

Δύο «ταλαντωτικά» θέματα για τη δική μας Τράπεζα

Θέμα Α

Ένα σώμα μάζας m εκτελεί α.α.τ. σε οριζόντιο λείο δάπεδο και κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης η μέγιστη επιτάχυνση που επιτυγχάνει έχει μέτρο $a_{\max}$. Αν το πλάτος της ταλάντωσης είναι A , η ενέργεια της ταλάντωσης είναι:

α) $E = \frac{1}{2} m a_{\max} A$ β) $E = m a_{\max} A$ γ) $E = \frac{1}{4} m a_{\max} A$

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση και δικαιολογείστε την επιλογή σας.

Απάντηση

Η ενέργεια της ταλάντωσης είναι

$$E = \frac{1}{2} D A^2 \quad (1)$$

Θέλουμε μια σχέση, που «λείπει» η σταθερά D , αλλά υπάρχει η μάζα m και η μέγιστη επιτάχυνση $a_{\max}$.

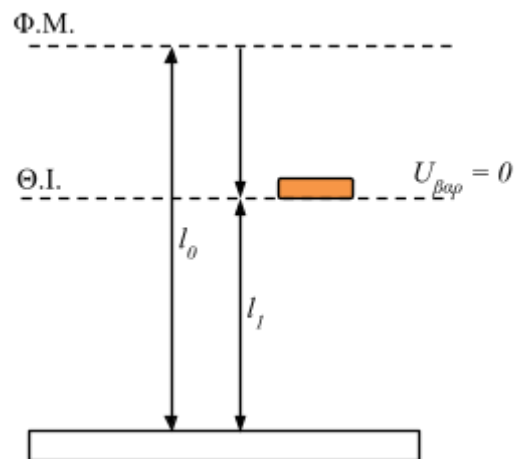
$$\left. \begin{array}{l} D = m\omega^2 \\ a_{\max} = A\omega^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \frac{D}{a_{\max}} = \frac{m}{A} \Leftrightarrow D = \frac{m a_{\max}}{A} \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow E = \frac{1}{2} \frac{m a_{\max}}{A} A^2 \Leftrightarrow E = \frac{1}{2} m a_{\max} A$$

Σωστή απάντηση $\rightarrow \alpha$

Θέμα Β

Ένα σώμα μάζας $m = 0,25\text{kg}$ είναι στερεωμένο στην κορυφή ενός κατακόρυφου ελατηρίου που είναι α στο πάτωμα. Το φυσικό μήκο τηρίου είναι $l_0 = 8\text{cm}$ και το μήκι τηρίου όταν το σώμα βρίσκεται σε ισορροπία είναι $l_1 = 5,5\text{cm}$. Όταν το σώμα προσμεί στη θέση ισορροπίας του, του δίνεται ένα απότομο χτύπημα προς τα κάτω με σφουρί, έτσι ώστε η αρχική του ταχύτητα να έχει μέτρο $v_0 = 0,4\text{m/s}$. Θεαρούμε θετική φορά προς τα κάτω.



- i) Σε ποιο μέγιστο ύψος πάνω από το δάπεδο υψώνεται κάθε φορά το σώμα; Το ελατήριο φτάνει στο φυσικό του μήκος κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης; Ποια ελάχιστη αρχική ταχύτητα πρέπει να δοθεί στο σώμα ώστε το ελατήριο να φτάνει οριακά το φυσικό του μήκος;
- ii) Πόσος χρόνος χρειάζεται για να γίνει το μήκος του ελατηρίου $l_2 = 6,5\text{cm}$ για πρώτη φορά μετά την έναρξη της ταλάντωσης;
- iii) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της αλγεβρικής τιμής της δύναμης του ελατηρίου σε συνάρτηση με το χρόνο και να κάνετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση για μια περίοδο.

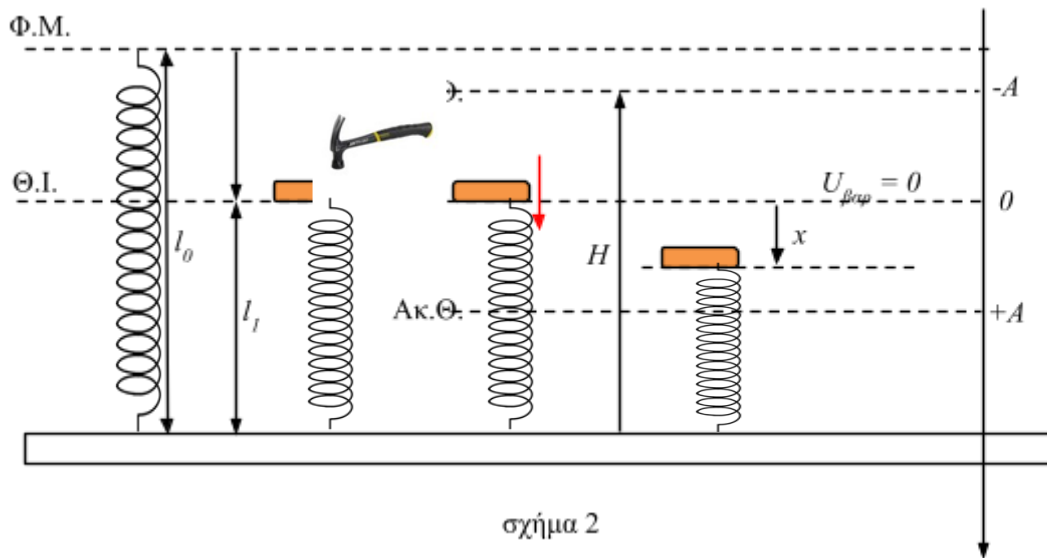
iv) Να βρείτε σε συνάρτηση με την απομάκρυνση, τις εξισώσεις: Ενέργειας ταλάντωσης, Δυναμικής Ενέργειας ταλάντωσης, Κινητικής Ενέργειας, Βαρυτικής Δυναμικής Ενέργειας (με επίπεδο αναφοράς τη θέση ισορροπίας) και Δυναμικής Ενέργειας ελατηρίου.

v) Να κάνετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις Ενέργειας ταλάντωσης, Δυναμικής Ενέργειας ταλάντωσης, Κινητικής Ενέργειας, Βαρυτικής Δυναμικής Ενέργειας (με επίπεδο αναφοράς τη θέση ισορροπίας) και Δυναμικής Ενέργειας ελατηρίου, σε συνάρτηση με την απομάκρυνση. Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση

i) Το σώμα αρχικά ισορροπεί με το ελατήριο συμπιεσμένο κατά $\Delta l_0 = l_1 - l_0 = 2,5 \text{ cm}$.

Με θετική φορά προς τα κάτω (σχήμα 2):



$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F_{\text{ελ}} + W = 0 \Leftrightarrow -k \cdot \Delta l_0 + mg = 0 \Leftrightarrow k = \frac{mg}{\Delta l_0} \Leftrightarrow k = \frac{2,5}{2,5 \cdot 10^{-2}} \Leftrightarrow k = 100 \text{ N/m}$$

Με το χτύπημα το σώμα θα εκτελέσει α.α.τ. με γωνιακή συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{0,25}} = 20 \text{ rad/s}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και η αρχική ταχύτητα που του δίνουμε θα είναι η μέγιστη ταχύτητα της α.α.τ.

$$v_{\text{max}} = A \cdot \omega \Leftrightarrow A = \frac{0,4}{20} \Leftrightarrow A = 0,02 \text{ m}$$

Από το σχήμα 1 βλέπουμε ότι η ανώτερη θέση απέχει από το έδαφος

$$H = l_1 + A = 5,5 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 7,5 \text{ cm}$$

Όχι δε φτάνει στη θέση φυσικού μήκους αφού $H < l_0$.

Αν θέλουμε να φτάσει τη θέση Φ.Μ. θα πρέπει να δώσουμε αρχική ταχύτητα v_0' ώστε

$$A' = \Delta l_0 \Leftrightarrow \frac{v_0'}{\omega} = \Delta l_0 \Leftrightarrow v_0' = \omega \cdot \Delta l_0 \Leftrightarrow$$

$$v_0' = 20 \cdot 0,025 \Leftrightarrow v_0' = 0,5 \text{ m/s}$$

ii) Ο συντομότερος τρόπος εύρεσης χρονικού διαστήματος μετάβασης μεταξύ δύο θέσεων σε ταλάντωση, είναι με το στρεφόμενο διάνυσμα.

Οι αρχικές συνθήκες της α.α.τ. είναι:

$$t_0 = 0s, x_0 = 0m, v > 0, \text{ άρα η αρχική}$$

φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = 0rad$.

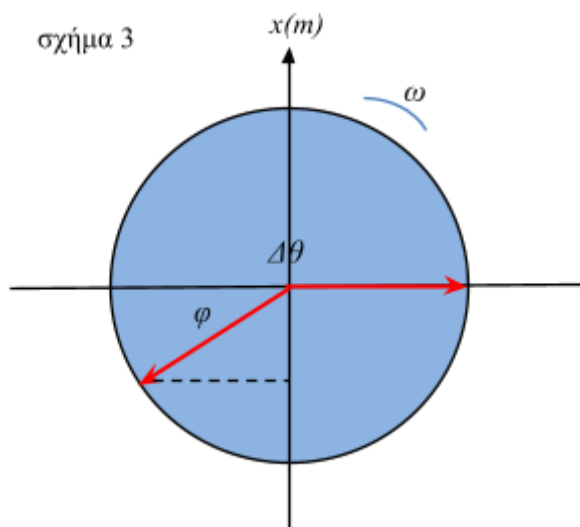
Το σώμα θα βρεθεί στη θέση $x = -|l_2 - l_1| = -0,01m$ (σχήμα 3).

Επειδή $\eta\mu\varphi = \frac{0,01}{0,02} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} rad$, η γωνία που διαγράφεται από το στρεφόμενο διάνυσμα (σχήμα 3) είναι

$$\Delta\theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} rad$$

Όμως

$$\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t \Leftrightarrow \frac{7\pi}{6} = 20 \cdot \Delta t \Leftrightarrow \Delta t = \frac{7\pi}{120} s$$



iii) Η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{10} s$

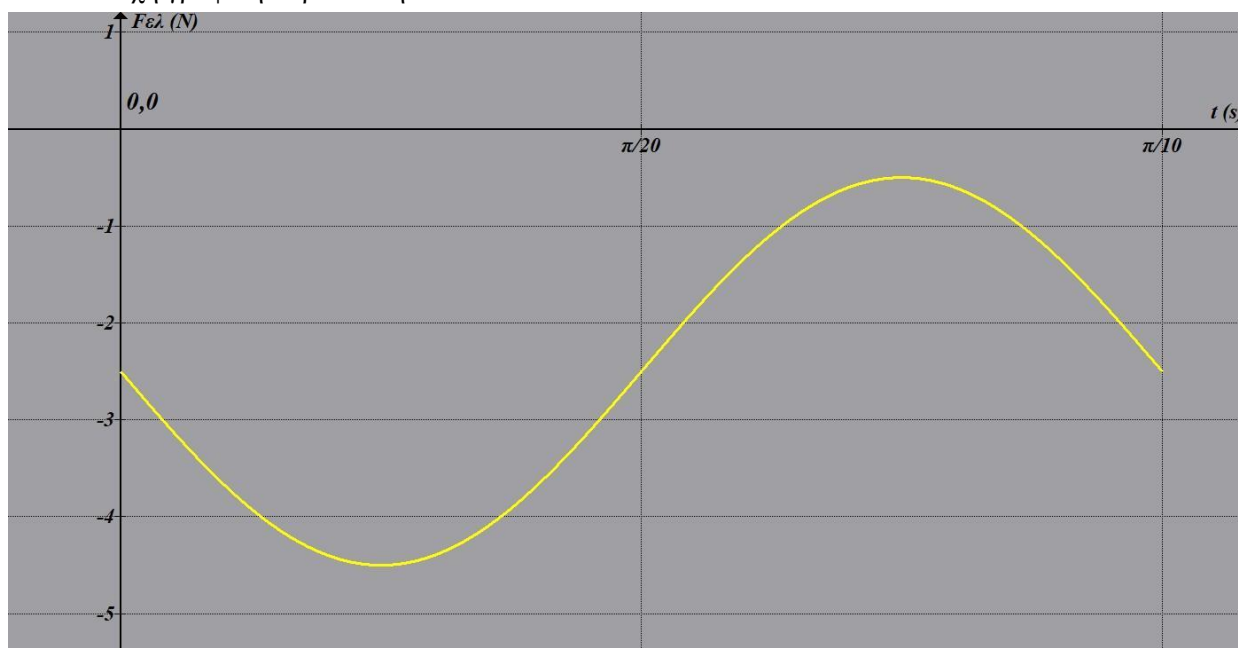
Η αλγεβρική τιμή της δύναμης του ελατηρίου είναι

$$F_{ελ} = -k \cdot \Delta l \Leftrightarrow F_{ελ} = -k \cdot (\Delta l_0 + x) \Leftrightarrow F_{ελ} = -k \cdot [\Delta l_0 + A\eta\mu(\omega t)]$$

Με αντικατάσταση έχουμε:

$$F_{ελ} = -100 \cdot [0,025 + 0,02\eta\mu(20t)] \Leftrightarrow F_{ελ} = -2,5 - 2\eta\mu(20t) \text{ (S.I.)}$$

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση θα είναι



Παρατηρούμε ότι έχει διαρκώς αρνητική αλγεβρική τιμή. Λογικό, αφού το σώμα ταλαντώνεται χωρίς ποτέ να φτάνει στο φυσικό του μήκος και το διάνυσμα $\vec{F}_{ελ}$ κοιτάζει διαρκώς προς τα πάνω (αρνητική φορά).

iv) Ενέργεια ταλάντωσης

$$E_T = \frac{1}{2}kA^2 \Leftrightarrow E_T = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 0,02^2 \Leftrightarrow E_T = 0,02J, \quad -0,02m \leq x \leq +0,02m$$

Δυναμική Ενέργεια ταλάντωσης

$$U_T = \frac{1}{2}kx^2 \Leftrightarrow U_T = 50 \cdot x^2 \text{ (S.I.)}, \quad -0,02m \leq x \leq +0,02m$$

Κινητική Ενέργεια ταλάντωσης:

$$K = E_T - U_T \Leftrightarrow K = 0,02 - 50x^2 \text{ (S.I.)}, \quad -0,02m \leq x \leq +0,02m$$

Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια

Πρέπει να προκύπτει θετική όταν το σώμα βρίσκεται πάνω από το επίπεδο αναφοράς και αρνητική όταν βρίσκεται κάτω από το επίπεδο αναφοράς. Άρα:

$$U_{βαρ} = -mgx \Leftrightarrow U_{βαρ} = -2,5 \cdot x \text{ (S.I.)}, \quad -0,02m \leq x \leq +0,02m$$

Δυναμική Ενέργεια ελατηρίου

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 \Leftrightarrow U_{ελ} = \frac{1}{2}k(\Delta l_0 + x)^2 \Leftrightarrow$$

$$U_{ελ} = 50 \cdot (0,025 + x)^2 \text{ (S.I.)}, \quad -0,02m \leq x \leq +0,02m$$

v) Οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις φαίνονται στην παρακάτω εικόνα, όπου:

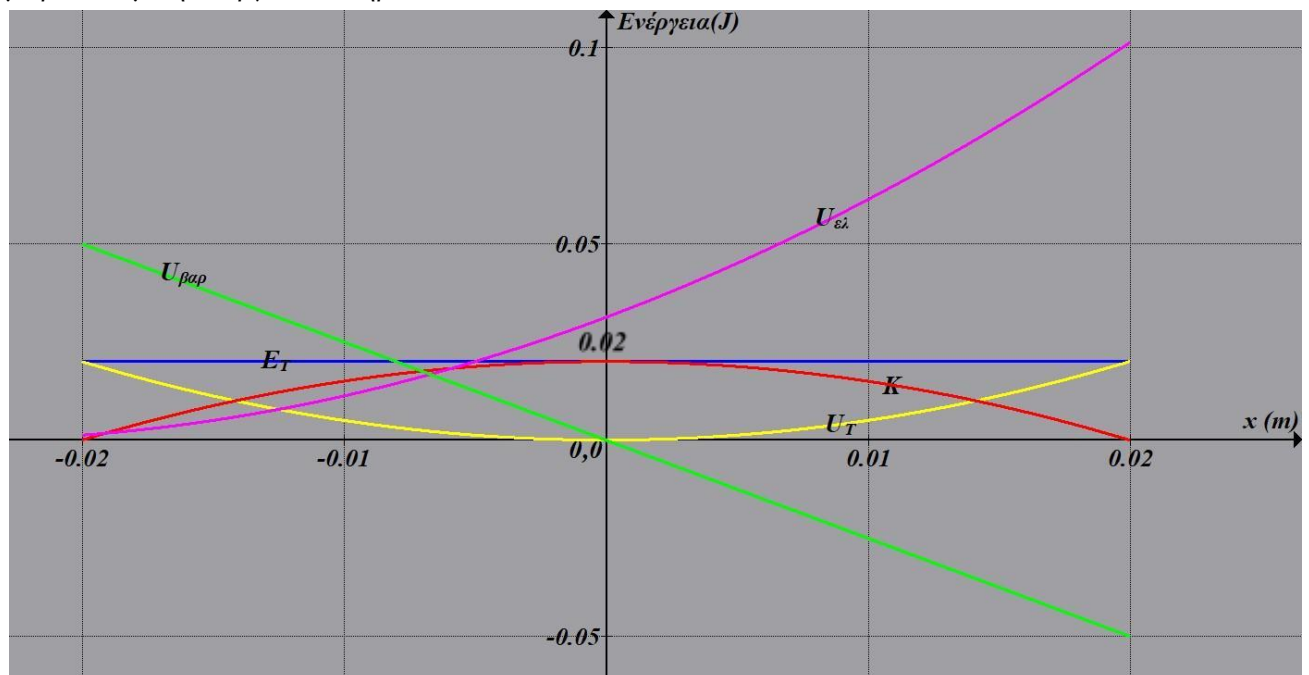
μπλε: Ενέργεια ταλάντωσης

κίτρινη: Δυναμική Ενέργεια ταλάντωσης

κόκκινη: Κινητική Ενέργεια ταλάντωσης

πράσινη: Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια

μωβ: Δυναμική Ενέργεια ελατηρίου



Σχόλιο

Βλέπουμε ότι $U_T \neq U_{ελ}$. Γιατί;

Η Δυναμική Ενέργεια ταλάντωσης έχει σημείο αναφοράς πάντα τη θέση ισορροπίας Θ.Ι

Η Δυναμική Ενέργεια ελατηρίου έχει σημείο αναφοράς πάντα τη θέση φυσικού μήκους Φ.Μ.

Στο κατακόρυφο ελατήριο οι δύο θέσεις δεν συμπίπτουν.

Η Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια παίρνει και αρνητικές τιμές όταν το σώμα βρίσκεται κάτω από το επίπεδο αναφοράς, που εδώ είναι η Θ.Ι.

Ανδρέας Ριζόπουλος