Teorema 1.15

Sea V y W espacios vectoriales de igual dimensión y sea $T: V \to W$ una transformación lineal; T es inyectiva, sí y sólo si T es sobreyectiva.

Demostración:

En efecto:

$\Rightarrow$) T es inyectiva, entonces $\dim R(T) = \dim(V)$ y por hipótesis $\dim(V) = \dim(W)$ y por lo tanto $\dim R(T) = \dim(W)$ y $R(T) = W$ y en consecuencia T es sobreyectiva.

$\Leftarrow$) Por hipótesis T es sobreyectiva por lo tanto $R(T) = W$ y $\dim R(T) = \dim(W)$ por el teorema de las dimensiones $R(T) \pounds\ W$ entonces $\dim R(T) = \dim(V)$ hipótesis, entonces T es inyectiva.

Participante: José Meléndez

Teorema 1.17. "Teorema Fundamental de las Transformaciones Lineales"

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K, sea $\beta = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ base ordenada de V. Sea W un espacio vectorial sobre el cuerpo K y $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$ vectores cualesquiera de W, entonces existe una única transformación lineal de $V\ en\ W$ tal que, $T(V_i) = W_i$ con $i = 1,2,3, \ldots, n$.

Demostración:

Primero probamos que T es una Transformación lineal tomando en cuenta que T está definida así:

$$T(V) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$$

Como V es un espacio vectorial se sabe que $V = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ entonces:

$T(V) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n$ Con todo esto podemos comenzar a probar la transformación lineal.

i) $T(x+y) = T(x) + T(y)\ \ \forall x, y \in V$ como x e y $\in V$ se definen así:

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

$$y = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$$

En efecto

$$T(x+y) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i\right) \textit{ definición de } x \textit{ e } y$$

$$T(x+y) = T\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)\, v_i\right) \textit{ Propiedad de } \sum$$

$$T(x+y) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)\, w_i \textit{ definición de } T$$

$$T(x+y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i \quad \textit{Propiedad de } \sum$$

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \qquad \textit{definición de } x \textit{ e } y.$$

Por lo tanto T cumple con la primera condición de Transformación lineal.

Por otro lado:

ii) $$T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

$$T(\alpha x) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha \alpha_i v_i\right) \quad definición\ de\ x$$

$$T(\alpha x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha\, \alpha_i w_i \quad definición\ de\ T$$

$$T(\alpha x) = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i \quad Propiedad\ de\ \sum$$

$$T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad definición\ de\ T$$

Por todo esto T es lineal, es decir, cumple con las dos condiciones de transformación lineal.

Debemos probar ahora que T es única suponiendo que existe otra transformación lineal $M: V \to W$ tal que $M(v_i) = w_i\ \ con\ i = 1,2,3, \dots, n$; veamos entonces si $M = T \quad \forall x \in V$. En efecto, se tiene que;

$$x \in V \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

$$T(x) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) \ definición\ de\ x \in V$$

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i \ \text{ definición de T}$$

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M(v_i) \ \text{ definición de M}$$

$T(x) = M\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right)$ ya que M es una T.L

$T(x) = M(x)$ definición de x

Así se tiene que T es única.

Probaremos para terminar que $T(v_i) = w_i$ con $i = 1,2,3, \dots, n$. En efecto:

$v_1 = 1.v_1 + 0.v_2 + 0.v_3 + \cdots + 0.v_n$

$T(v_1) = 1.w_1 + 0.w_2 + 0.w_3 + \cdots + 0.w_n$

$T(v_1) = w_1$

$v_2 = 0.v_1 + 1.v_2 + 0.v_3 + \cdots + 0.v_n$

$T(v_2) = 0.w_1 + 1.w_2 + 0.w_3 + \cdots + 0.w_n$

$$T(v_2) = w_2$$

Si continuamos de esta forma encontramos que $T(v_n) = w_n$ por lo tanto $T(v_i) = w_i$ con $i = 1,2,3, \dots, n$.

En conclusión existe la transformación lineal única y $T(v_i) = w_i$ con $i = 1,2,3, \dots, n$.

Participante: José Meléndez.

Teorema 1.17. "Teorema Fundamental de las Transformaciones Lineales"

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K, sea $\beta = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ base ordenada de V. Sea W un espacio vectorial sobre el cuerpo K y $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ vectores cualesquiera de W, entonces existe una única transformación lineal de V en W tal que, $T(V_i) = W_i$ con $i = 1,2,3, \dots, n$.

Demostración:

Primero probamos que T es una Transformación lineal tomando en cuenta que T está definida así:

$$T(V) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$$

Como V es un espacio vectorial se sabe que $V = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ entonces:

$T(V) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n$ Con todo esto podemos comenzar a probar la transformación lineal.

i) $T(x+y) = T(x) + T(y)\ \forall x, y \in V$ como x e y $\in V$ se definen así:

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

$$y = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$$

En efecto

$$T(x+y) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i\right) \text{ definición de } x \text{ e } y$$

$$T(x+y) = T\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) v_i\right) \text{ Propiedad de } \sum$$

$$T(x+y) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) w_i \text{ definición de } T$$

$$T(x+y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i \text{ Propiedad de } \sum$$

$T(x+y) = T(x) + T(y) \qquad definición\ de\ x\ e\ y.$

Por lo tanto T cumple con la primera condición de Transformación lineal.

Por otro lado:

ii) $\qquad T(\alpha x) = \alpha T(x)$

$$T(\alpha x) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha \alpha_i v_i\right) \quad definición\ de\ x$$

$$T(\alpha x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha \alpha_i w_i \quad definición\ de\ T$$

$$T(\alpha x) = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i \quad Propiedad\ de\ \sum$$

$$T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad definición\ de\ T$$

Por todo esto T es lineal, es decir, cumple con las dos condiciones de transformación lineal.

Debemos probar ahora que T es única suponiendo que existe otra transformación lineal $M: V \to W$ tal que $M(v_i) = w_i \ \ con\ i = 1,2,3,\dots,n$; veamos entonces si $M = T \quad \forall x \in V$. En efecto, se tiene que;

$$x \in V \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

$$T(x) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) definición\ de\ x \in V$$

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i \quad \text{definición de T}$$

$T(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M(v_i)$ definición de M

$T(x) = M\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right)$ ya que M es una T.L

$T(x) = M(x)$ definición de x

Así se tiene que T es única.

Probaremos para terminar que $T(v_i) = w_i$ con $i = 1,2,3,\dots,n$. En efecto:

$v_1 = 1.v_1 + 0.v_2 + 0.v_3 + \cdots + 0.v_n$

$T(v_1) = 1.w_1 + 0.w_2 + 0.w_3 + \cdots + 0.w_n$

$T(v_1) = w_1$

$v_2 = 0.v_1 + 1.v_2 + 0.v_3 + \cdots + 0.v_n$

$T(v_2) = 0.w_1 + 1.w_2 + 0.w_3 + \cdots + 0.w_n$

$$T(v_2) = w_2$$

Si continuamos de esta forma encontramos que $T(v_n) = w_n$ por lo tanto $T(v_i) = w_i$ con $i = 1,2,3,\dots,n$.

En conclusión existe la transformación lineal única y $T(v_i) = w_i$ con $i = 1,2,3,\dots,n$.

Participantes: José Meléndez, Wilmer Perozo y Rafael Torres.