_2 + \dots + S_n = \frac{y_0 + y_1}{2} h_1 + \frac{y_1 + y_2}{2} h_2 + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h_n$$

$$y_0 = f(a), \qquad y_n = f(b), \qquad y_i = f(x_i), \qquad h_i = x_i - x_{i-1}$$

Складывая все эти равенства, получаем формулу трапеций для численного интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i(y_{i-1} + y_i)$$

$$\int_1^2 (x^3 + 2x^2 - 3x - 12)dx = 1/2 * 1/6 * (f(1) + f(7/6) + f(7/6) + f(8/6) + f(8/6) + f(9/6) + f(9/6) + f(10/6) + f(10/6) + f(11/6) + f(11/6) + f(2)) = -8.053$$

Ошибка составила 0.02

Относительная погрешность: 0.2%

Формула Симпсона:

Формула Симпсона

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{3}}\left[\left(\boldsymbol{y_0} + \boldsymbol{4}(\boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{y_3} + \dots + \boldsymbol{y_{n-1}}) + \boldsymbol{2}(\boldsymbol{y_2} + \boldsymbol{y_4} + \dots + \boldsymbol{y_{n-2}}) + \boldsymbol{y_n}\right)\right]$$

$\int_1^2 (x^3 + 2x^2 - 3x - 12)dx$ = 1/18 * (f(1) + f(2) + 4 * (f(7/6) + f(9/6) + f(11/6)) + 2 * (f(8/6) + f(10/6)) = -9.44

Ошибка составила 1.407

Относительная погрешность: 17%

Программная реализация

```
package solver.rectangle;

import solver.IntegralSolver;

import java.util.function.Function;

public class RectangleMethod implements IntegralSolver {

   private final RectangleMethodType type;
   private RectangleYValueFunction yValueFunction;

   public RectangleMethod(RectangleMethodType type) {
       this.type = type;
       switch (type) {
           case RECTANGLE_LEFT -> yValueFunction = (f, xStart, xEnd) ->
(f.apply(xStart));
           case RECTANGLE_MIDDLE -> yValueFunction = (f, xStart, xEnd) ->
(f.apply((xEnd + xStart) * 0.5));
           case RECTANGLE_RIGHT -> yValueFunction = (f, xStart, xEnd) ->
(f.apply(xEnd));
       }
   }

   @Override
   public double calculate(Function<Double, Double> f, double a, double b, int
n) {
       if (b < a) throw new IllegalArgumentException("b < a");
       final double h = (b - a) / n;
       double xCurrent = a;
       double xNext = a + h;
       double sum = 0;

       for (int i = 0; i < n; i++) {
```

```java
            double y_n = yValueFunction.y_n(f, xCurrent, xNext);
            sum += h * y_n;
            xCurrent = xNext;
            xNext += h;
        }
        return sum;
    }

    @Override
    public String toString() {
        return "Rectangle method (" + type.name() + ")";
    }

    @FunctionalInterface
    interface RectangleYValueFunction {
        double y_n(Function<Double, Double> f, double xStart, double xEnd);
    }
}
```

```java
package solver.simpson;

import solver.IntegralSolver;

import java.util.function.Function;
import java.util.stream.IntStream;

public class SimpsonMethod implements IntegralSolver {
    @Override
    public double calculate(Function<Double, Double> f, double a, double b, int
n) {
        if (b < a) throw new IllegalArgumentException("b < a");
        final double h = (b - a) / n;
        double xLeft = a;
        double xRight = xLeft + h;
        double xMid = (xLeft + xRight) / 2;
        double[] yValues = new double[2 * n + 1];
        yValues[0] = f.apply(xLeft);
        yValues[1] = f.apply(xMid);
        yValues[2] = f.apply(xRight);
        for (int i = 1; i < n; i++) {
            yValues[i * 2 + 1] = f.apply(xMid);
            yValues[i * 2 + 2] = f.apply(xRight);
            xLeft = xRight;
            xRight += h;
            xMid = (xLeft + xRight) / 2;
        }
        double sumOdds = IntStream.range(1, n*2).filter(x -> x % 2 ==
1).mapToDouble(x -> yValues[x]).sum();
        double sumEvens = IntStream.range(2, n*2 - 1).filter(x -> x % 2 ==
0).mapToDouble(x -> yValues[x]).sum();
```

```
        return (h / 6) * (yValues[0] + 4 * sumOdds + 2 * sumEvens +
yValues[n*2]);

    }

    @Override
    public String toString() {
        return "Simpson Method";
    }
}
```

Пример работы программы

```
Enter required accuracy (default = 0.0001)
0.01
Choose a function to integrate:
1. x^2
2. x^3
3. sin(x)
4. x^3 + 2x^2 - 3x - 12
4
Choose a solve method:
Rectangle method (RECTANGLE_LEFT)
Rectangle method (RECTANGLE_MIDDLE)
Rectangle method (RECTANGLE_RIGHT)
Simpson Method
4
Enter integration range (two numbers separated with space)
1 2
Result info:
    answer: -8.08334287006634    sectors: 1048576    error: 9.53671269598999E-6

Process finished with exit code 0
```

Вывод

В ходе данной лабораторной работы были изучены несколько методов для численного интегрирования. Все методы просты в программной реализации и быстро вычисляют интегралы с хорошей точностью.