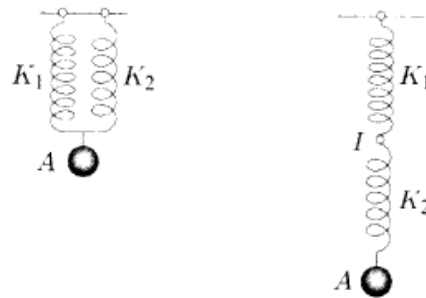




Correction Td N°7 : Oscillateur harmonique

Exercice 1

Correction



- 1) Nous considérons le système constitué des deux ressorts. Si l'on exerce une force de tension $\vec{T}$ sur les deux ressorts, ils s'allongent de Δl . On en conclut que si $\vec{u}_x$ est un vecteur unitaire dans la direction verticale de l'allongement, alors

$$\vec{T} = - (k_1 + k_2) \Delta l \vec{u}_x$$

La constante de raideur de ces deux ressorts est donc $k_1 + k_2$. Si l'on attache une masse m aux deux ressorts cette masse sera soumise à :

- son poids $\vec{P}$
- la tension $\vec{T}$

À l'équilibre le poids $\vec{P}$ compense la tension $\vec{T}$ et l'allongement des deux ressorts vérifie :

$$mg \vec{u}_x - (k_1 + k_2) \Delta l \vec{u}_x = \vec{0}$$

On en déduit que le ressort équivalent à ces deux ressorts placés en parallèle a une raideur k vérifiant $k = k_1 + k_2$.

Pour une position hors équilibre quelconque de la masse m et en prenant comme origine de l'axe des x la position d'équilibre de la masse m , le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse m conduit à :

$$mg \vec{u}_x - (k_1 + k_2) \Delta l \vec{u}_x = m \ddot{x} \vec{u}_x$$

qui, compte tenu de la condition d'équilibre, entraîne :

$$(m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x)\vec{u}_x = \vec{0}$$

Le vecteur $\vec{u}_x$ étant un vecteur unitaire cette équation devient $(m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x) = 0$ ce qui est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de période propre T ,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

2) Dans ce cas la tension des deux ressorts est la même mais leur allongement Δl est différent. Nous avons donc :

$$\vec{T}_1 = -k_1 \Delta l_1 \vec{u}_x \text{ et } \vec{T}_2 = -k_2 \Delta l_2 \vec{u}_x$$

À l'équilibre, sous l'action de la masse m , nous avons :

$$mg \vec{u}_x - k_2 \Delta l_{20} \vec{u}_x = mg \vec{i} - k_1 \Delta l_{10} \vec{u}_x = \vec{0}$$

Nous déduisons que l'allongement total pris par les deux ressorts mis bout à bout est :

$$\Delta l_{20} + \Delta l_{10} = mg \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$$

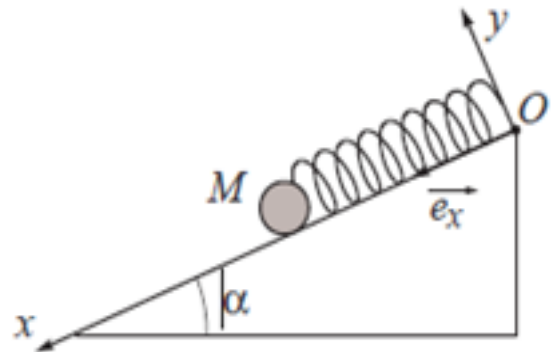
Un ressort unique équivalent à ces deux ressorts

s'allongerait de $\Delta l_0 = mg/k$, ce qui permet

d'affirmer que l'on peut remplacer les deux ressorts par un ressort de raideur k vérifiant :

$1/k = 1/k_1 + 1/k_2$ La période d'oscillation de la masse est donc

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$$



Exercice 2 Ressort incliné

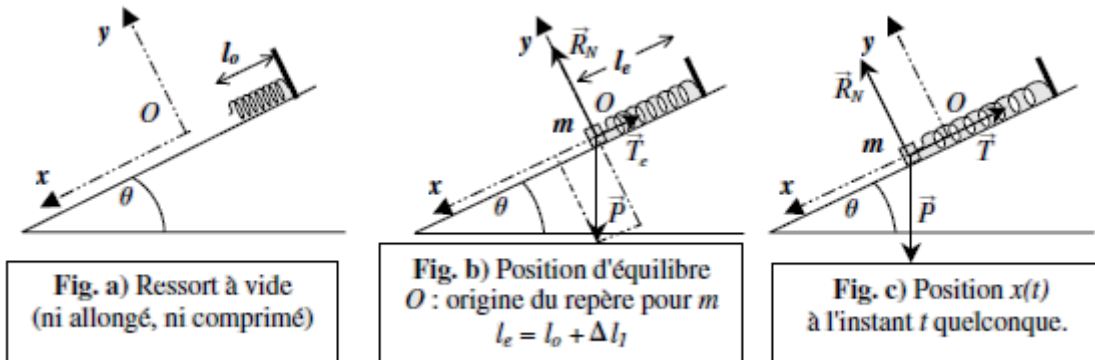
Soit un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 , dont les extrémités sont reliées à un point fixe O d'un plan incliné et à un point matériel M de masse m .

Nous posons $OM = x$ et nous supposons qu'il n'existe pas de frottements de glissement sur le plan incliné.

1) Déterminer x_e à l'équilibre.

2) A partir de la position d'équilibre, M est déplacé de D et relâché sans vitesse initiale. Exprimer x en fonction de t .

Correction



1) Système : la masse m ; Référentiel terrestre considéré galiléen,

Forces : poids $\vec{P}$

Réaction normale du support $\vec{R}_n$ pas de frottement et la tension du ressort $\vec{T}$

Condition d'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}_n = \vec{0}$$

Repère (O, x, y) :

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg\sin\theta \vec{u}_x - mg\cos\theta \vec{u}_y; \quad \vec{R}_n = R_n \vec{u}_y; \quad \text{et} \quad \vec{T} = -k\Delta l_1 \vec{u}_x$$

Projection sur Ox :

$$mg\sin\theta - k\Delta l_1 = 0 \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{mg\sin\theta}{k} = 0,05m = 5cm$$

2-

II. La masse m est en mouvement (fig. c)

On tire sur la masse de $x = X_0 = 5\text{ cm}$ et on la lâche, à l'instant $t = 0$, sans vitesse initiale.

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}_n = m\vec{a}$$

En projetant sur ox :

$$mg\sin\theta - k(\Delta l_1 + x) = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m} = 10 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,628s$$

Solution de l'équation est donnée par :

$$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Exercice 3 : Deux oscillateurs

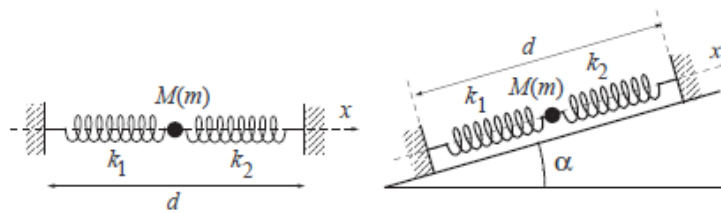
Une masse m est susceptible de se déplacer sans frottements sur un axe horizontal. Elle est soumise à l'action de 2 ressorts de même longueur à vide $l_0 = 20$ cm et de constantes de raideur différentes k_1 et k_2 .

On donne : $m = 4$ kg ; $k_1 = 100$ N.m⁻¹ ; $k_2 = 300$ N.m⁻¹ et $d = 60$ cm.

1) Déterminer les longueurs des 2 ressorts à l'équilibre.

2) On écarte la masse m d'une distance a_0 à partir de sa position d'équilibre. Déterminer l'équation différentielle du mouvement en prenant la position d'équilibre comme origine des abscisses. Calculer les périodes des oscillations. Donner l'expression de l'énergie mécanique de la masse.

3) Les ressorts sont tendus le long d'un plan incliné de $\alpha = 30^\circ$ avec l'horizontale → mêmes questions.



Réponse :

$$l_1 = \frac{(k_1 - k_2)l_0 + k_2 d}{k_1 k_2} = 35 \text{ cm}$$

$$l_2 = d - l_1 = 25 \text{ cm}$$

2-D'après l'exercice précédent on trouve l'équation de mouvement

$$\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m} x = 0$$

Avec

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

$$\text{Et } E_m = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)a_0^2$$

3-

$$l_1 = \frac{(k_1 - k_2)l_0 + k_2 d - mgsin\alpha}{k_1 k_2} = 34,95 \text{ cm}$$

Et

$l_2 = d - l_1 = 25,05 \text{ cm}$ pour le reste, les résultats sont identiques à la situation précédente

Exercice 4 : Oscillateur harmonique amorti

On considère un oscillateur harmonique amorti de pulsation propre $\omega_0 = 100 \text{ rad.s}^{-1}$ et de facteur de qualité $Q = 10$; la masse $m = 100 \text{ g}$ de cet oscillateur est lâchée avec un écart à la position d'équilibre de $x_0 = 10 \text{ cm}$ sans vitesse initiale.

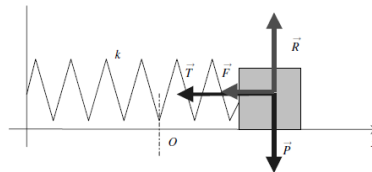
1) Calculer : a) la pseudo-période ; b) le décrément logarithmique ; c) l'amplitude des oscillations au bout de 2, 5 et 10 pseudo-périodes ; d) l'énergie mécanique initiale ; e) l'énergie mécanique au bout de 2, 5 et 10 pseudo-périodes.

2) déterminer le nombre de pseudo-périodes au bout desquelles l'amplitude des oscillations est divisées par 17.

Réponse

Rappel

Nous considérons un pendule élastique horizontal subissant une force de frottement visqueux du type $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$. Nous étudions le système masse m dans le référentiel galiléen $R(O, x, t)$. Les forces extérieures appliquées sont le poids $\vec{P}$, la force de frottement $\vec{F}$; la tension du ressort $\vec{T}$ et la réaction du support $\vec{R}$ (figure 7).



Représentation d'un pendule élastique horizontal soumis à une force de frottement visqueux.

L'application de la R.F.D. conduit à :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{F} = m \vec{a}_{M/R}$$

$$\vec{P} \Big| \frac{0}{-mg} \quad \vec{T} \Big| \frac{-kx}{0} \quad \vec{R} \Big| \frac{0}{R} \quad \vec{F} \Big| \frac{-\alpha \dot{x}}{0} \quad \vec{a} \Big| \frac{\ddot{x}}{0}$$

En projection sur l'axe des x il vient :

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (4)$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire du deuxième degré.

Posons $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $2\lambda = \frac{\alpha}{m}$ l'équation 4 devient :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire du deuxième degré

Equation caractéristique :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \quad (5)$$

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$$

La solution $x(t)$ et la nature du mouvement de déplacement dépendent du signe de Δ' de l'équation caractéristique.

Mouvement oscillatoire faiblement amorti : frottement faible

$\Delta' < 0$: frottement faible

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 < 0 \Rightarrow \lambda < \omega$$

Posons $\Omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$ l'équation (5) à deux racines complexe qui sont :

$$r_1 = -\lambda + i\Omega \quad \text{et} \quad r_2 = -\lambda - i\Omega$$

Et par suite l'équation (4) à pour solution

$$x(t) = X_1 e^{r_1 t} + X_2 e^{r_2 t} = e^{-\lambda t} [X_1 e^{i\Omega t} + X_2 e^{-i\Omega t}] \quad (6)$$

X_1 et X_2 sont déterminées à partir des conditions initiales. On peut démontrer que l'équation 1 peut s'écrire :

$$x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\Omega t - \varphi) \quad (7)$$

A et φ sont déterminées à partir des conditions initiales.

$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$: pseudo-pulsation et on définit la pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\Omega}$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \quad \text{pseudo - période}$$

Il est toujours plus grand que la période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}}}$$

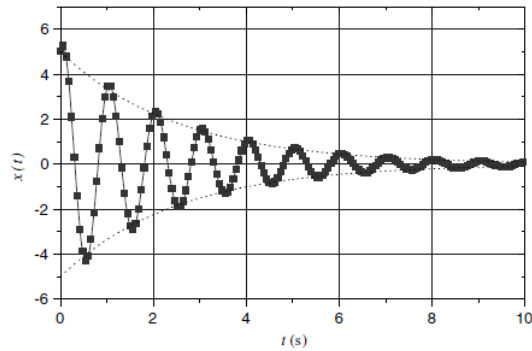
On définit le facteur de qualité

$$Q = \frac{m}{\alpha} \omega_0 = \frac{m}{\alpha} \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = \frac{m}{\alpha} \frac{2\pi}{Q}$$

A.N= on trouve la valeur de la pseudo-période

$$T = 62,9 \text{ ms}$$

L'allure de la courbe de l'équation (7) est enveloppée par les exponentielles $A e^{-\lambda t}$ et $A e^{\lambda t}$



Mouvement d'un oscillateur amorti par frottement fluide dans le cas d'un amortissement faible. L'amplitude des oscillations décroît de façon exponentielle (traits pointillés).

cas $\Delta' < 0$: C'est un mouvement pseudopériodique : oscillation faiblement amorti par frottement faible de coefficient de frottement λ

Décrément logarithmique

La détermination du coefficient de viscosité α peut se faire expérimentalement à partir de la courbe $x(t)$ en utilisant le **décrément logarithmique δ** . Cette quantité est obtenue en considérant le logarithme du rapport des amplitudes des oscillations au bout des temps nT et $(n-1)T$. À ces instants nous avons :

$$\frac{x(nT)}{x((n-1)T)} = e^{-\lambda T}$$

Le décrément logarithmique du mouvement est la quantité :

$$\delta = \lambda T = \log \frac{x(nT)}{x((n-1)T)} \quad \text{avec } \lambda = \frac{\alpha}{2m}$$

A.N

$$\delta = 0,314$$

c-

$$x_2 = 5,34 \text{ cm}, x_5 = 2,08 \text{ cm}, x_{10} = 0,43 \text{ cm} ;$$

d-

$$E_m(t=0) = 5 \text{ J}$$

$$E_m(t=2T) = 1,42 \text{ J}$$

$$E_m(t=5T) = 0,22 \text{ J}, E_m(t=10T) = 0,01 \text{ J}$$

2- $n=9$

Exercice 5. Oscillateur harmonique amorti

On ne néglige plus le frottement fluide, exercé sur le point matériel M élastiquement lié, qui se traduit par une force $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ ($\alpha > 0$)

a- Montrer que l'équation du mouvement se met sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

x étant l'abscisse de M par rapport à l'équilibre, et Q un facteur que l'on précisera.

- b- Dans le cas d'un faible amortissement caractérisé par $Q \gg 1$, déterminer l'expression de $x(t)$. Sachant qu'au communiqué au point matériel initialement à l'équilibre une vitesse

$$\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$$

- c- Quelle est alors la relation entre le facteur Q et le décrement logarithmique δ ?
 d- On pose $X = \frac{\omega_0}{v_0}$ et $u = \frac{t}{T_0}$, T_0 étant la période propre du mouvement. Tracer l'allure du graphe de $X(u)$, lorsque $Q = 10$, pour $0 \leq u \leq 5$. Retrouver graphiquement la valeur de δ .

Réponse

1-

L'application de la R.F.D. conduit à :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{F} = m \vec{a}_{M/R}$$

$$\vec{P} \left| \begin{smallmatrix} 0 \\ -mg \end{smallmatrix} \right. \quad \vec{T} \left| \begin{smallmatrix} -kx \\ 0 \end{smallmatrix} \right. \quad \vec{R} \left| \begin{smallmatrix} 0 \\ R \end{smallmatrix} \right. \quad \vec{F} \left| \begin{smallmatrix} -\alpha \dot{x} \\ 0 \end{smallmatrix} \right. \quad \vec{a} \left| \begin{smallmatrix} \ddot{x} \\ 0 \end{smallmatrix} \right.$$

En projection sur l'axe des x il vient :

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (4)$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire du deuxième degré.

Posons $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $Q = \frac{m}{\alpha}\omega_0$ l'équation 4 devient :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire du deuxième degré
 b-

Mouvement oscillatoire faiblement amorti : frottement faible

$\Delta' < 0$: **frottement faible**

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 < 0 \Rightarrow \lambda < \omega$$

Posons $\Omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$ l'équation (5) à deux racines complexe qui sont :

$$r_1 = -\lambda + i\Omega \quad \text{et} \quad r_2 = -\lambda - i\Omega$$

Et par suite l'équation (4) à pour solution

$$x(t) = X_1 e^{r_1 t} + X_2 e^{r_2 t} = e^{-\lambda t} \left[X_1 e^{i\Omega t} + X_2 e^{-i\Omega t} \right] \quad (6)$$

X_1 et X_2 sont déterminées à partir des conditions initiales. On peut démontrer que l'équation 1 peut s'écrire :

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\Omega t - \varphi) \quad (7)$$

A et φ sont déterminées à partir des conditions initiales.

$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$: pseudo-pulsation et on définit la pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\Omega}$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \quad \text{pseudo - période}$$

Il est toujours plus grand que la période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}}}$$

En tenant compte des conditions initiales

At = 0 $x(0) = A \cos \varphi = 0$ implique que $\varphi = \frac{\pi}{2}$

At = $x'(0) = -\lambda e^{-\lambda t} \cos(\Omega t - \varphi) - \Omega A e^{-\lambda t} \sin(\Omega t - \varphi) = v_0 \Rightarrow A = \frac{v_0}{\Omega}$

Et par suit

$$x(t) = \frac{v_0}{\Omega} e^{-\lambda t} \sin(\Omega t)$$

Décrément logarithmique

La détermination du coefficient de viscosité α peut se faire expérimentalement à partir de la

courbe $x(t)$ en utilisant le **décrément logarithmique δ** . Cette quantité est obtenue en considérant le logarithme du rapport des amplitudes des oscillations au bout des temps nT et $(n-1)T$. À ces instants nous avons :

$$\frac{x(nT)}{x((n-1)T)} = e^{-\lambda T}$$

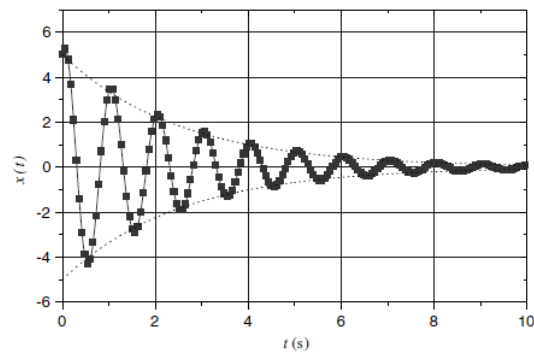
Le décrément logarithmique du mouvement est la quantité :

$$\delta = \lambda T = \log \frac{x(nT)}{x((n-1)T)} \quad \text{avec } \lambda = \frac{\alpha}{2m}$$

$$Q = \frac{m}{\alpha} \omega_0 = \frac{1}{2\lambda} \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{\delta} \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{Q}$$

$$\delta = \frac{\pi}{Q}$$

c- l'allure de la courbe $x(t)$ est donnée par



Exercice 6 : Oscillateur harmonique amorti

Un point matériel M (masse m), attaché à un ressort horizontal (raideur k , longueur l_0 au repos), est suspendu à un fil inextensible de longueur L . On considère des petits mouvements quasi horizontaux du point M, repéré par son abscisse x telle que $x \ll L$. En outre le point matériel M, de vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_x$, est soumis à l'action d'une force de frottement fluide

$$\vec{F} = -\alpha\vec{v} \ (\alpha > 0).$$

1. Montrer que l'équation différentielle du mouvement de M peut se mettre sous la forme suivante :

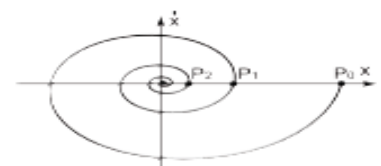
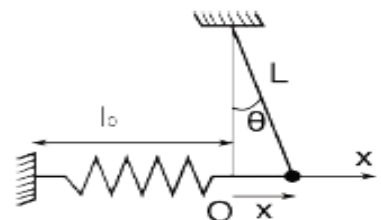
$$\ddot{x} + 2\lambda\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0.$$

Identifier les paramètres λ , ω_0 et préciser la dimension de λ .

2. La trajectoire de phase de cet oscillateur est représentée ci-contre. On note P_0 le point initial de phase (à $t = 0$) et $OP_0 = x_0$. Quelle est la nature du régime de variation de $x(t)$?

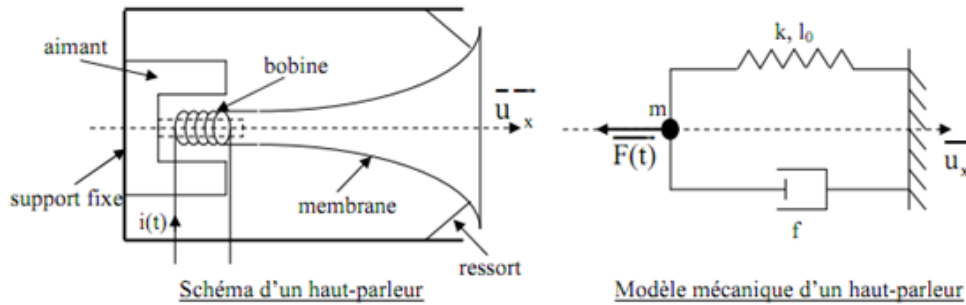
3. Déterminer l'expression de $x(t)$, en tenant compte des conditions initiales.

4. Trouver la valeur du paramètre λ à partir de la trajectoire de phase de la figure ci-contre en comparant $x_0 = OP_0$ et $x_2 = OP_2$.



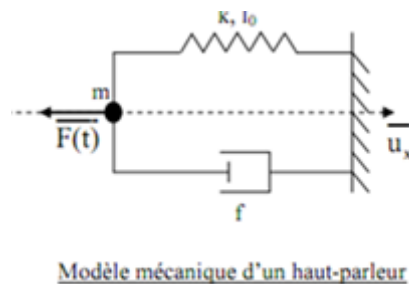
Réponses : 1) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{g}{L}}$, $\lambda = \frac{\alpha}{2m\omega_0}$, s^{-1} ; 3) $x(t) = Ae^{-\lambda\omega_0 t} \cos(\omega t + \varphi)$, $A = x_0 \sqrt{1 + \frac{\lambda^2 \omega_0^2}{\omega^2}}$, $\varphi = -\arctan \frac{\lambda\omega_0}{\omega}$; 4) $\lambda = \frac{\ln \frac{x_0}{x_2}}{\sqrt{16\pi^2 + (\ln \frac{x_0}{x_2})^2}}$

Exercice 7 : Modélisation d'un haut-parleur



Correction

Le haut parleur peut être assimilé à la figure suivante :



Dans le référentiel galiléen $R(O, x, t)$.

Les forces extérieures appliquées sont la force de frottement $\vec{F}_f$; la tension du ressort $\vec{T}$ et la force excitatrice $\vec{F} = ki(t)$

Représentation d'un pendule élastique horizontal soumis à une force de frottement visqueux.

L'application de la R.F.D. conduit à :

$$\vec{T} + \vec{F}_f + \vec{F} = m\vec{a}_{M/R}$$

$$\vec{T} \left| \frac{-kx}{0} \right. \quad \vec{F}_f \left| \frac{-\alpha \dot{x}}{0} \right. \quad \vec{a} \left| \frac{\ddot{x}}{0} \right. \quad \vec{F} \left| \frac{Kx}{0} \right.$$

En projection sur l'axe des x il vient :

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha \dot{x} + F \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F}{m}$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F}{m} = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Equation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti entretenu (forcée)

Posons

$$2\lambda = \frac{\alpha}{m} \text{ et posons } Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$$

L'équation devient

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F}{m}$$

2-

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{m\omega_0}{2\lambda} = \frac{\sqrt{km}}{2\lambda}$$

A.N le coefficient de frottement

On trouve $\lambda = 17,3 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$

3-

En régime forcée (voir cours) la solution de l'équation différentielle est donnée par :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

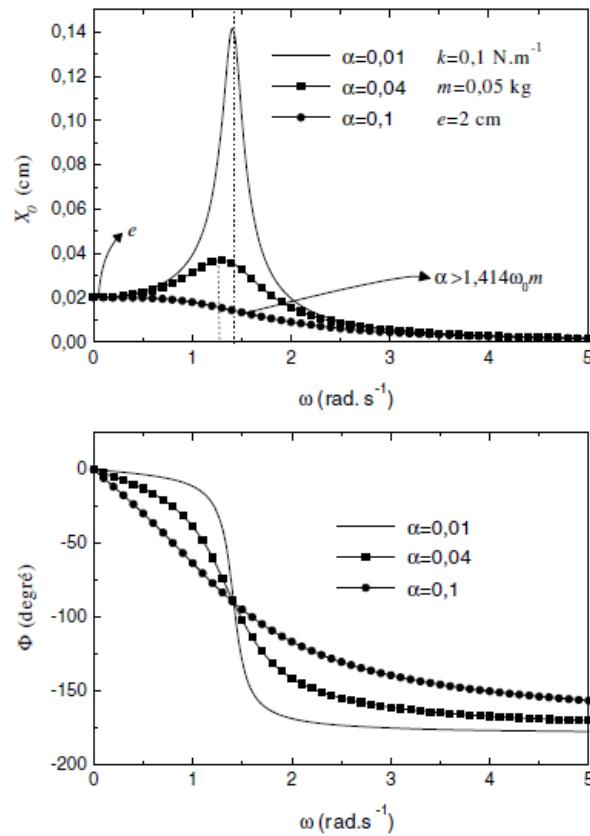
En utilisant la représentation complexe dans l'équation différentielle on peut déduire la valeur de X_m et φ

On trouve que

$$X_m(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m\omega_0^2}}{\sqrt{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2} \right]}}$$

Et

$$\varphi(\omega) = - \operatorname{artg} \frac{\frac{\omega\omega_0}{Q}}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}} = - \operatorname{artg} \frac{\omega\omega_0}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)}$$



A.N

$\omega = 6\,280 \text{ rad.s}^{-1}$, $\omega_0 = 1225 \text{ rad.s}^{-1}$, $X_m = 0.5 \text{ mm}$ et $\varphi = -2.86 \text{ rad}$

Soit $x(t) = 0.5 \cdot 10^{-3} \cos(6280t - 2.86)$ en (m).

4-

La bande passante

On définit la bande passante l'intervalle de fréquence $(\omega_1 - \omega_2)$ tel que :

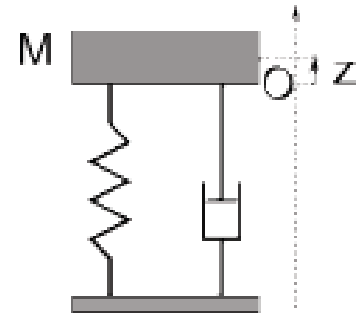
$$X_m(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}} = \frac{X_m(\omega_r)}{\sqrt{2}}$$

On trouve (voir cours) la bande passante est définie par

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{\omega_0}{Q}$$

Exercice 8 : Etude d'une suspension de la voiture.

La suspension d'une voiture de masse à vide M est constituée d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 et d'un amortisseur exerçant sur la voiture une force de frottement $\vec{F} = -b\vec{v}$ ($b > 0$) ou $\vec{v}$ est la vitesse verticale de la voiture et b un coefficient de frottement fluide. On ne s'intéresse qu'au mouvement de translation vertical de la voiture, qu'on assimile à un point matériel confondu avec son centre d'inertie et dont la position est repérée par la cote $z(t)$ sur un axe vertical ascendant (Oz). On note g l'intensité du champ de pesanteur. À l'instant $t = 0$, la voiture est en équilibre et la cote z est nulle.



1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ lorsque la voiture à vide est en mouvement.
2. Quelle doit être l'expression de b en fonction de k et M pour que le régime d'amortissement des oscillations soit critique (voiture à vide) ?

On considère maintenant que la voiture contient quatre passagers d'une masse totale m .

3. Exprimer l'équation du mouvement du système {voiture + passagers}.
4. Quel est le type de régime d'amortissement ? Exprimer la pseudo-période T du mouvement du système.
5. Pour qu'une voiture soit confortable, il faut que les oscillations résultant d'un défaut de la route aient une période adaptée à l'organisme humain, comme par exemple la période de marche qui vaut environ 1 s. Calculer la raideur k du ressort sachant que $M = 1500$ kg et $m = 300$ kg.

Correction

- L'équation horaire de mouvement est définie par (voir cours)

$$-kz - bv = m\ddot{z}$$

Soit

$$\ddot{z} + \frac{b}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = 0$$

Equation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti libre posons

$$\frac{b}{m} = 2\lambda \text{ et } \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

Soit

$$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$$

Régime critique

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \omega_0$$

En régime critique

$$\lambda = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{b}{2m} \Rightarrow b = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km}$$

2-

L a masse totale cette fois est $m+M$ et l'équation horaire de mouvement est donnée par

$$\ddot{z} + \frac{b}{m+M}\dot{z} + \frac{k}{m+M}z = 0$$

Posons

$$\frac{b}{m+M} = 2\lambda \text{ et } \frac{k}{m+M} = \omega_0^2$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{km}}{m+M} \Rightarrow \lambda^2 = \frac{km}{(m+M)^2} \text{ et } \omega_0^2 = \frac{k}{m+M} \Rightarrow \lambda < \omega_0$$

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 < 0 \Rightarrow \text{régime pseudo - periodique}$$

Mouvement oscillatoire faiblement amorti : frottement faible

$\Delta' < 0$: frottement faible

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 < 0 \Rightarrow \lambda < \omega_0$$

Posons $\Omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$ l'équation (5) à deux racines complexe qui sont :

$$r_1 = -\lambda + i\Omega \text{ et } r_2 = -\lambda - i\Omega$$

Et par suite l'équation (4) a pour solution

$$x(t) = X_1 e^{r_1 t} + X_2 e^{r_2 t} = e^{-\lambda t} [X_1 e^{i\Omega t} + X_2 e^{-i\Omega t}] \quad (6)$$

X_1 et X_2 sont déterminées à partir des conditions initiales. On peut démontrer que l'équation 1 peut s'écrire :

$$x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\Omega t - \varphi) \quad (7)$$

A et φ sont déterminées à partir des conditions initiales.

$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$: pseudo-pulsation et on définit la pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\Omega}$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \text{ pseudo - période}$$

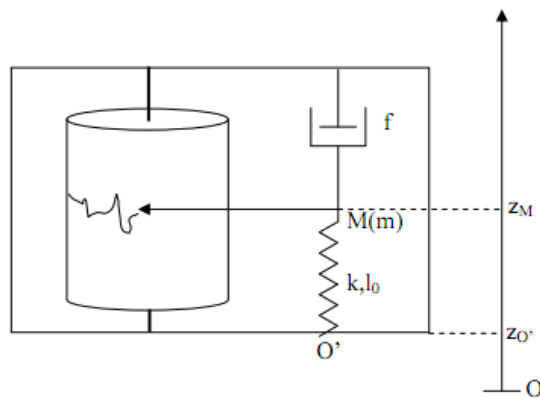
Il est toujours plus grand que la période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}}}$$

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{m}{m+M}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m+M}{k(1 - \frac{m}{m+M})}} = \frac{2\pi(m+M)}{\sqrt{km}}$$

$$k = \frac{4\pi^2(m+M)^2}{m}$$

Exercice 9 : Un sismographe



Correction

On définit le repère $R(O, X, Y, Z)$ repère galiléen fixe et $R'(O', X', Y', Z')$ repère mobile liée au socle.

En absence de secousse (pas de tremblement de terre) :

Le référentiel R' liée au socle sera immobile R' sera aussi un référentiel galiléen

Etude de mouvement en absence de secousse on aura :

$$-kz' - \alpha \dot{z}' = m\ddot{z}'$$

Soit

$$\ddot{z}' + \frac{\alpha}{m}\dot{z}' + \frac{k}{m}z' = 0$$

Equation différentiel d'un oscillateur harmonique amorti libre

En présence de secousses le repère liée à la terre n'est plus fixe c'est un repère en mouvement par rapport à un référentiel galiléen et on aura

L'équation dans le référentiel galiléen devient :

$$-kz' - \alpha \dot{z}' = m\ddot{z}' + ma_e$$

Avec

a_e l'accélération d'entraînement

$$a_e = \frac{d^2 o o'}{dt^2} = a \Omega^2 \cos \Omega t$$

Et on aura

$$-kz' - \alpha \dot{z}' = m \ddot{z}' + m a \Omega^2 \cos \Omega t$$

Donc l'équation horaire devient :

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = a \Omega^2 \cos \Omega t$$

Equation différentiel d'un oscillateur harmonique entretenu (forcé)

En régime permanent (forcé)

La solution de l'équation est donnée par

$$z(t) = z_m \cos(\Omega t + \varphi)$$

En utilisant la représentation complexe dans l'équation différentielle on peut déduire la valeur de z_m et φ

On trouve que

$$z_m(\Omega) = \frac{\frac{a \Omega^2}{m \omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}}$$

Et

$$\varphi(\Omega) = - \operatorname{artg} \frac{\frac{\Omega \omega_0}{Q}}{\sqrt{\omega_0^2 - \Omega^2}} = - \operatorname{artg} \frac{\Omega \omega_0}{Q(\omega_0^2 - \Omega^2)}$$

