Zadanie 1. (0–3)

Sklep AGD prowadzi sprzedaż wysyłkową pralek. Prawdopodobieństwo uszkodzenia podczas transportu pralki wysłanej przez ten sklep do klienta jest równe $0{,}02$.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że spośród 10 pralek wysłanych dziesięciu klientom przez ten sklep co najwyżej jedna ulegnie uszkodzeniu podczas transportu. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części tysięcznych. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0–3)

Wykaż, że jeżeli $a = \log_2 14$ oraz $b = \log_{\sqrt{2}} 27$, to $\log_7 54 = \dfrac{b+2}{2a-2}$.

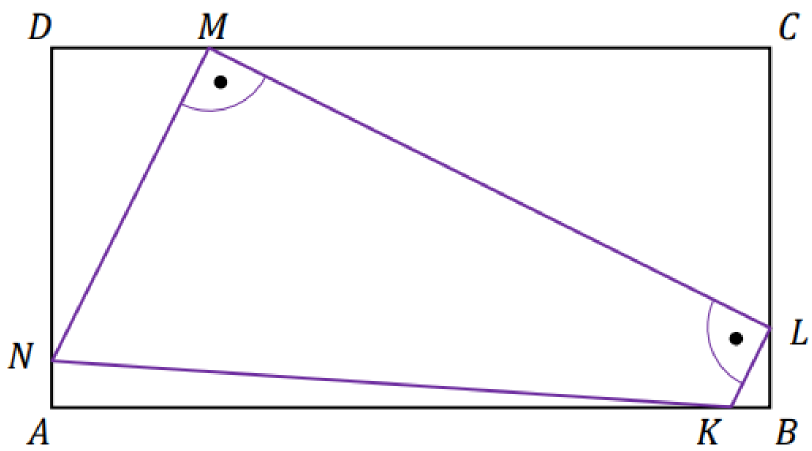
Zadanie 3. (0–3)

Rozważamy wszystkie liczby naturalne sześciocyfrowe, w których zapisie dziesiętnym iloczyn cyfr jest liczbą parzystą mniejszą od 5.

Oblicz, ile jest wszystkich takich liczb sześciocyfrowych. Zapisz obliczenia.

Zadanie 4. (0–3)

Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 2 \cdot |AD|$. Na bokach AB, BC, CD oraz DA tego prostokąta obrano punkty – odpowiednio – K, L, M oraz N (przy czym każdy z tych punktów leży na dokładnie jednym boku prostokąta $ABCD$). Czworokąt $KLMN$ jest trapezem prostokątnym (zobacz rysunek), a wysokość LM tego trapezu jest równoległa do przekątnej BD prostokąta.



Wykaż, że stosunek pola trójkąta MDN do pola trójkąta KBL jest równy 16.

Zadanie 5. (0–4)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 , x_2 spełniające warunek

$$m(x_1^2 + x_2^2) = 3m \cdot x_1 \cdot x_2 + 2$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$\cos(2x) + 2\cos^2(3x) + \cos(4x) = 0$$

w przedziale $[0, \pi]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0–4)

Na czworokącie wypukłym $ABCD$ o bokach długości: $|AB| = 3$, $|BC| = 3$, $|CD| = 5$ oraz $|DA| = 8$, opisano okrąg.

Oblicz promień tego okręgu. Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0–4)

Wielomian f zmiennej rzeczywistej x jest określony wzorem $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Liczba (-2) jest miejscem zerowym tego wielomianu. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) styczna do wykresu wielomianu f w punkcie A o pierwszej współrzędnej równej (-2) przecina ten wykres w punkcie $P = (1, 9)$.

Wyznacz wzór wielomianu f. Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0–5)

Ciąg (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest arytmetyczny i rosnący. W tym ciągu $a_6 = 15$ oraz $a_{15} = a_3 \cdot (a_8 - 6)$.
Ciąg (b_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest geometryczny i $b_1 = a_{11}$ oraz $b_2 = a_6$.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (b_n). Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0–5)

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny $ABCD$ o podstawie ABC. Płaszczyzna zawierająca krawędź AB podstawy i prostopadła do krawędzi bocznej CD przecina tę krawędź w punkcie E, przy czym $\frac{|CE|}{|DE|} = \frac{3}{11}$.

Oblicz stosunek pola powierzchni całkowitej tego ostrosłupa do pola podstawy ABC. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0–6)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest równoległobok $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-8, -1)$ i $D = (-13, 9)$ oraz środku symetrii $M = \left(-\frac{9}{2}, 1\right)$. Okrąg $\mathcal{O}$ przechodzi przez początek tego układu i jest styczny do prostych zawierających boki AB i BC tego równoległoboku. Druga współrzędna środka okręgu $\mathcal{O}$ jest liczbą ujemną.

Wyznacz równanie okręgu $\mathcal{O}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12.

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o polu powierzchni całkowitej równym $24\sqrt{3}$.

Zadanie 12.1. (0–2)

Wykaż, że objętość V graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy jest określona wzorem

$$\boldsymbol{V(a) = 6a - \frac{1}{8}a^3}$$

Zadanie 12.2. (0–4)

Objętość V graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy jest określona wzorem

$$V(a) = 6a - \frac{1}{8}a^3$$

dla $a \in \left(0, 4\sqrt{3}\right)$.

Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozważanych graniastosłupów, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość. Zapisz obliczenia.