

## Тема 1.12 Загальні теореми динаміки

1. Імпульс сили, кількість руху матеріальної точки.
2. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки.
3. Кінетична енергія матеріальної точки.
4. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки.

### **Імпульс сили, кількість руху матеріальної точки. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки**

Загальні теореми динаміки матеріальної точки встановлюють залежність між зміною динамічних мір руху матеріальної точки і мірами дії сил, прикладених до цієї точки.

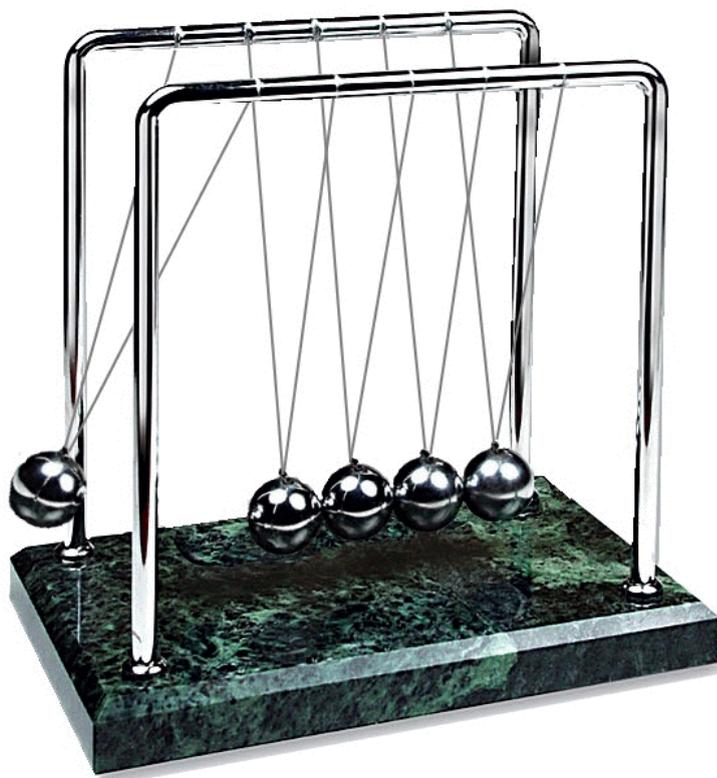
**Кількість руху  $m \cdot v$  матеріальної точки** – це вектор, який дорівнює добутку маси точки на її швидкість і має напрям швидкості.

Кількість руху – це динамічна міра руху матеріальної точки.

Одиниця кількості руху  $[m \cdot v] = [m] \cdot [v] = \text{кг} \cdot \text{м/с}$ .

**Імпульсом сталої сили  $F \cdot t$**  називають вектор, який дорівнює добутку сили на час її дії. Імпульс сили – це міра її дії у часі.

Одиниця імпульсу сили  $[F \cdot t] = [F] \cdot [t] = [m] \cdot [a] \cdot [t] = (\text{кг} \cdot \text{м/с}^2) \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м/с}$  (рис.1).



*Ялеку*

Рис.1. Колиска Ньютона — це пристрій, що демонструє закон збереження імпульсу та енергії

Кількість руху і імпульс сили мають однакові одиниці. Зв'язок між ними встановлює теорема про зміну кількості руху, яка формулюється так: **зміна кількості руху матеріальної точки за якийсь проміжок часу дорівнює імпульсу прикладеної до неї сили за той самий проміжок часу.**

Доведемо цю теорему для випадку прямолінійного руху матеріальної точки під дією сталої сили  $F$ . Оскільки такий рух буде рівнознімним, то його швидкість визначається формулою:

$$V = V_0 + a \cdot t$$

Перенесемо  $V_0$  у ліву частину і помножимо обидві частини рівності на масу  $m$  матеріальної точки:

$$m \cdot V - m \cdot V_0 = m \cdot a \cdot t = F \cdot t$$

У лівій частині рівності маємо зміну кількості руху за час  $t$ , а в правій – імпульс сили за той самий проміжок часу, що й треба було довести. Якщо рух сповільнений ( $V < V_0$ ), то вектор сили спрямований протилежно до вектора швидкості, тому в останню формулу силу треба підставляти з від'ємним знаком.

Для випадку криволінійного руху матеріальної точки під дією змінної за модулем і напрямом сили час  $t$  можна розбити на нескінченно малі проміжки, в межах яких вектор сили можна вважати сталим, а шлях – прямолінійним. Тоді імпульс сили за скінченний проміжок часу  $t$  дорівнюватиме сумі елементарних імпульсів. При цьому математичний вираз теореми про зміну кількості руху матиме вигляд:

$$m \cdot V - m \cdot V_0 = \int_0^t F \cdot dt$$

Якщо до матеріальної точки прикладено кілька сталих сил, то зміна кількості руху дорівнюватиме сумі (алгебраїчній, коли сили діють по одній прямій, або векторній, коли сили діють під кутом одна до одної) імпульсів даних сил:

$$m \cdot V - m \cdot V_0 = \sum (Ft)$$

### **Кінетична енергія матеріальної точки. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки**

Механічною енергією називають енергію переміщення і взаємодії тіл. Механічну енергію поділяють на кінетичну і потенціальну.

**Кінетичною енергією, або енергією руху,** називають енергію, яку має будь-яка матеріальна точка під час руху. Кінетична енергія – це динамічна міра руху матеріальної точки.

**Кінетична енергія матеріальної точки дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості:**

$$E_k = \frac{m \cdot V^2}{2}$$

Кінетична енергія – величина скалярна і завжди додатна.  
Одиниці кінетичної енергії: Дж.

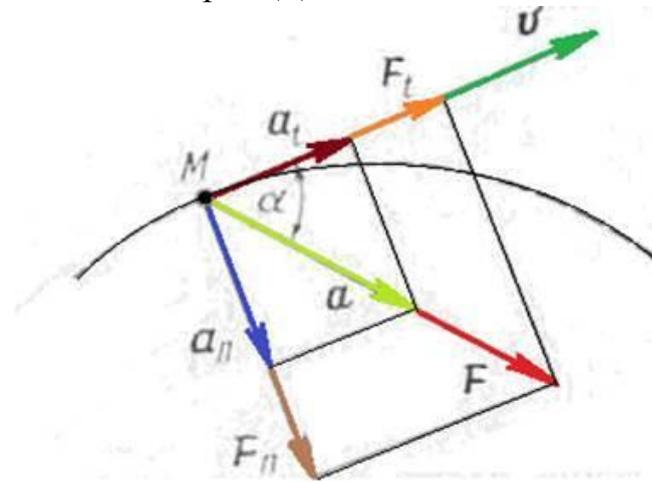


Рис. 1

Кінетична енергія має розмірність роботи. Зв'язок між кінетичною енергією і роботою встановлює *теорема про зміну кінетичної енергії*, яка формулюється так: **зміна кінетичної енергії матеріальної точки на якомусь відрізку шляху дорівнює роботі сили, прикладеної до точки на тому самому відрізку шляху.**

Доведемо цю теорему для випадку криволінійного руху матеріальної точки під дією змінної сили. Запишемо для цієї точки основне рівняння динаміки:

$$m \cdot a = F$$

де:  $F$  – сила, яка діє на точку;  
 $a$  – повне прискорення точки;  
 $m$  – маса точки.

Спроекуємо цю векторну рівність на напрям швидкості  $V$  точки:

$$m \cdot a \cdot \cos \lambda = F \cdot \cos \lambda ;$$

як відомо з кінематики

$$a \cdot \cos \lambda = a_t = \frac{dV}{dt}$$

Помножимо обидві частини рівності на нескінченно мале переміщення  $ds$ , дістанемо:

$$m \cdot \frac{dV}{dt} \cdot ds = m \cdot dV \cdot \frac{ds}{dt} = m \cdot V \cdot dV ; \quad m \cdot V \cdot dV = F \cdot \cos \lambda \cdot ds$$

Проінтегруємо обидві частини цієї рівності

$$m \int_{V_0}^V V \cdot dV = \int_0^s F \cdot \cos \lambda \cdot ds$$

тоді

$$\frac{m \cdot V^2}{2} - \frac{m \cdot V_0^2}{2} = A$$

Якщо до матеріальної точки прикладено кілька сил, то зміна кінетичної енергії дорівнюватиме алгебраїчній сумі робіт цих сил:

$$\frac{m \cdot V^2}{2} - \frac{m \cdot V_0^2}{2} = \sum A_{F_i}$$

### Тема 1.13. Елементи динаміки системи

#### План

1. Система матеріальних точок. Внутрішні і зовнішні сили. Момент інерції твердого тіла
2. Основне рівняння динаміки для обертального руху твердого тіла
3. Кінетична енергія твердого тіла за поступального, обертального і плоскопаралельного руху

#### **1. Система матеріальних точок. Внутрішні і зовнішні сили. Момент інерції твердого тіла**

Сукупність матеріальних точок, які взаємодіють між собою, називають механічною системою матеріальних точок. Будь-яке тверде тіло можна вважати незмінною механічною **системою матеріальних точок**. Сили взаємодії точок цієї системи називають **внутрішніми**; сили, з якими діють на цю систему інші точки, що не належать до цієї системи, – **зовнішніми**.

Всі формули динаміки точки застосовні до тіла, яке рухається поступально.

Рівняння поступального руху твердого тіла нічим не відрізняється від основного рівняння динаміки точки:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

де  $m$  – маса тіла, яка є мірою інертності тіла за поступального руху.

За обертального руху твердого тіла мірою його інертності є момент інерції тіла відносно осі обертання. **Момент інерції** тіла відносно осі – це сума добутків мас матеріальних точок, які утворюють це тіло, на квадрат відстаней їх до цієї осі

$$J = \sum (m_i \cdot r_i^2)$$

Одиниця вимірювання моменту інерції  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ .

Суттєва відмінність осьового моменту інерції тіла від його маси полягає в тому, що маса тіла є для нього величиною постійною, тоді як момент інерції тіла залежить не тільки від самої обертової маси, але й від розподілу цієї маси відносно осі обертання.

Моменти інерції деяких однорідних тіл:

1) момент інерції тонкого однорідного стержня завдовжки  $l$  і масою  $m$ :

$$J = \frac{1}{3} ml^2 ;$$

2) момент інерції круглого однорідного циліндра радіусом  $R$  і масою  $m$ :

$$J = \frac{1}{2} mR^2$$

*Теорема Гюйгенса: Момент інерції тіла відносно даної осі дорівнює моментів інерції тіла відносно осі, що їй паралельна і проходить через центр маси тіла, плюс добуток маси всього тіла на квадрат відстані між осями.*

$$J_1 = J + md^2$$

## 2. Основне рівняння динаміки для обертального руху твердого тіла

Для тіла яке обертається навколо нерухомої осі основне рівняння динаміки має вигляд:

$$M_{об} = J \cdot \varepsilon$$

*Обертальний момент дорівнює добуткові моменту інерції тіла відносно осі обертання на кутове прискорення.*

Величина  $M_{об}$  може залежати від  $\varphi$  і  $t$ . Якщо  $M_{об}=0$ , то  $\omega=const$ , тобто тіло обертається рівномірно. Якщо  $M_{об}=const$ , то  $\varepsilon=const$ , тобто тіло обертається рівнозмінно.

## 3. Кінетична енергія твердого тіла за поступального, обертального і плоскопаралельного руху

Кінетична енергія твердого тіла дорівнює сумі кінетичних енергій матеріальних точок, які утворюють це тіло:

$$E_k = \frac{\sum (m_i \cdot V^2)}{2}$$

Обчислимо кінетичну енергію твердого тіла для трьох випадків руху.

**1) Тіло рухається поступально**

Оскільки в поступальному русі усі точки тіла рухаються з однаковими швидкостями, його швидкість обчислюється за тією самою формулою, що й кінетична енергія матеріальної точки:

$$E_{\text{пос.}} = \frac{m \cdot V_c^2}{2}$$

Кінетична енергія тіла за поступального руху дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат швидкості руху центра мас.

### **2) Тіло обертається навколо нерухомої осі**

$$E_{\text{ос.}} = \frac{\sum (m_i \cdot V_i^2)}{2} = \frac{\sum [m_i \cdot (\omega \cdot r_i)^2]}{2} = \left(\frac{\omega^2}{2}\right) \cdot \sum (m_i \cdot r_i^2)$$

$$E_{\text{ос.}} = \frac{J \cdot \omega^2}{2}$$

Кінетична енергія твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно осі обертання на квадрат його кутової швидкості.

### **3) Тіло рухається плоскопаралельно**

$$E_{\text{пл.}} = \frac{m \cdot V_c^2}{2} + \frac{J_c \cdot \omega^2}{2}$$

Кінетична енергія твердого тіла, яке рухається плоскопаралельно, дорівнює сумі кінетичних енергій у поступальному русі разом з центром ваги і обертальному русі навколо центральної осі, перпендикулярної до основної площини.

**Теорема про зміну кінетичної енергії системи тіл: зміна кінетичної енергії системи тіл за деякого переміщення дорівнює алгебраїчній сумі робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил, які діяли на систему під час переміщення.**

$$\sum E - \sum E_0 = \sum A$$

Кінетична енергія системи тіл дорівнює сумі кінетичних енергій кожного тіла окремо. Якщо тіло тверде, то сума робіт його внутрішніх сил дорівнює нулю.