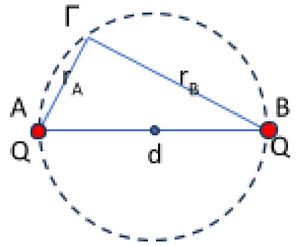
# Ψάχνοντας σημείο στον κύκλο όπου Δυναμικό και Ένταση Η.Π να έχουν min τιμή.

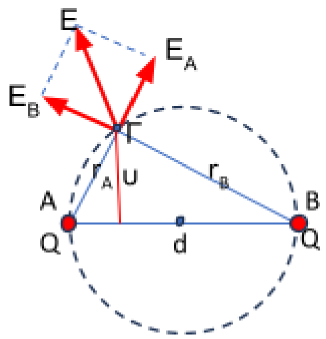
Στα άκρα Α και Β της διαμέτρου κύκλου μήκους d υπάρχουν σταθερά τοποθετημένα δύο θετικά φορτισμένα μικρά σφαιρίδια με ίσα φορτία Q. Σε ποιό σημείο του πάνω ημικυκλίου α) η ένταση και β)το δυναμικό του πεδίου που δημιουργούν τα δύο φορτία έχουν ελάχιστη τιμή και ποια είναι αυτή.




Γνωστά τα : $k_c$ , Q , d

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

α) Έστω σε σημείο Γ η ένταση του ΗΠ είναι min.




$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B \Rightarrow E = \sqrt{E_A^2 + E_\Gamma^2} \Rightarrow$$

$$E = \sqrt{\left(k\frac{Q}{r_A^2}\right)^2 + \left(k\frac{Q}{r_B^2}\right)^2} = kQ\sqrt{\frac{1}{r_A^4} + \frac{1}{r_B^4}} \Rightarrow$$

$$E = kQ\sqrt{\frac{r_A^4 + r_B^4}{r_A^4 \cdot r_B^4}} \Rightarrow E = \frac{kQ}{r_A^2 \cdot r_B^2}\sqrt{r_A^4 + r_B^4} \quad (1)$$

Γεωμετρική παρέμβαση: στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΒ το εμβαδόν με δύο τρόπους

$$E = \frac{1}{2}r_A r_B = \frac{1}{2}d\upsilon \Rightarrow r_A r_B = d\upsilon \, (2)$$

και από το Πυθαγόρειο :

$$d^2 = r_A^2 + r_B^2 \Rightarrow d^4 = r_A^4 + r_B^4 + 2r_A^2 \cdot r_B^2 \Rightarrow r_A^4 + r_B^4 = d^4 - 2r_A^2 \cdot r_B^2 \xrightarrow{(2)}$$

$$r_A^4 + r_B^4 = d^4 - 2\upsilon^2 d^2 \quad (3)$$

$$\text{Από την } (1) \xrightarrow[(3)]{(2)}$$

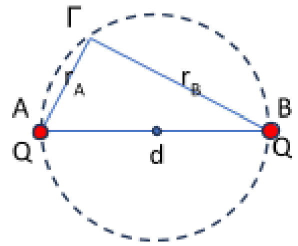
$$E = \frac{kQ}{d^2\upsilon^2}\sqrt{d^4 - 2\upsilon^2 d^2} = \frac{kQ}{d^2\upsilon^2}d\sqrt{d^2 - 2\upsilon^2} \Rightarrow E = \frac{kQ}{d\upsilon^2}\sqrt{d^2 - 2\upsilon^2} \quad (4)$$

Παρατηρώντας την σχέση (4) βλέπουμε ότι για να είναι min η τιμή της Ε πρέπει η τιμή του ύψους υ να είναι max δηλαδή υ=d/2 άρα στη κορυφή του πάνω ημικυκλίου

Άρα από την (4) θα πάρουμε:

$$E=\frac{kQ}{d\upsilon^2}\sqrt{d^2-2\upsilon^2}\xrightarrow{\upsilon=\frac{d}{2}}E=\frac{kQ}{d\frac{d^2}{4}}\sqrt{d^2-2\frac{d^2}{4}}\Rightarrow E=\frac{4kQ}{d^3}d\sqrt{\frac{1}{2}}\Rightarrow E_{\min}=2\sqrt{2}\frac{kQ}{d^2}$$

β) Το δυναμικό είναι μονόμετρο μέγεθος. Έστω σε σημείο Γ το δυναμικό του ΗΠ είναι min.




$$V=k\frac{Q}{r_A}+k\frac{Q}{r_B}\Rightarrow V=kQ\left(\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}\right)\Rightarrow$$

$$V=kQ\frac{r_A+r_B}{r_Ar_B}\xrightarrow{\wedge 2}V^2=k^2Q^2\frac{(r_A+r_B)^2}{(r_Ar_B)^2}\Rightarrow$$

$$V^2=k^2Q^2\frac{r_A^2+r_B^2+2r_Ar_B}{(r_Ar_B)^2}\quad(1)$$

Γεωμετρική παρέμβαση: στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΒ το εμβαδόν με δύο τρόπους

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}r_Ar_B=\frac{1}{2}d\upsilon\Rightarrow r_Ar_B=d\upsilon\,(2)$$

και από το Πυθαγόρειο : $d^2=r_A^2+r_B^2\quad(3)$

$$\text{Από την }(3)\xrightarrow[(3)]{(2)}V^2=k^2Q^2\frac{d^2+2\upsilon d}{\upsilon^2d^2}\Rightarrow V^2=k^2Q^2\left(\frac{1}{\upsilon^2}+\frac{2}{\upsilon d}\right)\;(4)$$

Παρατηρώντας την σχέση (4) βλέπουμε ότι για να είναι min η τιμή του V πρέπει η τιμή του ύψους υ να είναι max δηλαδή υ=d/2 άρα στη κορυφή του πάνω ημικυκλίου

$$\text{Από την }(4)\xrightarrow{\upsilon=\left(\frac{d}{2}\right)}V^2=k^2Q^2\left(\frac{1}{\frac{d^2}{4}}+\frac{2}{\frac{d^2}{2}}\right)=k^2Q^2\frac{8}{d^2}\Rightarrow V_{\min}=2\sqrt{2}\frac{kQ}{d}$$

## Παρατήρηση

**Αν το φορτία είναι ετερόσημα και ίσα απολύτως:**
**α) για την min τιμή της Έντασης δεν αλλάζει η θέση ούτε η τιμή ,απλά αλλάζει η κατεύθυνση ανάλογα.**

**β) για την ελάχιστη τιμή του Δυναμικού δεν αλλάζει η θέση απλά η min τιμή μηδενίζεται και βέβαια αυτό θα φανεί εξ'αρχής καθ'όσον η σχέση του Δυναμικού είναι αλγεβρική.**

**Όμως εδώ ζητάμε το Vmin για το οποίο ο Δ. Μάργαρης έγραψε:**

«Ελάχιστο είναι το πλην άπειρο κοντά στο αρνητικό φορτίο και μέγιστο το συν άπειρο κοντά στο θετικό.»

***Παντελεήμων Παπαδάκης***

***05/11/2024***