Задания второго этапа республиканской олимпиады

VIII класс

1. Найдите произведение трех натуральных чисел p, p+20 и $p^2 + 20$, если известно, что эти числа простые.

2. Верно ли, что если $a^3 + b^3 > 0$, то $a + b > 0$? Ответ обоснуйте.

3. Найдите все пары (x; y) целых чисел x и y, удовлетворяющих равенству $x^2 - 3xy + 2y^2 = 5$.
4. Точки M и L – середины сторон AB и BC соответственно равнобедренного треугольника ABC (BC=AC). Точка N на стороне AC такова, что NA+AM=LN=LM. Найдите угол NLM.

5. Перед вами коробка, в которой лежат 100 футболок трёх различных цветов. Вам известно, что если наугад вытащить из коробки 25 футболок, то среди них обязательно найдётся 11 одноцветных футболок. От вас требуют, чтобы вы вытащили из коробки наугад несколько футболок. Если среди них не будет 30 одноцветных, вас накажут. Какое наименьшее число футболок вам надо вытащить, чтобы гарантированно избежать наказания?

Задания второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»
2021/2022 учебный год
IX класс

1. Докажите, что если число в 42 раза больше суммы его цифр, то это число делится на 378.

2. Найдите минимальное возможное значение суммы $a + b$ натуральных чисел a и b, если известно, что квадратные уравнения $x^2 + ax + b + 1 = 0$ и $x^2 + bx + a + 1 = 0$ имеют по крайней мере один общий действительный корень.

3. Найдите все пары (x; y) целых чисел x и y, удовлетворяющих равенству $2x^2 - 2xy + 9x + y = 2$.

4. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отмечена точка D, такая что $BD = BC$. На стороне AB отмечена точка E, такая что $EB = ED$, а на продолжении отрезка DE за точку E — точка F, такая что $FD = BC$. Точка G — основание перпендикуляра, опущенного из точки F на сторону AB. Оказалось, что $GB = GF$. Найдите угол BAC.

5. По кругу стоит 2021 лампочка. Изначально все лампочки потушены. За ход разрешается зажечь лампочку если две соседние лампочки либо обе зажжены, либо обе потушены. Какое наибольшее число лампочек можно зажечь таким образом?

Задания второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»
2021/2022 учебный год

X класс

1. Пусть $S(n)$ – сумма всех цифр в десятичной записи натурального числа n. Например, $S(2003)=2+0+0+3=5$, $S(1999)=1+9+9+9=28$.

2. Найдите все натуральные n, для которых $n = 26S(n)$.
   Найдите численное значение выражения
   $$(2x_1^3 + 15x_1^2 - 16)(2x_2^3 + 15x_2^2 - 16),$$
   где x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 + 5x - 11 = 0$.

3. Найдите все функции, удовлетворяющие тождеству
   $$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$$
   на всей числовой оси.

4. Внутри параллелограмма $ABCD$ с углом $\angle B = 105°$ расположена точка M, такая что треугольник BMC равносторонний и $\angle CMD = 135°$. Точка K - середина стороны AB. Найдите $\angle BKC$.

5. Доска $8x8$ покрашена в белый цвет. Павел и Вадим ходят по очереди, начинает Павел. В свой ход игрок перекрашивает белую клетку в черный цвет. Игрок проигрывает, если после его хода на доске впервые нельзя выбрать две соседние по стороне белые клетки. Кто выигрывает при правильной игре?

Задания второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»
2021/2022 учебный год
(*время выполнения заданий - 5 ч*)

Пользоваться калькулятором не разрешается.

XI класс

1. Последовательность положительных чисел $\{a_i\}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$a_1 + a_2 = 4000 \text{ и } a_{n-1} \bullet a_{n+1} = a_n \text{ для всех n=2,3,4….}$$

Найдите наименьшее возможное значение суммы $a_{4000} + a_{4001}$.

2. Действительные числа a и b таковы, что

$$\{26a^2 + 42ab + 17b^2 = 10,\ 10a^2 + 18ab + 8b^2 = 6.$$

Найдите наибольшее возможное значение величины $|b|$.

3. Найдите все функции, удовлетворяющие тождеству

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

на всей числовой оси.

4. На продолжении гипотенузы *AB* прямоугольного треугольника *ABC* за точку *B* отмечена точка *D* такая, что *DC=2BC*. Точка *H* – основание высоты, проведенной из вершины *C* прямого угла.
Найдите угол *BDC*, если известно, что расстояние от точки *H* до катета *BC* равно длине отрезка *HA*.

5. На доске написаны числа 2021, 2022, ..., 4042. Саша и Толя играют в следующую игру, делая ходы по очереди. За ход можно стереть с доски одно из чисел и написать вместо него два натуральных числа с такой же суммой. Тот, после чьего хода все числа на доске станут равными, выигрывает. Кто выигрывает при правильной игре, если начинает Саша?