
# 2.- RADICACIÓN

Aplicar las propiedades de radicación en la resolución de ejercicios y problemas.

# 2.- RADICACIÓN

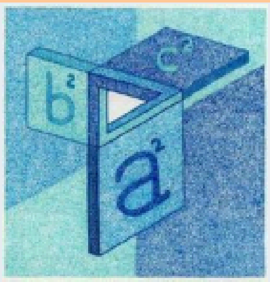
## Aplicar las propiedades de radicación en la resolución de ejercicios y problemas.

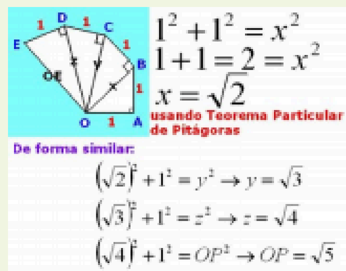
# Programa de Apoyo Didáctico

## Matemáticas

# RADICACIÓN

## MOTIVACIÓN






La visión del universo que tenían el sabio Pitágoras de Samos y sus discípulos, estaba dominada por sus ideas filosóficas acerca del número. Decían que:

***"el número natural y las proporciones entre números naturales gobernaban todo cuanto existía"***


Un descubrimiento hecho por los mismos pitagóricos, a través del Teorema de Pitágoras, demostró que esta afirmación **era falsa**, ya que ellos mismos se dieron cuenta de la existencia de un número que no era natural y tampoco se podía expresar como fracción alguna. El triángulo cuyos catetos son ambos de medida 1, fue el que originó el derrumbe de dicha teoría filosófica.

**Radica**
**ación**

ma Pr
rogra
de

RA
ADIC
CAC

MOTI
IVACIÓ

La visi
ión del univ
Samos
s y sus disc
as filo
sóficas acer
***"el n***
***úmero natu***
***naturales g***
Un de
scubrimien
a trav
és del Teor
afirma
ación era fa
cuenta

a de la exist

ral y ta

ampoco se p

El triá

ángulo cuyo

el que

e originó el

## e Apoy

## **M**

## CIÓ

## ÓN

verso que te

ípulos, esta

rca del núm

***ural y las pro***

***gobernaban***

nto hecho po

ema de Pitá

alsa, ya qu

tencia de un

podía expre

s catetos so

derrumbe

## yo Did

## **Matem**

## ÓN

enían el sab
aba dominad
ero. Decían
***oporciones e***
***todo cuanto***
or los mism
ágoras, dem
e ellos mis
n número qu
esar como fr
on ambos de
de dicha te

## dáctic

## co

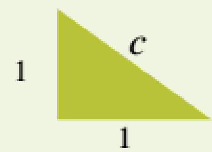
# mática

# as

io Pitágoras
s de
da por sus i
ide-
n que:
***entre númer***
***ros***
***o existía"***
mos pitagóri
cos,
mostró que e
esta

smos se die
eron
ue no era na
atu-
racción algu
una.
e medida 1,
fue
eoría filosóf
fica.

El triángulo en cuestión es el siguiente:

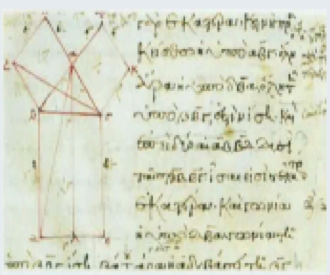



donde : $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$$c = \sqrt{2}$$

***Teorema de Pitágoras***

*El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo viene dado por la suma de los cuadrados de los catetos.*



Es decir, el número que representa la longitud de la hipotenusa $c$, de un triángulo rectángulo isósceles con lados de medida $1$, se representa como $\sqrt{2}$, se lee "*raíz cuadrada de* $2$" y nos indica aquel número que elevado al cuadrado es igual 2. Como ya sabemos $\sqrt{2}$ no es un número entero ni un número racional, este número es considerado dentro de los números reales como un irracional.

En la radicación también se presentan los siguientes casos:

a)Cuando multiplicamos $2 \times 2 = 2^2 = 4$ decimos entonces que 2 es la raíz cuadrada de 4 y se indica $2 = \sqrt{4}$.

b)Cuando multiplicamos $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$ decimos entonces que 5 es la raíz cúbica de $125$ y se indica $5 = \sqrt[3]{125}$.

**Resolver problemas como estos:**

c)Vas a construir una cerca alrededor del jardín cuyo terreno es cuadrado. Se sabe que el jardín tiene 12 $m^2$ . El problema es determinar cuantos metros de cerca tienes que comprar para cercar todo el jardín. Si *l* es la longitud del lado del cuadrado, entonces, la ecuación que nos queda resolver es

Teorema de Pitágoras El cuadrado de la hipote-
nusa de un triángulo rectángulo viene dado por
la suma de los cuadrados de los catetos.

El triángulo en cuestión es el siguiente:

1

*c*

donde :

$$=c\ 2\ 211\ 2 + 2 = 1$$

=c 2 Es decir, el número que representa la longitud de la hipotenusa

c

, de un triángulo rectángulo isósceles
con lados de medida

1

, se representa como

2

, se
*lee "raíz cuadrada de*

2

" y nos indica aquel número
que elevado al cuadrado es igual 2. Como ya sabemos
2 no es un número entero ni un número racional,
este número es considerado dentro de los números
reales como un irracional.

En la radicación también se presentan los siguientes
casos:

a)Cuando multiplicamos 4222 × == 2 decimos

entonces que 2 es la raíz cuadrada de 4 y se indica

42 .

b)Cuando multiplicamos

1255555 × × 3 decimos entonces que 5 es la raíz cúbica de

125

y

se indica

5

3

125 .

**Resolver problemas como estos:**

c)Vas a construir una cerca alrededor del jardín cuyo terreno es cuadrado. Se sabe que el jardín tiene 12 2m . El problema es determinar cuantos metros de cerca tienes que comprar para cercar todo el jardín. Si l es la longitud del lado del cuadrado, entonces, la ecuación que nos queda resolver es

$l^2 = 12$.

En base a esto, podemos decir, que encontrar la raíz $n-$ésima de un número $h$, es encontrar un número $r$, tales que $r^n = h$ y a esta operación se le llama *radicación*, la cual trataremos en esta unidad.

Con el dominio de las propiedades de la radicación, podemos manejar eficientemente las relaciones entre elementos de un problema, donde estén involucrados expresiones radicales.

## Objetivo

***Aplicar correctamente las propiedades de radicación en la resolución de ejercicios y problemas***

Para el logro de este objetivo se contemplan los siguientes temas:

## Contenido

## Radicación:

Conocimientos Previos

*Definición, Propiedades y Ejemplos.*

*Extracción e introducción de factores en un radical.*

*Expresiones conjugadas, Racionalización.*

**Tener en cuenta:**

- Leer los contenidos previos que debes conocer, antes de iniciar el estudio de este módulo.
- En la columna izquierda encontrarás algunas ayudas y comentarios que te serán de utilidad, a medida que vayas leyendo el material.
- Resuelve nuevamente cada ejemplo por tu cuenta y compara los resultados.
- A medida que estés resolviendo los ejemplos, analiza el procedimiento aplicado en cada paso.
- Sigue los procedimientos sugeridos en los ejemplos presentados.
- Intercambia ideas, procedimientos y soluciones con otros compañeros.

=l 2 12 .

En base a esto, podemos decir, que encontrar la raíz n

− ésima de un número

h

, es encontrar un número r

, tales que

rn

h y a esta operación se le llama

radicación, la cual trataremos en esta unidad.

Con el dominio de las propiedades de la radicación, podemos manejar eficientemente las relaciones entre elementos de un problema, donde estén involucrados expresiones radicales.

## Objetivo

***Aplicar correctamente las propiedades de radicación en la resolución de ejercicios y problemas***

Para el logro de este objetivo se contemplan los siguientes temas:

## Contenido

## Radicación:

Conocimientos Previos

*Definición, Propiedades y Ejemplos.*

*Extracción e introducción de factores en un radical.*

*Expresiones conjugadas , Racionalización.*

**Tener en cuenta:**

- Leer los contenidos previos que debes conocer, antes de iniciar el estudio de este módulo.
- En la columna izquierda encontrarás algunas ayudas y comentarios que te serán de utilidad, a medida que vayas leyendo el material.
- Resuelve nuevamente cada ejemplo por tu cuenta y compara los resultados.
- A medida que estés resolviendo los ejemplos, analiza el procedimiento aplicado en cada paso.
- Sigue los procedimientos sugeridos en los ejemplos presentados.
- Intercambia ideas, procedimientos y soluciones con otros compañeros.

# CONOCIMIENTOS PREVIOS

## Pre requisitos

**Números Racionales**

Operaciones con números fraccionarios:

- Adición y sustracción con igual o diferente denominador,
- Multiplicación y división de un número entero por un número fraccionado.

**Potenciación:**

Leyes de la Potenciación:

Con números positivos y negativos:

- Potencia de un producto.
- Potencia de un cociente.
- Potencia de una potencia.

**Expresiones Algebraicas:**

- Términos semejantes
- Agrupación de términos semejantes, para sumar y restar.

## Comprobación

1) Para resolver las siguientes expresiones :

i. $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{5}$ aplicamos la ley de potenciación : Potencia de una potencia, que consiste en multiplicar los exponentes : $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot 5$ y colocarlo como un único exponente, es decir $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{5} = a^{\frac{5}{3}}$

ii. $x^{3/5} \cdot y^{3/5} = (x \cdot y)^{3/5}$, aplicamos la ley de potenciación: el producto de las bases con un mismo exponente.

iii. $x^{3/7} \cdot x^{5/7} = x^{\frac{3}{7}+\frac{5}{7}} = x^{\frac{8}{7}}$, en este caso, en el producto de potencias de igual base, se suman los exponentes.

iv. Para el caso de la división de potencias de igual base, los exponentes se restan:

$$\frac{x^{7/5}}{x^{3/2}} = x^{\frac{7}{5}-\frac{3}{2}} = x^{-\frac{1}{10}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{10}}}$$

# CONOCIMIENTOS PREVIOS

## Pre requisitos

**Números Racionales**

Operaciones con números fraccionarios:

- Adición y sustracción con igual o diferente denominador,
- Multiplicación y división de un número entero por un número fraccionado.

**Potenciación:**

Leyes de la Potenciación:

Con números positivos y negativos:

- Potencia de un producto.
- Potencia de un cociente.
- Potencia de una potencia.

**Expresiones Algebraicas:**

- Términos semejantes
- Agrupación de términos semejantes, para sumar y restar.

## Comprobación

1) Para resolver las siguientes expresiones :

i. aplicamos la ley de potenciación : Potencia de una potencia, que consiste en multiplicar los exponentes : 5 y colocarlo como un único exponente, es decir

ii. $x^{\frac{3}{5}} \cdot y^{\frac{3}{5}} = (x \cdot y)^{\frac{3}{5}}$, aplicamos la ley de potenciación: el producto de las bases con un mismo exponente.

iii. $x^{\frac{3}{7}} \cdot x^{\frac{5}{7}} = x^{\frac{3}{7}+\frac{7}{5}} = x^{\frac{8}{7}}$, en este caso, en el producto de potencias de igual base, se suman los exponentes.

iv. Para el caso de la división de potencias de igual base, los exponentes se restan:

$x$

$7$

$5\ x$

$2\ 3$

$= x$

$7\ 5$

$-\ 3\ 2$

$=$

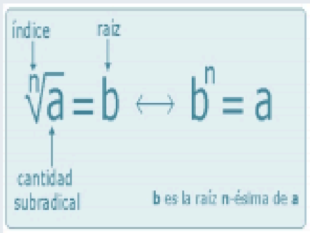
$x\ -$

$10\ 1$

$= 1\ x$

$10\ 1$

# DESARROLLO




## RADICACIÓN:

Si se desea encontrar los valores de equis $(x)$ que satisfacen la igualdad $x^2 = 4$, estos son los números $2$ y -2.

Para comprobar este hecho, elevamos al cuadrado cualquiera de los valores dados y da como resultado $4$.

A los valores de una incógnita, en este caso $(x)$, que satisfacen una igualdad se les denominan **raíces**, entonces en el caso particular que se trató se puede decir que, equis ( $x$ ) es igual a la raíz cuadrada de 4, y se denota así:

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4}.$$

Se utiliza el símbolo $\sqrt{\phantom{x}}$ para indicar un radical.

La expresión $\sqrt[n]{x^m}$ se lee :

**raíz n-ésima** $(n)$ **de equis** $(x)$ **a la eme** $(m)$ y sus partes son:

$\sqrt{\phantom{x}}$ es el signo radical

$x^m$ es la cantidad sub-radical

$(n)$ es el índice del radical. Este debe ser un número entero positivo mayor que uno.

Las raíces surgen como una forma alterna de expresar y resolver potencias, tal como se mostró en el ejemplo anterior.

# DESARROLLO

RADICACIÓN:

Si se desea encontrar los valores de equis

)(x

que satis-

facen la igualdad

*x*

2 = 4 , estos son los números 2 y

-2.

Para comprobar este hecho, elevamos al cuadrado cual-

quiera de los valores dados y da como resultado 4.

A los valores de una incógnita, en este caso

)(x

, que sa-

tisfacen una igualdad se les denominan raíces, entonces

en el caso particular que se trató se puede decir que, equis

(

*x*

) es igual a la raíz cuadrada de 4, y se denota así:

2x = 4 ⇒ x

±= 4 .

Se utiliza el símbolo para indicar un radical.

La expresión

*n x*

*m*

se lee :

**raíz n-ésima**

*( x*

)

**a la eme**

*( m*

)

y sus partes

son:

es el signo radical mx

es la cantidad sub-radical ( n

)

es el índice del radical. Este debe ser un número entero positivo mayor que uno.

Las raíces surgen como una forma alterna de expresar y resolver potencias, tal como se mostró en el ejemplo anterior.

( n )

**de equis**

Una potencia **de exponente fraccionario** se puede escribir como raíz, es decir, si tenemos $x^{\frac{m}{n}}$, esto es igual a $\sqrt[n]{x^m}$.

De aquí se puede generalizar que la expresión sub-radical consta de una base y un exponente. Para convertirlo en potencia con exponente fraccionario consideramos:

- La base de la potencia es la base de la expresión sub-radical ($x$).
- El numerador del exponente fraccionario es el exponente de la base en la cantidad sub-radical $(m)$ y su denominador es el índice del radical $(n)$

**Las raíces más utilizadas** son las que se leen como:

Raíz cuadrada ($\sqrt{\ }$), cuando en el índice no se escribe ningún valor, se sobreentiende que es dos(2)

Raíz cúbica $\sqrt[3]{\ }$

Raíz cuarta $\sqrt[4]{\ }$

Raíz quinta $\sqrt[5]{\ }$

Y así sucesivamente, observe que la lectura de la raíz depende del número que se encuentre en el índice.

Se considera el caso particular cuando $m = 1$, podemos definir la siguiente equivalencia:

$$\boxed{\sqrt[n]{x} = r \quad \text{sí y solo si} \quad x = r^n} \qquad \textbf{EQ. 1}$$

## Criterio de existencia de la raíz $n$-ésima de un número, $\sqrt[n]{x}$:

(a) Si el índice $n$ **es par** y $x$ **<u>es positivo</u>**, existen dos raíces $n$-ésimas reales de $x$, una positiva y otra negativa. Pero la expresión $\sqrt[n]{X}$ sólo está referida a la positiva. Es decir, las dos raíces $n$-ésimas de $x$ son $\sqrt[n]{X}$ y $-\sqrt[n]{X}$. Sin embargo, los **<u>números reales negativos</u>** no tienen una raíz real cuando el índice es par.

**Una potencia de exponente fraccionario se puede**

escribir como raíz, es decir, si tenemos

$x$

$m$

, esto es

igual a

$n$

$n\ x$

$m$

.

De aquí se puede generalizar que la expresión sub-radical

consta de una base y un exponente. Para convertirlo en

potencia con exponente fraccionario consideramos:

• La base de la potencia es la base de la expresión sub-

radical (

$x$

).

• El numerador del exponente fraccionario es el ex-

ponente de la base en la cantidad sub-radical

$($ m

$)$

y su denominador es el índice del radical

$(n$

$)$

**Las raíces más utilizadas**

son las que se leen como:

Raíz cuadrada ( ), cuan-

do en el índice no se escribe

ningún valor, se sobreentien-

de que es dos(2)

Raíz cúbica

Se considera el caso particular cuando

*m*

1= , podemos

definir la siguiente equivalencia:

n

X

=

r sí y solo si

**= n EQ. 1 3**

## Criterio de existencia de la raíz

Raíz cuarta

n

**-ésima 4**

**de un número, n x : Raíz quinta**

5

Y así sucesivamente, ob-

(a) Si el índice

serve que la lectura de la

raíz depende del número

que se encuentre en el

índice.

*x*

es positivo, existen dos raí-

ces

n

**es par y n**

-ésimas reales de x, una positiva y otra negati-

va. Pero la expresión

n

x

sólo está referida a la posi-

tiva. Es decir, las dos raíces n-ésimas de x son

x

y

- n

n

x

**. Sin embargo, los números reales negati-**

vos no tienen una raíz real cuando el índice es par.

Por ejemplo,

- $81$ **tiene dos raíces cuadradas,** $9$ y $-9$, pues $9^2 = 81$ y $(-9)^2 = 81$.
- $23$ **tiene dos raíces cuartas** $\sqrt[4]{23}$ y $-\sqrt[4]{23}$.

Sin embargo,

- $-36$ **no tiene raíz cuadrada** porque ningún número real elevado al cuadrado da $-36$, es decir $\sqrt{-36}$ **no existe,** no es un número real.

Por lo mismo, $-23$ **no tiene raíz cuarta**.

(b) Si el índice $n$ **es impar**, cualquiera sea el número real, $x$, positivo o negativo, tiene una única raíz $n$-ésima.

Por ejemplo,

la raíz cúbica de 8 es 2, $\sqrt[3]{8}=2$,

y la raíz cúbica de $-27$ es $-3$, $\sqrt[3]{-27}=-3$

Por ejemplo,

•

81

**tiene dos raíces cuadradas,**

9

y

9−

,

pues

8192 =

y

( −

9 ) 2 = 81 .

•

23

**tiene dos raíces cuartas 4**

−

23 .

Sin embargo,

•

23

y 4

−

**36 no tiene raíz cuadrada porque ningún**

número real elevado al cuadrado da − 36 , es decir

−

36 no existe, no es un número real.

Por lo mismo,

−

**23 no tiene raíz cuarta.**

(b) Si el índice

$n$

es impar, cualquiera sea el número

real,

$x$

, positivo o negativo, tiene una única raíz

$n$

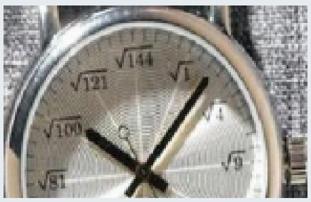
-

ésima.

Por ejemplo,

la raíz cúbica de 8 es 2, √8 =2,

y la raíz cúbica de − 27 es − 3 , √ 27 3




## Propiedades de los Radicales:

<u>El producto de las raíces con igual índice es la raíz del producto.</u>

Esta propiedad nos indica que resolver el producto de dos o más raíces con igual índice es igual a la raíz del producto de las cantidades sub-radicales con el mismo índice, en términos generales:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

**Ejemplo 1:** Escriba el siguiente producto de raíces $\sqrt[5]{2x} \cdot \sqrt[5]{3y}$ como la raíz de un producto.

Como es un producto de radicales con igual índice, se escribe la raíz una sola vez, manteniendo el mismo índice y se expresan las cantidades sub-radicales como un producto.

$$\sqrt[5]{2x} \cdot \sqrt[5]{3y} = \sqrt[5]{2x.3y} = \sqrt[5]{6xy}$$

**Respuesta:** $\sqrt[5]{2x} \cdot \sqrt[5]{3y} = \sqrt[5]{6xy}$

<u>El cociente de las raíces con igual índice es la raíz del cociente.</u>

Esta propiedad nos indica que resolver el cociente de dos o más raíces con igual índice, es igual a la raíz del cociente de las cantidades sub-radicales con el mismo índice, en términos generales:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

## Propiedades de los Radicales:

El producto de las raíces con igual índice es la raíz del producto.

Esta propiedad nos indica que resolver el producto de dos o más raíces con igual índice es igual a la raíz del producto de las cantidades sub-radicales con el mismo índice, en términos generales:

n baba · n = n · Ejemplo 1: Escriba el siguiente producto de raíces 5 32 x ·

5

y como la raíz de un producto. Como es un producto de radicales con igual índice, se escribe la raíz una sola vez, manteniendo el mismo índice y se expresan las cantidades sub-radicales como un producto.

5 32 yx ·

5

= 5 3.2 yx =

*5 6xy*

**Respuesta:**

*5 32 yx* ·

5

=

*5 6xy*

El cociente de las raíces con igual índice es la raíz del cociente.

Esta propiedad nos indica que resolver el cociente de dos o más raíces con igual índice, es igual a la raíz del cociente de las cantidades sub-radicales con el mismo índice, en términos generales:

$n$

$a$

$n$

$b$

$=$

$n$

$a\ b$

Cuando hablamos de potencia de radicales simplemente nos referimos a potencias que tienen como base un radical. Estas potencias cumplen con todas las propiedades de la potenciación.

**Ejemplo 2:** Escriba el siguiente cociente de raíces

$\frac{\sqrt[5]{6x}}{\sqrt[5]{3y}}$ como una la raíz de un cociente.

Como es un cociente de radicales con igual índice, se escribe la raíz una sola vez manteniendo el mismo índice, y se expresan las cantidades sub-radicales como un cociente.

$$\frac{\sqrt[5]{6x}}{\sqrt[5]{3y}} = \sqrt[5]{\frac{6x}{3y}} = \sqrt[5]{\frac{2x}{y}} = \sqrt[5]{2xy^{-1}}$$

**Respuesta:** $\frac{\sqrt[5]{6x}}{\sqrt[5]{3y}} = \sqrt[5]{2xy^{-1}}$

## Potencia de una raíz:

Escribir una raíz elevada a una expresión, es igual a escribir bajo el signo radical la cantidad sub-radical elevada a esa misma expresión, es decir:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

**Ejemplo 3:** Resolver $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3$

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3 = \sqrt[3]{\left(x^2\right)^3} = \sqrt[3]{x^6}$$

**Respuesta:** $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3 = \sqrt[3]{x^6}$

Vamos a explicar el procedimiento para el caso donde la base es un producto de factores, con el siguiente ejemplo:

**Radicación**

Cuando hablamos de potencia de radicales simplemente nos referimos a potencias que tienen como base un radical. Estas potencias cumplen con todas las propiedades de la potenciación.

Ejemplo 2: Escriba el siguiente cociente de raíces

$$\frac{\sqrt[5]{6x}}{\sqrt[5]{3y}}$$

como una la raíz de un cociente.

Como es un cociente de radicales con igual índice, se escribe la raíz una sola vez manteniendo el mismo índice, y se expresan las cantidades sub-radicales como un cociente.

$$\frac{\sqrt[5]{6x}}{\sqrt[5]{3y}} = \sqrt[5]{\frac{6x}{3y}}$$

=

5

2

x y

= 5

**2 xy − 1 5 Respuesta:**

5

6

x 3

y

= 5

2 xy − 1 Potencia de una raíz:

Escribir una raíz elevada a una expresión, es igual a escribir bajo el signo radical la cantidad sub-radical elevada a esa misma expresión, es decir:

( n

a )

m

**= n a m Ejemplo 3: Resolver**

( 3 2x

) 3

( 3 2x

) 3

=

3

( 2x

)

3

= 3 6x

**Respuesta:**

( 3 2x

) 3

= 3 6x

Vamos a explicar el procedimiento para el caso donde la base es un producto de factores, con el siguiente ejemplo: