Karl Entacher

Beispiele zur Trigonometrie am allgemeinen Dreieck aus SRDP Aufgaben

Adaptiert und erweitert aus dem Aufgabenpool Bereich Angewandte Mathematik (durch eigene Fragestellungen in blauer Schrift ergänzt bzw. abgeändert) Quelle: https://prod.aufgabenpool.at/ (Feb. 2024), Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (siehe auch https://www.matura.gv.at/)

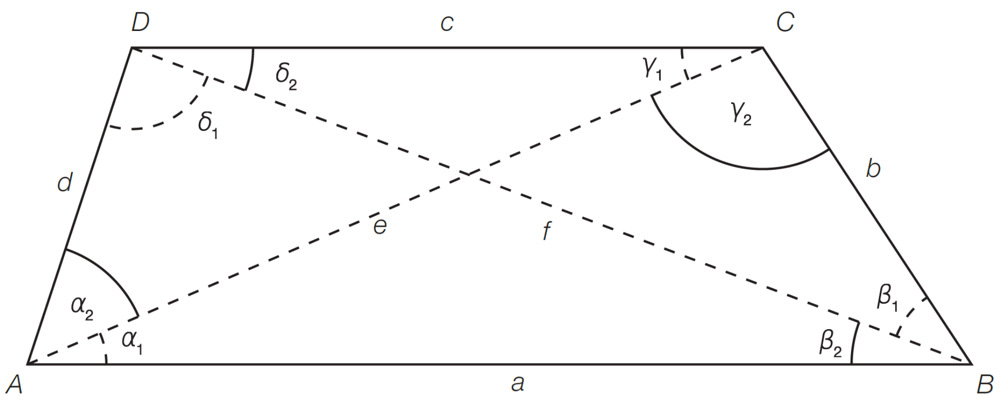
A. Fernsehturm (B 250, B 601)

1) Ein Turm steht senkrecht auf einem horizontalen Platz. Auf diesem Turm befindet sich eine senkrechte Antenne, deren Höhe gemessen werden soll. Von einem Messgerät, das sich auf dem horizontalen Platz *s* Meter (m) vom Turm entfernt befindet, erscheint die Antenne unter einem Sehwinkel α. Der Fußpunkt der Antenne erscheint unter einem Höhenwinkel β.

a) Zeichnen Sie die angegebenen Größen in die obige Skizze ein.

b) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Antennenhöhe, abhängig von den Größen s, α und β, auf.

Der Platz, auf dem der Turm steht, hat die Form eines Trapezes. Die nachstehende Grafik zeigt den Platz



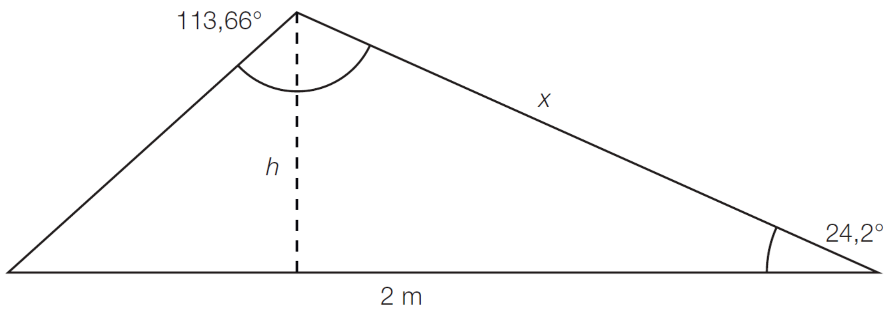
c) Berechnen Sie die Länge der Strecke a wenn $b = 32$ m und die Winkel $\alpha_1 = 23°$ und $\gamma_2 = 100°$

d) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Länge der Diagonale f bei gegebener Seitenlänge d und a und den Winkeln α_1 und α_2.

e) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. [1 aus 5]

$\frac{\sin(\delta_1)}{e} = \frac{\sin(\gamma_1)}{d}$	☐
$\frac{\sin(\gamma_2)}{a} = \frac{\sin(\gamma_1)}{d}$	☐
$\frac{\sin(\alpha_1)}{b} = \frac{\sin(\beta_1)}{c}$	☐
$\frac{\sin(\gamma_1)}{d} = \frac{\sin(\delta_1)}{c}$	☐
$\frac{\sin(\alpha_1)}{b} = \frac{\sin(\gamma_2)}{a}$	☐

Für Konzerte wird der Platz vor dem Turm in Sektoren aufgeteilt. Die nachstehende Skizze veranschaulicht die Fläche eines bestimmten Sektors, wobei die Seitenlängen in Metern (m) angegeben sind.

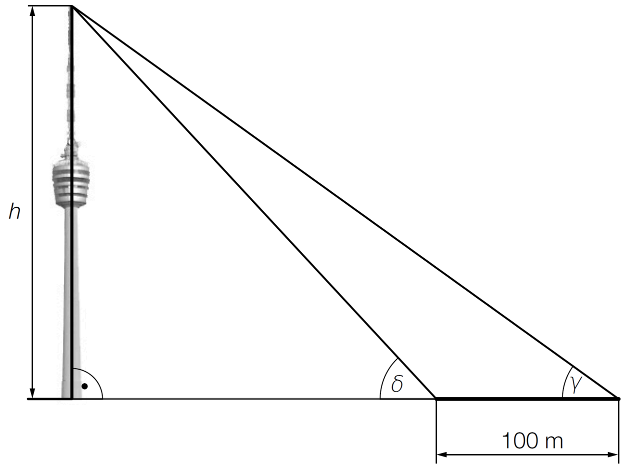


f) Berechnen Sie die Seitenlänge x aus den gegebenen Größen.

g) Begründen Sie mathematisch, warum die Berechnung der Länge x mit folgender Berechnung falsch ist: $x = \sin(24{,}2°) \cdot h$.

h) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks

2) Der Stuttgarter Fernsehturm ist ein Wahrzeichen der Stadt Stuttgart. Er ist einer der ersten Türme mit Turmkorb. Zur Bestimmung der Höhe h des Stuttgarter Fernsehturms wurde die nachstehende nicht maßstabsgetreue Skizze erstellt. Es gilt: $\gamma = 36{,}1°$ und $\delta = 47{,}7°$.

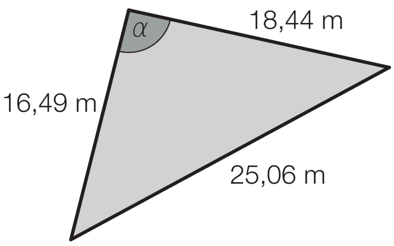


a) Berechnen Sie die Höhe nur unter Verwendung von Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck.

b) Berechnen Sie die Höhe unter Verwendung des Sinussatz am allgemeinen Dreieck.

B. Grundstücke (B 518, B 537, B 186, B 293)

1) In der nachstehenden Abbildung ist ein dreieckiges Grundstück dargestellt.



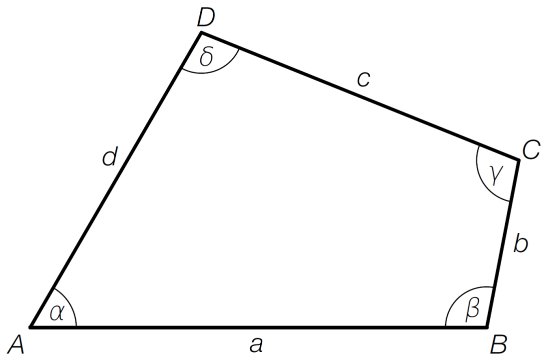
a) Begründen Sie mithilfe der gegebenen Seitenlängen, warum der Winkel α der größte Winkel des Dreiecks ist.

b) Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Pythagoras, dass α kein rechter Winkel ist.

c) Berechnen Sie den Winkel α.

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Grundstücks.

2) Die nachstehende Abbildung zeigt die Skizze eines Baugrundstücks.

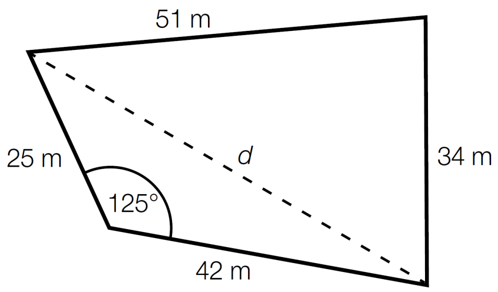


a) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts *F* des skizzierten Baugrundstücks auf.

$F =$ ______________________________

b) Berechnen Sie die Länge der Diagonalen BD für $a = 40$ m, $d = 30$ m und $\alpha = 60°$.

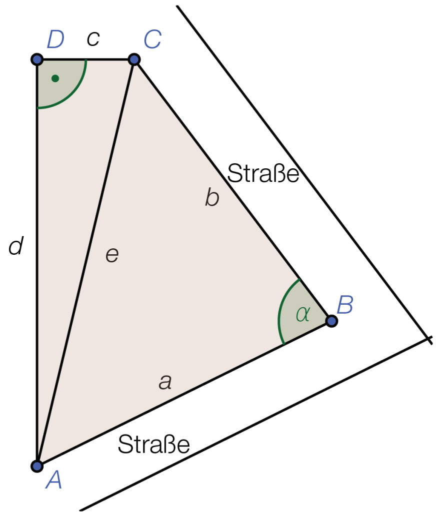
3) Zur Vergrößerung seiner Weideflächen muss ein Landwirt ein sumpfiges Landstück trockenlegen. Er möchte den Flächeninhalt des Grundstücks berechnen. Dazu misst er die Länge der Seiten und einen Winkel und fertigt die folgende Skizze an:



a) Berechnen Sie die Länge der Diagonalen *d*.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Grundstücks

4) Ein zur Verfügung stehendes viereckiges Gelände wird an zwei Seiten durch die geradlinig verlaufenden Straßenstücke a = 486 m und b = 480 m begrenzt. Die beiden anderen Begrenzungslinien (c = 143 m und d) schließen einen rechten Winkel ein. Die Eckpunkte A und C des Geländes sind 621 m voneinander entfernt.

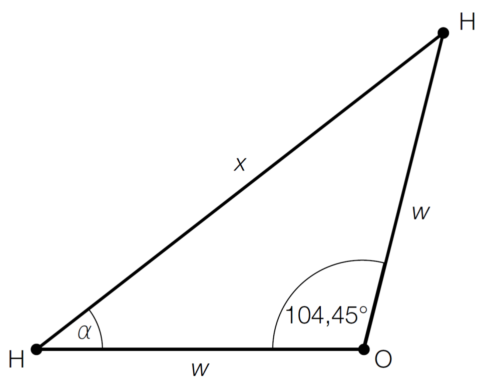


a) Berechnen Sie den Winkel α, den die beiden Straßenstücke miteinander einschließen.

b) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A des gesamten Geländes unter Verwendung der gegebenen Größen.

C. Wasser (B 550, B 586, B 564, B 040)

1) In der nachstehenden Abbildung ist ein Wassermolekül (H_2O), bestehend aus zwei Wasserstoffatomen (H) und einem Sauerstoffatom (O), als gleichschenkliges Dreieck dargestellt.
Es gilt: w = 0,09584 Nanometer (nm).

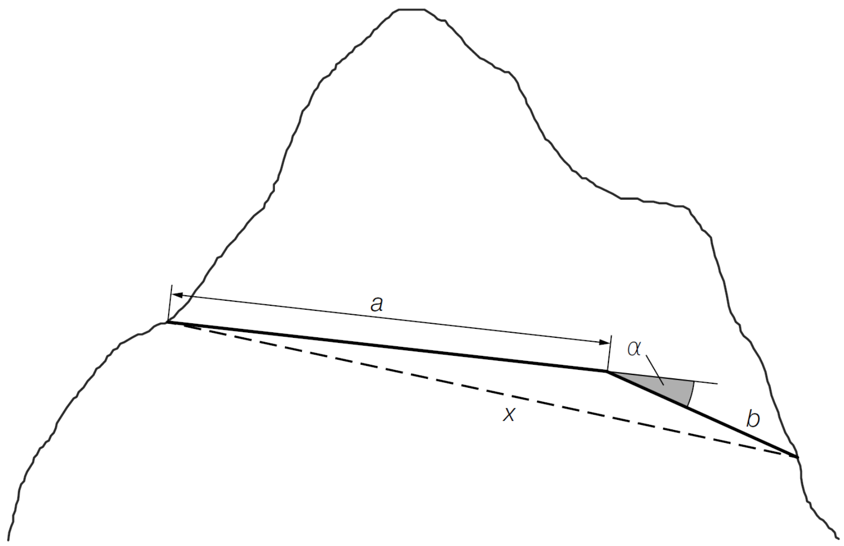


a) Berechnen Sie die Seitenlänge x.

b) Kreuzen Sie denjenigen Zusammenhang an, der im obigen Dreieck *nicht* gilt.

$2 \cdot \alpha = 180° - 104{,}45°$	☐
$\frac{w}{\sin(\alpha)} = \frac{x}{\sin(104{,}45°)}$	☐
$w^2 = x^2 + w^2 - 2 \cdot x \cdot w \cdot \cos(\alpha)$	☐
$\cos(\alpha) = \frac{x}{2 \cdot w}$	☐
$\sin(\alpha) = \frac{w}{x}$	☐

2) Zwei unterirdische Stollen einer Wasserversorgung, ein Stollen mit der Länge *a* und ein Stollen mit der Länge *b*, sollen durch einen neuen Stollen mit der Länge *x* ersetzt werden (siehe nachstehende nicht maßstabsgetreue Abbildung).



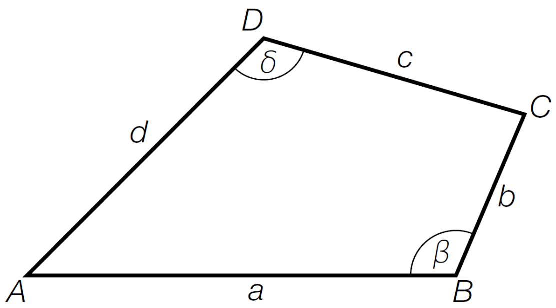
a) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von x auf. Verwenden Sie dabei *a*, *b* und α.

Es gilt: $a = 8$ km, $b = 3{,}6$ km und $\alpha = 11{,}9°$

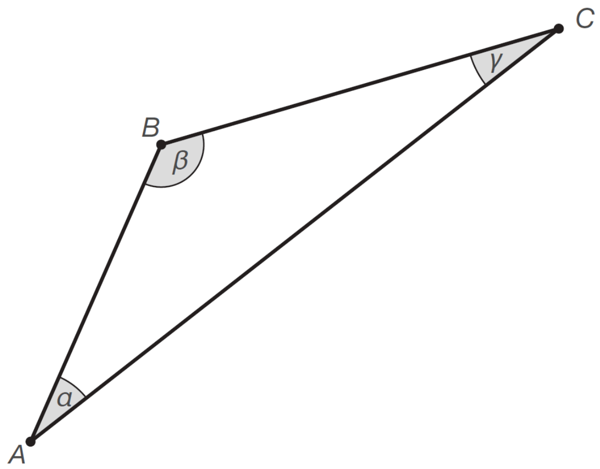
b) Berechnen Sie die Länge *x* des neuen Stollens.

c) Berechnen Sie den Winkel zwischen dem Stollen mit der Länge x und dem Stollen mit der Länge *a*.

3) Die Grundfläche eines Beckens in einem Wasserpark entspricht dem Viereck ABCD (siehe nachstehende Abbildung). Es gilt: $a = 3$ m, $b = 1{,}2$ m, $c = 1{,}9$ m, $d = 2{,}4$ m und $\beta = 113°$.
Berechnen Sie den Winkel δ.

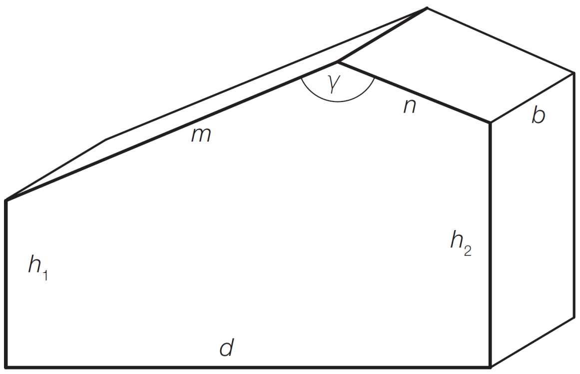


4) Wasserrohre sollen, wie in der nachstehenden Skizze vereinfacht dargestellt, geradlinig zwischen den Punkten A, B und C verlegt werden. Die folgenden Daten des Dreiecks ABC sind bekannt: AB = 50 m, AC = 80 m, $\gamma = 20°$. Der Winkel β ist ein stumpfer Winkel. Berechnen Sie die fehlenden Bestimmungsstücke dieses Dreiecks (beide Winkel und Länge der fehlenden Seite).



D. Konstruktionen (B 500, B 505, B 575, B 476, B 378)

1) Ein Haus soll eine rechteckige Grundfläche und lotrechte Wände haben. Es ist in der nachstehenden Skizze modellhaft dargestellt.

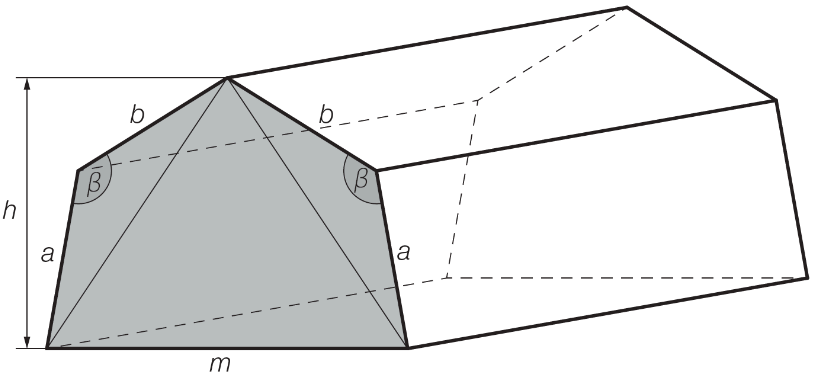


a) Zeichnen Sie in der obigen Skizze denjenigen Winkel α ein, für den gilt: $\frac{\sin(\alpha)}{n} = \frac{\sin(\gamma)}{\sqrt{(h_2 - h_1)^2 + d^2}}$

b) Begründen Sie, warum der Winkel α ein spitzer Winkel sein muss, wenn gilt: $\gamma \approx 139°$.

c) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens V des oben dargestellten Hauses. Verwenden Sie dabei die eingezeichneten Seitenlängen und den Winkel γ.

2) In der nachstehenden Abbildung ist ein Gewächshaus in Form eines Prismas dargestellt.

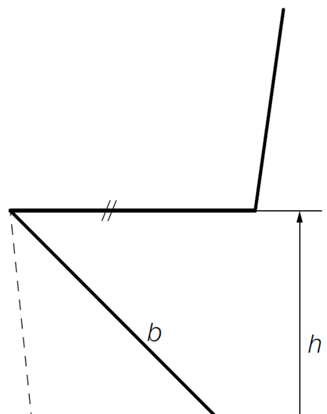


a) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche auf. Verwenden Sie dabei die Längen *a*, *b*, *m* und *h* sowie den Winkel β.

Es gilt: *a* = 2 m, *h* = 3 m, *m* = 4 m, β = 132°

b) Berechnen Sie die Länge *b*.

3) Eine Tischlermeisterin baut einen Zickzack-Stuhl entsprechend der nachstehenden Konstruktion nach. Es gilt: a = 39 cm, b = 61,5 cm, α = 45°

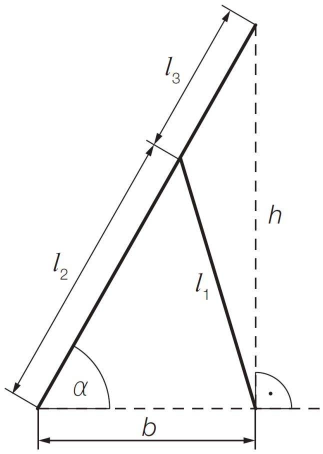


a) Berechnen Sie den stumpfen Winkel γ.

Die Sitzhöhe des Original-Stuhls beträgt 43 cm.

b) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Sitzhöhe *h* des nachgebauten Stuhls von der Sitzhöhe des Originals abweicht.

4) In der nachstehenden Abbildung sind Teile eines Hochstuhls schematisch dargestellt.



a) Erstellen Sie mithilfe von l_1, l_2 und b eine Formel zur Berechnung von α.

b) Markieren Sie in der obigen Abbildung die Winkel β und γ, für die gilt: $\frac{\sin(\beta)}{h} = \frac{\sin(\gamma)}{l_3}$

5) Das Maria-Theresien-Denkmal in Wien wird vermessen. Es werden die Höhenwinkel α = 45,38° und β = 38,19° gemessen. Weiters ist die in der nachstehenden Abbildung eingetragenen Länge bekannt (Abb. nicht maßstabsgetreu). Berechnen Sie die in der Abbildung mit *x* bezeichnete Länge.

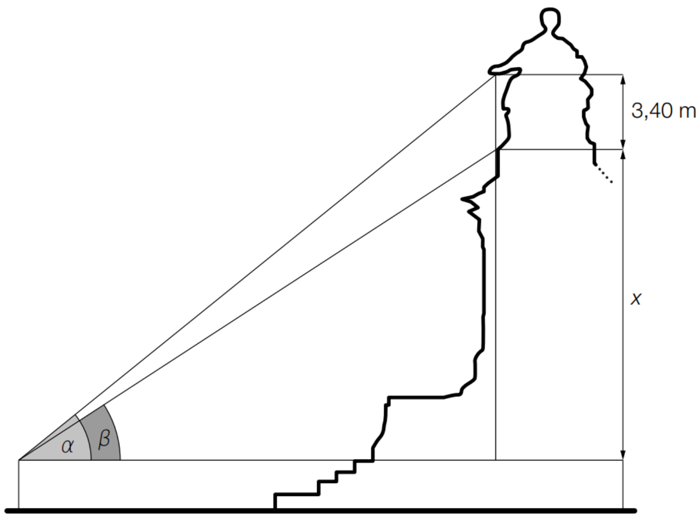
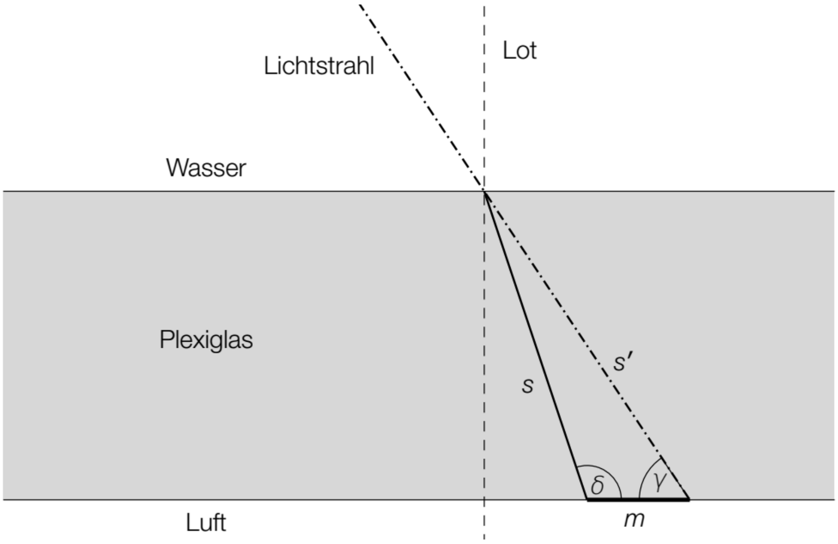


Abbildung nicht maßstabgetreu!

6) Die nachstehende nicht maßstabsgetreue Grafik zeigt den Verlauf eines Lichtstrahls, der auf eine Plexiglasscheibe trifft. Das Lot ist hier eine Gerade, die normal auf die Plexiglasscheibe steht. Dabei gilt: s = 4,52 mm und s′ = 4,77 mm. Außerdem kennt man den Winkel γ = 57°.
s ... Weg, den der Lichtstrahl im Plexiglas zurücklegt

s′ ... Weg, den der Lichtstrahl ohne Ablenkung zurücklegen würde



a) Berechnen Sie den stumpfen Winkel δ.

b) Berechnen Sie die Länge der Strecke m.