УТВЕРЖДАЮ
Заместитель председателя
оргкомитета третьего этапа
республиканской олимпиады
по учебным предметам,
заместитель начальника
управления образования
Могилевского облисполкома

__________ О.В.Стельмашок
«___» ноября 2012 г.

ЗАДАНИЯ
второго этапа республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика» 2012/2013 учебного года

Дата проведения: **1 декабря 2012г.**

9 класс

1. Олимпийская сборная Беларуси по футболу провела два товарищеских матча. В каждом из них игроки борисовского БАТЭ составляли не более $\frac{2}{3}$. Доказать, что борисовчане составляли не более $\frac{7}{9}$ общего числа футболистов сборной, если известно, что каждый игрок БАТЭ выходил на поле хотя бы в одном матче. (В футбольном матче от каждой команды участвуют 11 игроков. Считать, что замены игроков во время матчей не проводились).

2. Даны натуральные числа *a, b, c, d, e, f* такие, что

$$ace + ade + bce + bde + acf + adf + bcf + bdf = 2013.$$

Чему равна сумма $a + b + c + d + e + f$?

3. Для того, чтобы уложить паркетом пол квадратной комнаты, были куплены 4 одинаковые коробки с паркетными плитками вида . Все плитки были израсходованы, и пол был полностью уложен. Можно ли было пол этой же комнаты выложить плитками вида  ?

4. Внутри квадрата отмечено 1005 различных точек. На какое наибольшее число треугольников можно разрезать этот квадрат, если вершинами треугольников могут быть вершины квадрата и отмеченные точки?

5. Две окружности разного радиуса пересекаются в точках A и B. Продолжение общей хорды AB за точку A пересекает общую касательную MN этих окружностей (M и N – точки касания) в точке K, при этом AB=2AK (т.е. AB:AK =

2:1). Точки E и F – середины отрезков MB и NB соответственно. Доказать, что отрезки MF и NE пересекаются в точке A.

Пользоваться калькулятором не разрешается
Время работы: 4,5 часа

ЗАЦВЯРДЖАЮ
Намеснік старшыні
аргкамітэта трэцяга этапу
рэспубліканскай алімпіяды
па вучэбных прадметах,
намеснік начальніка ўпраўлення
адукацыі Магілёўскага
аблвыканкама

__________А.У.Стэльмашок
«___» лістапада 2012 г.

ЗАДАННІ

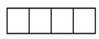
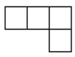
другога этапу рэспубліканскай алімпіяды па вучэбнаму прадмету
“Матэматыка” 2012/2013 навучальнага года

Дата правядзення: **1 снежня 2012 г.**

9 класс

1 Алімпійская зборная Беларусі па футболе правяла два таварыскія матчы. У кожным з іх гульцы барысаўскага БАТЭ складалі не больш за $\frac{2}{3}$. Даказаць, што барысаўчане складалі не больш за $\frac{7}{9}$ агульнага ліку футбалістаў зборнай, калі вядома, што кожны гулец БАТЭ выходзіў на поле хаця б у адным матчы. (У футбольным матчы ад кожнай каманды ўдзельнічаюць 11 гульцоў. Лічыць, што замены гульцоў падчас матчаў не праводзіліся).

2 Дадзены натуральныя лікі a, b, c, d, e, f такія, што
$ace + ade + bce + bde + acf + adf + bcf + bdf = 2013$.
Чаму роўная сума $a + b + c + d + e + f$?

3 Для таго, каб выкласці паркетам падлогу квадратнага пакоя, былі набыты 4 аднолькавыя скрынкі з паркетнымі пліткамі выгляду . Усе пліткі былі выкарыстаны, і падлога была цалкам выкладзена. Ці можна было падлогу гэтага ж пакоя выкласці пліткамі выгляду ?

4 Унутры квадрата адзначана 1005 розных пунктаў. На якую найбольшую колькасць трохвугольнікаў можна разрэзаць гэты квадрат, калі вяршынямі трохвугольнікаў могуць быць вяршыні квадрата і адзначаныя пункты?

5 Дзве акружнасці рознага радыусу перасякаюцца ў пунктах A і B. Працяг агульнай хорды AB за пункт A перасякае агульную датычную MN гэтых акружнасцяў (M і N - пункты дотыку) у пункце K, пры гэтым AB = 2AK (г.зн. AB:

AK = 2:1). Пункты E i F - сярэдзіны адрэзкаў MB i NB адпаведна. Даказаць, што адрэзкі MF i NE перасякаюцца ў пункце A.

Карыстацца калькулятарам не дазваляецца
Час працы: 4,5 гадзіны

9 класс

Решения

<u>Решения учащихся могут отличаться от предложенных авторских решений!</u>

1. ***Решение***

Пусть в сборной было n игроков БАТЭ и m игроков других команд. Поскольку в каждом матче принимает участие 11 футболистов, то игроков БАТЭ в каждом матче участвовало не более, чем 7 ($7 < \frac{2}{3} \cdot 11$, но $8 > \frac{2}{3} \cdot 11$). Тогда всего в сборную были включены не более 7+7=14 игроков БАТЭ. Заметим, что в каждом из матчей участвовало не менее 4 игроков других команд (т.к. футболистов БАТЭ было не более 7), т.е. $m \geq 4$. Оценим долю игров БАТЭ в сборной:

$\frac{n}{n+m} \leq \frac{n}{n+4} \leq \frac{14}{14+4} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$. Что и требовалось доказать.

2.*Решение*

Выполним преобразования:

$$ace + ade + bce + bde + acf + adf + bcf + bdf = 2013.$$

$$ae(c+d) + be(c+d) + af(c+d) + bf(c+d) = 2013.$$

$$(c+d)(ae + be + af + bf) = 2013.$$

$$(c+d)(e(a+b) + f(a+b)) = 2013$$

$$(a+b)(c+d)(e+f) = 2013. \qquad (*)$$

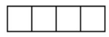
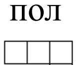
Итак, число 2013 представили в виде произведения трех множителей, каждый из которых больше 1. Поскольку 2013 имеет следующее разложение на простые множители: $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, то такое представление единственно (с точностью до перестановки множителей).

Таким образом, среди множителей левой части (*) встречаются числа 3, 11 и 61.

Тогда $a+b+c+d+e+f = (a+b)+(c+d)+(e+f)$ = 3 + 11 + 61 = 75.

***Ответ*: 75.**

3. ***Решение***

Пусть в каждой коробке было n плиток вида . Тогда всего было $4n$ таких плиток. Следовательно, на квадратном полу помещается $16n$ клеток размера 1×1. Так как площадь квадрата (выраженная в квадратиках 1×1) кратна 16, то сторона квадрата кратна 4. Разобьем квадратный пол на квадраты размера 4×4, а такой квадрат можно легко замостить плитками вида : две плитки закрывают прямоугольник 4×2. Итак, замостить пол плитками второго вида можно.

***Ответ*: можно.**

4. ***Решение:***

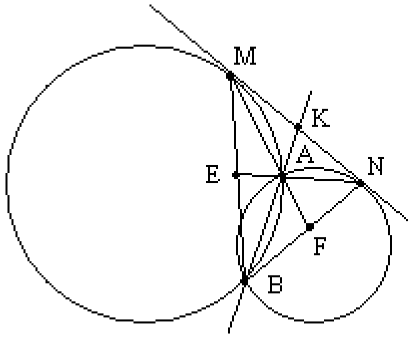
Заметим, что наибольшее число треугольников получится, если в качестве вершин этих треугольников будут задействованы все отмеченные точки. (Если отмеченная точка попадает внутрь какого-либо треугольника, то этот треугольник можно разрезать на более мелкие треугольники, соединив отрезками данную отмеченную точку с вершинами треугольника). Пусть квадрат разрезан на n треугольников, тогда сумма углов этих треугольников равна $180n$. С другой стороны, сумма углов этих треугольников, вершиной которых является некоторая вершина квадрата, равна 90°, а сумма углов этих треугольников, вершиной которых является внутренняя точка квадрата, равна 360°. Тогда имеем: $180^\circ n = 4\cdot 90^\circ + 360^\circ\cdot 1005$, откуда $n = 2 + 2\cdot 1005 = 2012$.

***Ответ*: 2012 треугольников**.

Замечание. Рассуждение можно провести и другим способом**.**

5. Решение

По свойству касательной и секущей имеем: $KM^2 = KA\cdot KB$ и $KN^2 = KA\cdot KB$, откуда KM = KN, т.е. K – середина отрезка MN. Тогда BK – медиана треугольника MBN. Т.к. AB=2AK, то A – точка пересечения медиан треугольника MBN. Тогда две другие медианы этого треугольника NE и MF проходят через точку A.



Что и требовалось доказать.