

Тема: Тотожні перетворення логарифмічних виразів

Посилання

на

підручник:

<https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-11-klas-2019/13-matematyka-11-klas/merzlyak-ag-matematyka-algebra-i-poch-analizu-ta-geometriya-riven-standartu-11-kl.pdf>

Матеріали по темі:

Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1. $\frac{\log_3 64}{\log_3 2} + \frac{\log_5 9}{\log_5 3}$	А. 7
2. $\frac{\log_4 625}{\log_4 5} + \frac{\log_7 128}{\log_7 2}$	Б. 8
3. $\frac{\log_5 49}{\log_5 7} + \frac{\log_3 \frac{1}{16}}{\log_3 \frac{1}{2}}$	В. 9
4. $\frac{\lg 125}{\lg 5} + \frac{\log_3 16}{\log_3 2}$	Г. 6
	Д. 11

Розв'язування: Заданий тип логарифмів спрощують методом перетворення чисел в логарифмах чисельнику до тих, що містяться в логарифмах у знаменнику.

$$\frac{\log_3 64}{\log_3 2} + \frac{\log_5 9}{\log_5 3} = \frac{\log_3 2^6}{\log_3 2} + \frac{\log_5 3^2}{\log_5 3} =$$

$$= \frac{6\log_3 2}{\log_3 2} + \frac{2\log_5 3}{\log_5 3} = 6 + 2 = 8$$

1 - Б.

$$\frac{\log_4 625}{\log_4 5} + \frac{\log_7 128}{\log_7 2} = \frac{\log_4 5^4}{\log_4 5} + \frac{\log_7 2^7}{\log_7 2} =$$

$$= \frac{4\log_4 5}{\log_4 5} + \frac{7\log_7 2}{\log_7 2} = 4 + 7 = 11$$

2 - Д.

$$\frac{\log_5 49}{\log_5 7} + \frac{\log_3 \frac{1}{16}}{\log_3 \frac{1}{2}} = \frac{\log_5 7^2}{\log_5 7} + \frac{\log_3 \left(\frac{1}{2}\right)^4}{\log_3 \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{2\log_5 7}{\log_5 7} + \frac{4\log_3 \frac{1}{2}}{\log_3 \frac{1}{2}} = 2 + 4 = 6$$

3 - Г.

$$\frac{\lg 125}{\lg 5} + \frac{\log_3 16}{\log_3 2} = \frac{\lg 5^3}{\lg 5} + \frac{\log_3 2^4}{\log_3 2} =$$

$$= \frac{3\lg 5}{\lg 5} + \frac{4\log_3 2}{\log_3 2} = 3 + 4 = 7$$

4 - А.

Обчислення не складні і нам дещо дивно, як такі завдання на ЗНО тестах йдуть одні з останніх та за їх обчислення нараховують високі оцінки.

Приклад 6.31 Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

- | | |
|-----------------------------------|---------|
| 1. $\log_3 7 \cdot \log_{49} 81$ | А. 1,25 |
| 2. $\log_5 8 \cdot \log_{16} 125$ | Б. 1,5 |
| 3. $\log_9 1000 \cdot \lg 3$ | В. 1,75 |
| 4. $\log_{81} 128 \cdot \log_2 3$ | Г. 2 |
| | Д. 2,25 |

Розв'язування: Маємо 4 варіанти тесту, в кожному завданні є **добутки логарифмів в яких попарно основа другого логарифма є числом першого логарифма в певному показнику, і число другого в другому логарифмі рівне основі першого в певному степені.**

Тому спершу працюємо з показниками, а далі пригадуємо **співвідношення для переходу до іншої основи в логарифмі:**

$$\log_a b = 1 / \log_b a.$$

Знаючи цю властивість логарифма без проблем виконуємо наступні обчислення:

$$\begin{aligned}\log_3 7 \cdot \log_{49} 81 &= \frac{1}{\log_7 3} \cdot \log_{7^2} 3^4 = \\ &= \frac{1}{\log_7 3} \cdot \frac{4}{2} \log_7 3 = \frac{\log_7 3}{\log_7 3} \cdot \frac{4}{2} = 1 \cdot 2 = 2\end{aligned}$$

1 - Г.

$$\begin{aligned}\log_5 8 \cdot \log_{16} 125 &= \log_5 2^3 \cdot \log_{2^4} 5^3 = \\ &= 3 \log_5 2 \cdot \frac{3}{4} \log_2 5 = 3 \cdot \frac{1}{\log_2 5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \log_2 5 = \frac{9}{4} = 2,25\end{aligned}$$

2 - Д.

$$\begin{aligned}\log_9 1000 \cdot \lg 3 &= \log_{3^2} 10^3 \cdot \frac{1}{\log_3 10} = \\ &= \frac{3}{2} \log_3 10 \cdot \frac{1}{\log_3 10} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\log_3 10}{\log_3 10} = \frac{3}{2} = 1,5\end{aligned}$$

3 - Б.

$$\begin{aligned}\log_{81} 128 \cdot \log_2 3 &= \log_{3^4} 2^7 \cdot \frac{1}{\log_3 2} = \\ &= \frac{7}{4} \log_3 2 \cdot \frac{1}{\log_3 2} = \frac{7}{4} \cdot \frac{\log_3 2}{\log_3 2} = \frac{7}{4} = 1,75\end{aligned}$$

4 - В.

Приклад 6.32 Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1. $\log_8 6 \cdot \log_6 5 \cdot \log_5 4$
2. $\log_{14} 8 \cdot \log_{15} 14 \cdot \log_{16} 15$
3. $\log_7 5 \cdot \log_5 4 \cdot \log_3 27$
4. $\lg 2 \cdot \log_{11} 10 \cdot \log_{128} 11$

- А. 5/8
Б. 1/7
В. 2/3
Г. 3/4
Д. 2/5

Розв'язування: Необхідно спростити добутки трьох логарифмів з різними основами. Для цього в другому та третьому логарифмі переходимо до основи першого логарифма, і так для всіх 4 завдань тесту.
Алгоритм застосовуйте для спрощення усіх завдань де задані добутки

логарифмів з не рівними між собою основами.

$$\log_8 6 \cdot \log_6 5 \cdot \log_5 4 = \frac{\log_8 6}{1} \cdot \frac{\log_8 5}{\log_8 6} \cdot \frac{\log_8 4}{\log_8 5} =$$

1 - В.

$$= \log_8 4 = \log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3} \log_2 2 = \frac{2}{3}$$

$$\log_{14} 8 \cdot \log_{15} 14 \cdot \log_{16} 15 = \frac{1}{\log_8 14} \cdot \frac{\log_8 14}{\log_8 15} \cdot \frac{\log_8 15}{\log_8 16} =$$

2 - Г.

$$= \frac{1}{\log_8 16} = \frac{1}{\log_{2^3} 2^4} = \frac{1}{\frac{4}{3} \log_2 2} = \frac{3}{4}$$

$$\log_7 5 \cdot \log_5 4 \cdot \log_{32} 7 = \frac{\log_2 5}{\log_2 7} \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 7}{\log_2 32} =$$

3 - Д.

$$= \frac{\log_2 4}{\log_2 32} = \frac{\log_2 2^2}{\log_2 2^5} = \frac{2 \log_2 2}{5 \log_2 2} = \frac{2}{5}$$

$$\lg 2 \cdot \log_{11} 10 \cdot \log_{128} 11 = \frac{\log_2 2}{\log_2 10} \cdot \frac{\log_2 10}{\log_2 11} \cdot \frac{\log_2 11}{\log_2 128} =$$

4 - Б.

$$= \frac{\log_2 2}{\log_2 128} = \frac{\log_2 2}{\log_2 2^7} = \frac{\log_2 2}{7 \log_2 2} = \frac{1}{7}$$

Приклад 6.33 $\log_2 2 = a$, $\log_3 3 = b$. Установити відповідність між логарифмами чисел (1–4) та їх вираженням через a та b (А–Д).

1. $\log_7 1,5$	А. $\frac{1}{a+b}$
2. $\log_7 4,5$	Б. $\frac{2b}{a}$
3. $\log_6 7$	В. $2b - a$
4. $\log_2 9$	Г. $\frac{1}{a-b}$
	Д. $b - a$

Розв'язування: Спростуємо вирази за допомогою формул суми логарифмів та різниці:

$$\log_7 1,5 = \log_7 \frac{3}{2} = \log_7 3 - \log_7 2 = b - a \quad 1 - \text{Д.}$$

$$\begin{aligned} \log_7 4,5 &= \log_7 \frac{9}{2} = \log_7 9 - \log_7 2 = \\ &= \log_7 3^2 - \log_7 2 = 2\log_7 3 - \log_7 2 = 2b - a \end{aligned} \quad 2 - \text{Б.}$$

$$\begin{aligned} \log_6 7 &= \frac{1}{\log_7 6} = \frac{1}{\log_7 (2 \cdot 3)} = \\ &= \frac{1}{\log_7 2 + \log_7 3} = \frac{1}{a + b} \end{aligned} \quad 3 - \text{А.}$$

$$\log_2 9 = \frac{\log_7 9}{\log_7 2} = \frac{\log_7 3^2}{\log_7 2} = \frac{2\log_7 3}{\log_7 2} = \frac{2b}{a} \quad 4 - \text{Б.}$$

Наведені приклади на практиці є повторенням найпоширеніших властивостей логарифма, вчіть їх із запропонованих пояснень.

Приклад 6.34 $\log_a b = 5$. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1. $\log_{ab} a$	А. 5,5
2. $\log_{ab} b$	Б. 3
3. $\log_b \sqrt{ab}$	В. $\frac{5}{6}$
4. $\log_a \sqrt{ab}$	Г. 0,6
	Д. $\frac{1}{6}$

Розв'язування: Тестові завдання на перетворення виразів виконуємо за допомогою правила переходу до другої основи під логарифмом

$$\log_a b = \log_c b / \log_c a$$

та розписання логарифму добутку через суму логарифмів

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c.$$

Детально перетворення наведені далі

$$\log_{ab} a = \frac{\log_a a}{\log_a ab} = \frac{1}{\log_a a + \log_a b} = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6} \quad 1 - \text{Д.}$$

$$\log_{ab} b = \frac{\log_a b}{\log_a ab} = \frac{\log_a b}{\log_a a + \log_a b} = \frac{5}{1+5} = \frac{5}{6} \quad 2 - \text{В.}$$

$$\begin{aligned} \log_b \sqrt{ab} &= \frac{\log_a \sqrt{ab}}{\log_a b} = \frac{\log_a (\sqrt{ab})^{\frac{1}{2}}}{\log_a b} = \frac{\frac{1}{2} \log_a ab}{\log_a b} = \\ &= \frac{\log_a ab}{2 \log_a b} = \frac{\log_a a + \log_a b}{2 \log_a b} = \frac{1+5}{2 \cdot 5} = \frac{6}{10} = 0,6 \quad 3 - \text{Г.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_a \sqrt{ab} &= \frac{\log_a \sqrt{ab}}{\log_a a} = \frac{\log_a (\sqrt{ab})^{\frac{1}{2}}}{1} = \frac{1}{2} \log_a ab = \\ &= \frac{\log_a ab}{2} = \frac{\log_a a + \log_a b}{2} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad 4 - \text{Б.} \end{aligned}$$

Приклад 6.35 Обчислити значення виразу

$$1/70 \cdot 2^{(3 \log 27)}.$$

Розв'язування: Використаємо **основну логарифмічна тотожність**

$$a^{\log_a b} = b$$

решта обчислень зводиться до піднесення сімки до кубу та множення на дріб $=1/70$:

Відповідь: 4,9.

Приклад 6.36 Обчислити:

$$25^{(2 - \log_5 75)} + 7^{(-\log_7 3)} \cdot 27.$$

Розв'язування: Розпишемо степені та зводимо під **застосування основної логарифмічної тотожності**

$$\begin{aligned} (25^{2 - \log_5 75} + 7^{-\log_7 3}) \cdot 27 &= (25^2 : 25^{\log_5 75} + 7^{\log_7 3^{-1}}) \cdot 27 = \\ &= ((5^2)^2 : 5^{2 \log_5 75} + 3^{-1}) \cdot 27 = (5^4 : 75^2 + 3^{-1}) \cdot 27 = \\ &= \left(\frac{5^4}{(25 \cdot 3)^2} + \frac{1}{3} \right) \cdot 27 = \left(\frac{5^4}{(5^2 \cdot 3)^2} + \frac{1}{3} \right) \cdot 27 = \left(\frac{5^4}{5^4 \cdot 3^2} + \frac{1}{3} \right) \cdot 27 = \\ &= \left(\frac{5^4}{3^2} + \frac{1}{3} \right) \cdot 27 = \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3} \right) \cdot 27 = \frac{27}{9} + \frac{27}{3} = 3 + 9 = 12 \end{aligned}$$

Відповідь: 12.

Приклад 6.37 Обчислити:

$$3^{(\log 35 / \log 53)} - 5^{\log 35} + 7^{\log 749}.$$

Розв'язування: Завдання виконуємо кілька разів застосовуючи основну логарифмічну тотожність

$$\frac{\log_3 5}{3^{\log_5 3}} - 5^{\log_3 5} + 7^{\log_7 49} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{\frac{1}{\log_5 3}} - 5^{\frac{1}{\log_5 3}} + 49 =$$

$$= 5^{\frac{1}{\log_5 3}} - 5^{\frac{1}{\log_5 3}} + 49 = 49$$

Відповідь: 49.

Приклад 6.40 Обчислити значення виразу:

$$2^{\log_2^2 3} - 3^{\log_2 3} - 9^{\log_3 2}$$

Розв'язування: Маємо різницю показникових виразів де в степені задані логарифми. Для спрощення виразу спершу скористаємося властивостями показникових функцій та **розпишемо логарифми** так, **щоб можна було застосувати основну логарифмічну тотожність**

$$a^{\log_a b} = b$$

В результаті отримаємо:

$$2^{\log_2^2 3} - 3^{\log_2 3} - 9^{\log_3 2} = (2^{\log_2 3})^{\log_2 3} - 3^{\log_2 3} - 3^{2\log_3 2} =$$

$$= 3^{\log_2 3} - 3^{\log_2 3} - 3^{\log_3 2^2} = 0 - 2^2 = -4$$

Відповідь: -4.

Приклад 6.43 Обчислити значення виразу

$\log_a 500 - \log_a 4$, якщо $\log_5 a = 1/4$.

Розв'язування: Просте, на нашу думку, **завдання на формулу різниці логарифмів + застосування переходу від однієї основи під логарифмом до іншої:**

$$\log_a 500 - \log_a 4 = \log_a (500 : 4) = \log_a 125 =$$

$$= \log_a 5^3 = 3 \log_a 5 = \frac{3}{\log_5 a} = \frac{3}{1/4} = 3 \cdot 4 = 12$$

З такого плану завданнями на перетворення логарифмів Ви повинні вміти виконувати на відмінно. Лише тоді зможете розраховувати на високі оцінки та правильні результати.

Відповідь: 12.

Завдання:

1. Повторити § 1, п.4.
2. Виконати письмово вправи: 4.11-4.18.
3. Переглянути відеоматеріали за посиланням:

<https://naurok.com.ua/prezentaciya-do-vidkritogo-zanyattya-z-temi-totozhni-peretvorennya-logarifmichnih-viraziv-184989.html>

<http://www.10minscool.ua/video/362>

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати

на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net , у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи. Зошити зберігати до закінчення терміну карантину.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net .