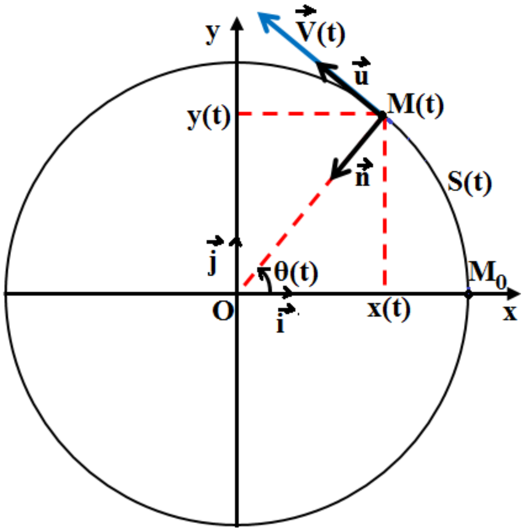
Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

I- Mouvement de rotation :



1- Abscisse angulaire - abscisse curviligne :

- Un corps solide est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe si tous ses points décrivent des trajectoires circulaires centrées sur cet axe sauf les points de cet axe sont immobiles,
- La position d'un point d'un corps solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ), peut être repérée par son abscisse angulaire θ, ou son abscisse curviligne S tel que $S = R.\theta$ (R est le rayon de la trajectoire circulaire).

2- Vitesse angulaire - vitesse linéaire :

La vitesse angulaire d'un solide $\dot{\theta}(t)$ est donnée par la relation suivante : $\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$ elle s'exprime en $(rad.s^{-1})$.

La vitesse linéaire d'un point $v(t)$ est donnée par la relation suivante : $v(t) = \dot{s}(t) = \frac{dS(t)}{dt}$ elle s'exprime en $(m.s^{-1})$.

Tous les points d'un corps solide ont la même vitesse angulaire $\omega_i(t)$ et leurs vitesses linéaires $v_i(t)$ croient en s'éloignant de l'axe de rotation (Δ), et on a $v_i(t) = R.\dot{\theta}(t)$.

Comme on peut utiliser les méthodes d'encadrement suivantes : $v_i(t_i) = \frac{S_{i+1}-S_{i-1}}{t_{i+1}-t_{i-1}}$ et $\dot{\theta}(t_i) = \frac{\theta_{i+1}-\theta_{i-1}}{t_{i+1}-t_{i-1}}$

Remarque :

Le vecteur vitesse instantanée a pour direction la tangente au cercle, au point M (il est donc toujours perpendiculaire au rayon R)

3- Accélération angulaire $\ddot{\theta}(t)$:

l'accélération angulaire est donnée par la relation suivante : $\ddot{\theta}(t) = \frac{d\dot{\theta}(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$ elle s'exprime en rad/s²

L'expression du vecteur accélération dans la base frenet est $\vec{a}_G = a_T\vec{u} + a_N\vec{n}$

Alors $\vec{a}_G = \frac{dv}{dt}\vec{u} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$ donc $\vec{a}_G = R\ddot{\theta}\vec{u} + \frac{(\rho\dot{\theta})^2}{R}\vec{n} = R\ddot{\theta}\vec{u} + R\dot{\theta}^2\vec{n}$, Finalement :

$a_T = R\ddot{\theta}$ et $a_N = R\dot{\theta}^2$ et $a_G = \sqrt{\left(R\ddot{\theta}\right)^2 + \left(R\dot{\theta}^2\right)^2} = R\sqrt{\ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^4}$, elles s'expriment en $rad.s^{-2}$.

R est le rayon de la trajectoire circulaire du point mobile, en mètres (m).

Application 1 :

1- La vitesse angulaire d'un point M d'un solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe est $\dot{\theta} = 10rad.s^{-1}$, et son abscisse angulaire à l'origine des dates est $\theta_0 = \frac{2\pi}{3}rad$:

  a- Calculer l'accélération angulaire du point M, en déduire la nature de son mouvement,

  b- Écrire l'expression de l'abscisse angulaire du point M en fonction du temps,

2- L'expression de l'abscisse angulaire d'un point N d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est : $\theta(t) = 3t^2 + 2t - \frac{\pi}{2}$; t est en (s) et θ en rad :

  a- Déterminer l'expression de la vitesse angulaire du point N, calculer sa valeur à $t = 2s$,

  b- Déterminer l'expression de l'accélération angulaire du point N, en déduire la nature de son mouvement.

II- Relation fondamentale de la dynamique de rotation :

1- Moment d'une force par rapport à un axe :

Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un axe (Δ) est une grandeur physique traduisant l'aptitude de cette force à faire tourner un solide autour de l'axe (Δ), noté $M_\Delta(\vec{F})$ et exprimé en N.m , tel que:

$M_{\Delta}(\vec{F}) = \pm F.d$, F : l'intensité de la force $\vec{F}$ en N, d la distance entre sa ligne d'action et l'axe de rotation (Δ) en m. Le sens positif de rotation est choisi arbitrairement.

$M_{\Delta}\left(\vec{F}\right) = + F.d$: Lorsque $\vec{F}$ tend à faire tourner le solide dans le sens arbitraire positif choisi.

$M_{\Delta}\left(\vec{F}\right) = - F.d$: lorsque $\vec{F}$ tend à faire tourner le solide au contraire du sens arbitraire positif choisi.

2- *Enoncé du principe :*

Dans un référentiel lié à la terre supposé Galiléen, la somme algébrique des moments des forces extérieurs appliquées à un corps solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ), est égale à chaque instant, au produit du moment d'inertie J_{Δ} et de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ du corps solide à cet instant, soit : $\sum M(\vec{F}_{ext}) = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$

$M(\vec{F}_{ext})$ s'exprime en (N.m) ; J_{Δ} en kg.m^2 et $\ddot{\theta}$ en rad.s^{-2}

Remarque :

Si $\ddot{\theta} = 0$, alors le mouvement est une rotation uniforme autour de l'axe (Δ).

Si $\ddot{\theta} = cte \neq 0$, alors le mouvement est une rotation uniformément variée autour de l'axe (Δ).

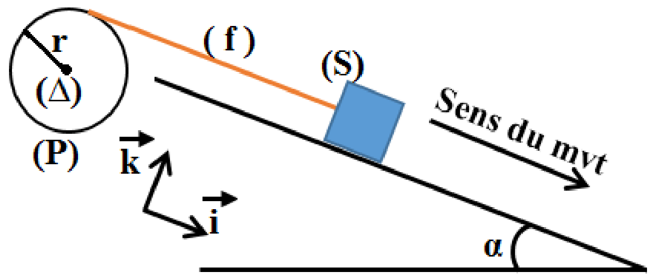
3- *Equations horaires de mouvement :*

On dit que le mouvement de rotation est uniformément varié lorsque l'accélération angulaire est constante et non nulle, c'est-à-dire que $\ddot{\theta} = cte \neq 0$, donc par l'intégration, on trouve que $\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}.t + \dot{\theta}_0$, c'est l'équation horaire de la vitesse angulaire,

Et par l'intégration, on aura $\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$ c'est l'équation horaire du mouvement d'une rotation uniformément variée.

4- *Application : Etude d'un système en translation et en rotation :*

On considère le système mécanique suivant :



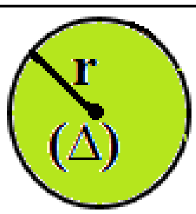
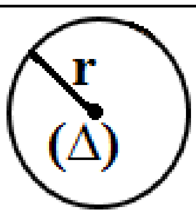
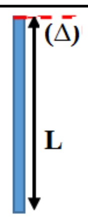
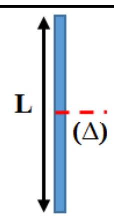
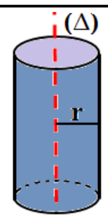
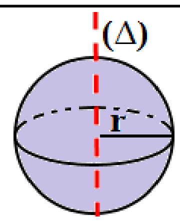
Une poulie (P) de rayon r ; de masse m_0 de moment d'inertie $J_{\Delta} = \frac{1}{2}m_0 r^2$, pouvant tourner autour de l'axe horizontal (Δ) passant par son centre.
On enroule sur la gorge de cette poulie un fil (f) inextensible de masse négligeable. Le fil ne glisse pas sur la poulie. A l'extrémité libre du fil, on accroche un solide (S) de masse m. le solide (S) est capable de glisser sans frottement sur le plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.
Dans un référentiel lié à la terre considéré Galiléen, on libère le système, la poulie tourne autour de l'axe (Δ) et le solide (S) glisse sans frottement sur le plan incliné.

a- Montrer que T_0 l'intensité de la force appliquée par le fil sur la poulie est $T_0 = J_{\Delta}.\frac{\ddot{\theta}}{r}$

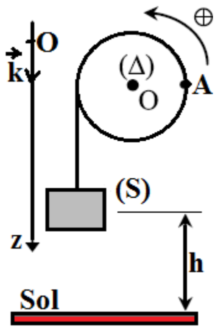
b- Montrer que $a_x = \frac{2mg.\sin\sin(\alpha)}{2m+m_0}$, en déduire la nature du mouvement du corps (S) et celle de la poulie (P),

c- Etablir les équations horaires du mouvement du corps (S) et celle de la poulie (P),

5- *Expression du moment d'inertie de quelques solides :*

Disque	Anneau	Tige		Cylindre	Sphère
					
$J_{\Delta} = \frac{1}{2}mr^2$	$J_{\Delta} = mr^2$	$J_{\Delta} = \frac{1}{3}mL^2$	$J_{\Delta} = \frac{1}{12}mL^2$	$J_{\Delta} = \frac{1}{2}mr^2$	$J_{\Delta} = \frac{2}{5}mr^2$

Exercice d'application :



Une poulie (P) de rayon R= 8cm et de moment d'inertie $J_{\Delta} = 96.10^{-5} kg.m^2$ est mobile sans frottement autour de l'axe horizontal (Δ) passant par son centre.
On enroule sur la gorge de cette poulie un fil inextensible de masse négligeable.
A l'extrémité libre du fil, on accroche un solide (S) de masse m=100g.
Le solide (S), se trouve à une hauteur h=4,4m, au-dessus du sol.
On abandonne le système à lui-même sans vitesse initiale à l'instant de date t_0 =0s.

1- Exprimer a_z, la composante de l'accélération du solide (S), en fonction m, g, r et J_{Δ},
2- Calculer la valeur de a_z, en déduire la nature du mouvement du solide (S),
3- Déduire la valeur de $\ddot{\theta}$, en déduire la nature du mouvement de poulie,
4- Une seconde après le début du mouvement, le fil supportant le solide (S) se détache de la poulie :
   a- Avec quelle vitesse et au bout de combien de temps le solide (S) atteint-il le sol ?
   b- Quelle est la nature du mouvement ultérieure de la poulie (après détachement du fil) ?
   c- Ecrire l'équation horaire de ce mouvement. On prendra comme origine des abscisses angulaires la position du rayon OA à l'instant de date t_0 =0s,
   d- On applique à la poulie un couple de freinage de moment M_f constant. La poulie s'arrête après avoir effectué 10 tours en mouvement de rotation uniformément retardé. Calculer le moment du couple de freinage.