

CHỦ ĐỀ 2: TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN TRONG TAM GIÁC VUÔNG.

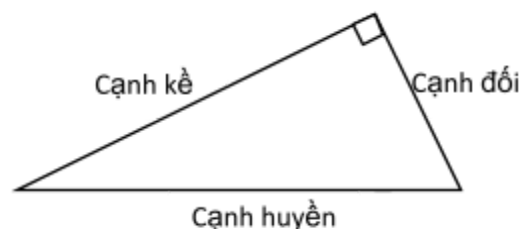
A

Xét góc nhọn α trong tam giác vuông ABC

α Cạnh AB **kề** với góc α

B Cạnh AC **đối** diện góc α C

Cạnh **huyền** BC.



1/ Tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông.

* Có bốn tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông:

$$\sin \alpha = \frac{\text{đối}}{\text{huyền}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{kề}}{\text{huyền}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{đối}}{\text{kề}}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\text{kề}}{\text{đối}}$$

* **Chú ý:**

- Tỉ số lượng giác của góc nhọn luôn dương.
- Muốn có tỉ số lượng giác của góc nhọn α phải tạo ra tam giác vuông chứa góc nhọn α
- Nếu biết một góc nhọn và một cạnh của tam giác vuông sẽ tính được góc nhọn và cạnh còn lại theo tỉ số lượng giác.

2/ Hệ thức liên hệ giữa các tỉ số lượng giác góc nhọn.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1 \qquad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

GIÁ TRỊ LG GÓC NHỌN ĐẶC BIỆT			
	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

3/ Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau.

* Gọi α và β là hai góc phụ nhau trong tam giác vuông. Ta có: $\alpha + \beta = 90^\circ$

$$\sin \alpha = \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \sin \beta$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$$

* **Chú ý**

$$1^{\circ} = 60'$$

$$90^{\circ} = 89^{\circ}60'$$

CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1: Tính cạnh và góc nhọn chưa biết trong tam giác vuông.

I/ Phương pháp.

- Nếu biết góc và cần tính cạnh: Xác định cạnh cần tìm là **cạnh đối** hay **cạnh kề** của góc nhọn hay **cạnh huyền** từ đó lựa chọn dùng tỉ số lượng giác nào của góc nhọn để tính.

- Nếu biết cạnh và cần tính góc: Dùng tỉ số lượng giác của góc nhọn liên quan tới cạnh đã biết (**kề** hoặc **đối** hoặc **huyền**) và góc nhọn cần tính.

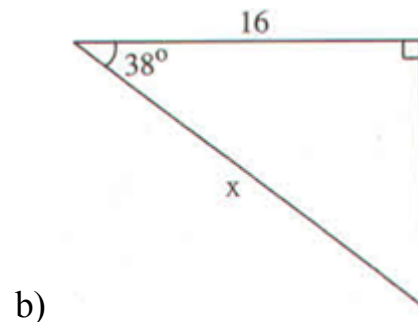
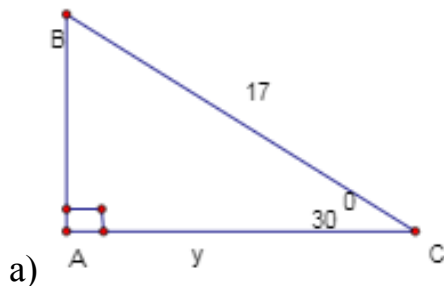
- Có thể vận dụng kết hợp hệ thức liên hệ “**cạnh góc vuông, cạnh huyền và đường cao**” trong tam giác vuông để tính cạnh.

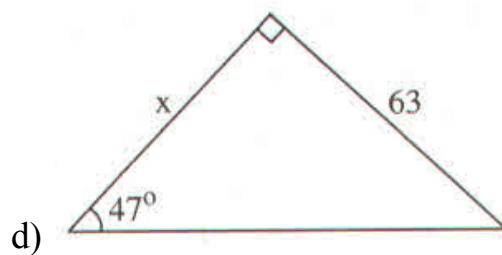
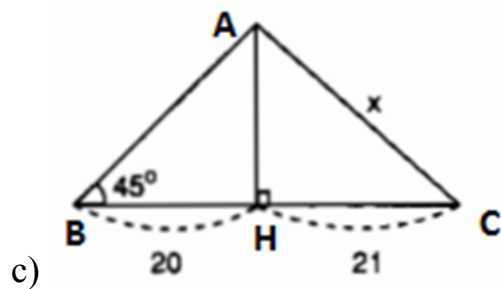
II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A. Góc B bằng 30° , $BC = 10\text{cm}$. Hãy tính cạnh AB?

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A. Góc B bằng α , biết $\text{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $AB = 8\text{cm}$. Hãy tính cạnh AC và BC?

Bài 3: Tính giá trị x ; y trong hình. Biết $\text{tg}47^{\circ} = 1,072$ và $\cos38^{\circ} = 0,788$.



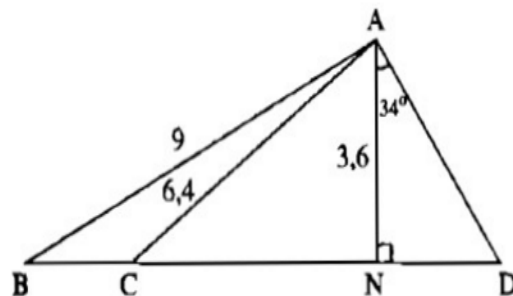


Bài 4: (SBT toán 9 – trang 107) Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường cao AH. Tính $\sin B$ và $\sin C$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $AB = 13$; $BH = 5$.

b) $BH = 3$; $CH = 4$.

Bài 5: (SBT toán 9 – trang 111) Cho hình vẽ. Biết $AB = 9\text{cm}$; $AC = 6,4\text{cm}$; $AN = 3,6\text{cm}$; góc AND bằng 90° ; góc DAN bằng 34° . Hãy tính: CN ; góc ABN ; góc CAN và AD?

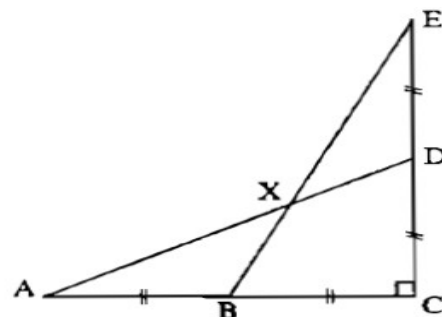


Bài 6: (SBT toán 9 – trang 111) Cho hình vẽ bên. Biết $AB = BC = CD = DE = 2\text{cm}$. Hãy tính:

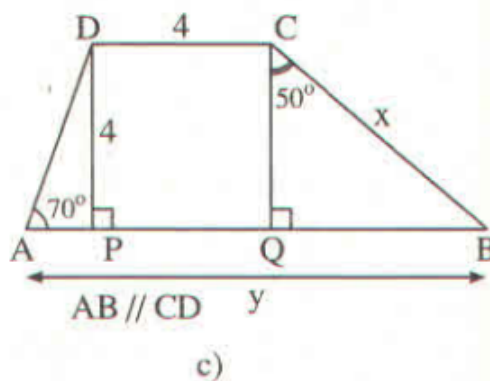
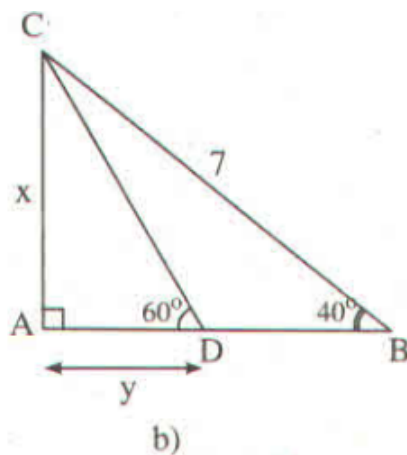
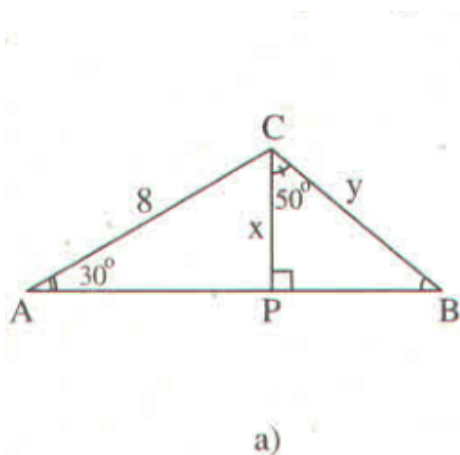
a) AD ; BE

b) góc DAC

c) góc BXD



Bài 7: (SBT toán 9 – trang 114) Tìm x ; y trong các hình sau:



DẠNG 2: Tính cạnh và góc nhọn chưa biết trong tam giác thường.

I/ Phương pháp.

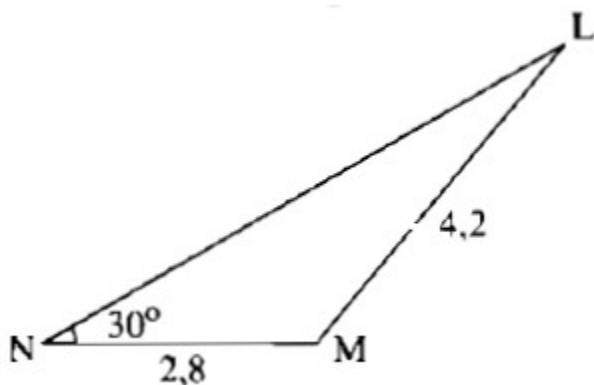
- Nếu tam giác đã cho là tam giác thường, ta phải dựng thêm đường cao của tam giác để có được tam giác vuông.

- Đường cao dựng sao cho tam giác vuông tạo ra phải chứa yếu tố góc nhọn và một cạnh đã biết.

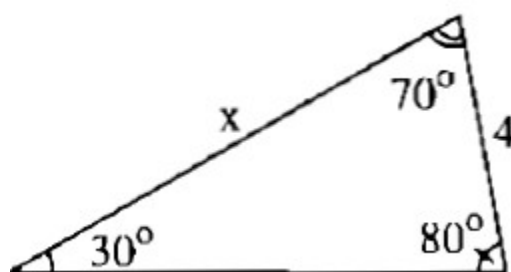
- Áp dụng tỉ số lượng giác góc nhọn tương ứng trong tam giác vuông vừa tạo.

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1: (SBT toán 9 – trang 108) Tính $\sin L$ trong Hình 1 ở dưới. Biết $\sin 30^\circ = 0,5$.



Hình 1

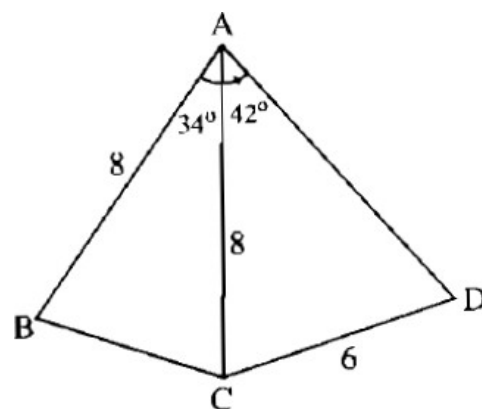


Hình 2

Bài 2: (SBT toán 9 – trang 108). Tính x trong Hình 2 ở trên.

Bài 3: (SBT toán 9 – trang 115) Cho Hình 3. Hãy tính

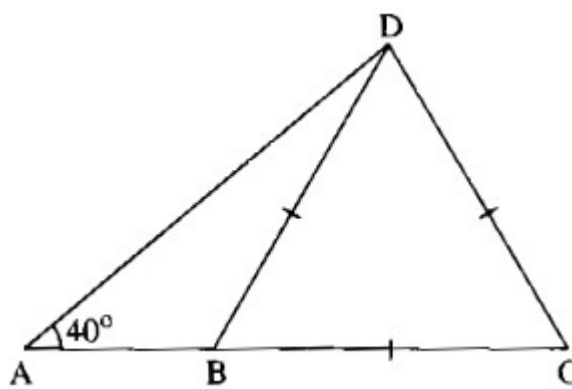
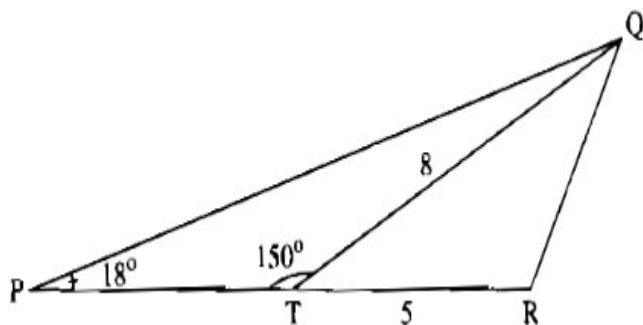
- Độ dài cạnh BC
- góc ADC
- Khoảng cách từ điểm B đến cạnh AD



Hình 3

Bài 4: (SBT toán 9 – trang 113) Cho Hình 4. Hãy tính

- Độ dài cạnh PT
- Diện tích tam giác PQR



Hình 4

Hình 5

Bài 5: (SBT toán 9 – trang 115). Cho Hình 5, tam giác BCD là tam giác đều cạnh 5cm và góc DAB bằng 40° . Hãy tính AD và AB.

Bài 6: (SBT toán 9 – trang 115) Cho tam giác ABC có BC = 12cm, góc B bằng 60° ; góc C bằng 40° . Tính:

a) Đường cao CH và cạnh AC.

b) Diện tích tam giác ABC.

Bài 7: Hình bình hành ABCD có AB = 20cm và BD = 15cm, góc tạo bởi hai cạnh AB và BD là 110° . Tính diện tích hình bình hành ABCD.

Bài 8: Hình thang cân ABCD (AB // DC). Biết AB = 15cm và DC = 20cm. Góc ở đáy bằng 75° . Tính diện tích hình thang cân ABCD.

DẠNG 3: Tỷ số lượng giác của hai góc phụ nhau.

I/ Phương pháp.

* Nếu α và β là hai góc phụ nhau ($\alpha + \beta = 90^\circ$):

$$\sin \alpha = \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \sin \beta$$

$$\tan \alpha = \cot \beta$$

$$\cot \alpha = \tan \beta$$

* **Chú ý:** $1^\circ = 60'$ $90^\circ = 89^\circ 60'$

Ví dụ: Góc $20^\circ 35'$ phụ với góc $69^\circ 25'$ vì $20^\circ 35' + 69^\circ 25' = 89^\circ 60'$

* **Vận dụng:**

- Xác định tỷ số lượng giác của góc nhọn nhỏ hơn 45° khi biết tỷ số lượng giác của góc lớn hơn 45° (hoặc ngược lại).

- Rút gọn (hoặc tính) các biểu thức liên quan tới góc phụ nhau.

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1: Đổi tỷ số lượng giác của các góc nhọn sau đây thành tỷ số lượng giác của góc nhỏ hơn 45° .

$$\sin 82^\circ; \cos 47^\circ; \sin 48^\circ; \cos 55^\circ; \sin 47^\circ 20'; \tan 62^\circ; \cot 82^\circ 45'$$

Bài 2: Cho tam giác ABC. Biết AB = 21cm, AC = 28cm, BC = 35cm.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông;

b) Tính $\sin B$, $\sin C$.

Bài 4: Đơn giản biểu thức: $A = \sin(90^\circ - x)\sin(180^\circ - x)$

$$B = \cos(90^\circ - x)\cos(180^\circ - x)$$

Bài 5: Tính kết quả của biểu thức

a) $A = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 80^\circ + \sin^2 70^\circ + \sin^2 60^\circ$.

b) $B = \cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ + \cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ$

c) $C = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$.

d) $D = \cos 45^\circ \cdot \cos^2 23^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos^2 67^\circ$.

e) $E = \frac{\operatorname{tg} 64^\circ}{\operatorname{cotg} 26^\circ} - 1$

DẠNG 4: Chứng minh đẳng thức. Rút gọn biểu thức theo góc α .

I/ Phương pháp.

Vận dụng các hệ thức liên hệ sau để biến đổi một vế đẳng thức cho bằng vế còn lại (rút gọn biểu thức)

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1 \qquad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

HỆ THỨC MỞ RỘNG:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \qquad \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha$$

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1: Chứng minh các hằng đẳng thức:

a) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cdot \cos x$

b) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x \cdot \cos x$

c) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

d) $\sin x \cos x (1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{cotg} x) = 1 + 2\sin x \cdot \cos x$.

Bài 2: Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \frac{1}{1+\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{1+\cot \alpha} = 1$$

$$b) \sin^4 x - \cos^4 x = 2\sin^2 x - 1$$

$$c) \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + \cot^2 x + 2$$

$$d) \frac{1+\sin^2 \alpha}{1-\sin^2 \alpha} = 1 + 2\operatorname{tg}^2 \alpha$$

f) Cho α, β là hai góc nhọn. Chứng minh rằng:

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \beta}$$

Bài 3: Rút gọn biểu thức:

$$a) A = \sin^6 x + 3\sin^4 x \cdot \cos^2 x + 3\sin^2 x \cdot \cos^4 x + \cos^6 x$$

$$b) B = (1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha) - \sin^2 \alpha$$

Bài 4: Đơn giản các biểu thức:

$$A = \cos y + \sin y \cdot \operatorname{tg} y$$

$$B = \sqrt{1 + \cos b} \cdot \sqrt{1 - \cos b}$$

$$C = \sin a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}$$

Bài 5: (Nâng cao) Cho các góc α, β nhọn, $\alpha < \beta$. Chứng minh rằng:

$$a) \cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha$$

$$b) \sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta$$

Bài 6: (Nâng cao) Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng:

$$a) \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$$

$$b) \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

Bài 7: (Nâng cao) Cho tam giác ABC nhọn có ba cạnh là a, b, c. Chứng minh rằng:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \quad (AB = c, BC = a, CA = b).$$

DẠNG 5: Biết một tỉ số lượng giác của góc α tính các tỉ số lượng giác còn lại.

I/ Phương pháp.

Vận dụng các hệ thức liên hệ sau để biến đổi một vế đẳng thức cho bằng vế còn lại (rút gọn biểu thức)

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

HỆ THỨC MỞ RỘNG:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha$$

Chú ý: Các tỉ số lượng giác góc nhọn luôn dương.

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1: Biết rằng $\sin \alpha = 0,6$. Tính $\cos \alpha$ và $\operatorname{tg} \alpha$.

Bài 2: Biết rằng $\cos \alpha = 0,7$. Tính $\sin \alpha$ và $\operatorname{tg} \alpha$.

Bài 3: Biết rằng $\operatorname{tg} \alpha = 0,8$. Tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$.

Bài 4: Biết $\cos x = \frac{1}{2}$, tính $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x$.

Bài 5:

a) Cho góc nhọn β mà $\sin \beta = \frac{1}{4}$. Tính $\cos \beta$ và $\operatorname{tg} \beta$.

b) Cho góc α mà $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$. Tính $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ và $\cot \alpha$.

c) Cho $\operatorname{tg} x = 2\sqrt{2}$. Tính $\sin x$ và $\cos x$.

Bài 6: Hãy tính $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ nếu:

a) $\cos \alpha = \frac{12}{13}$

b) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$

Bài 7: Biết rằng $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. Tính tỉ số lượng giác của góc 15° .

Dạng 6: Tính khoảng cách - Tính chiều cao - Tính diện tích tam giác - Tính độ dài đoạn thẳng - C/m các hệ thức trong tam giác: Bằng cách áp dụng tỉ số LG góc nhọn.

Bài 1: Cho tam giác ABC có AB = 26cm, AC = 25cm, đường cao AH = 24cm. Tính cạnh BC.

Bài 2: Cho tam giác ABC cân (AB = AC) và đường tròn tâm O tiếp xúc với hai cạnh AB và AC lần lượt ở B và C. Từ điểm M trên cung nhỏ BC (M khác B và C) kẻ MD, ME, MF lần lượt vuông góc với các đường thẳng BC, CA, AB.

- Chứng minh các tứ giác MDBF, MBCE nội tiếp.
- Chứng minh các tam giác DBM và ECM đồng dạng.
- Cho góc BAC = 60° và AB = 2, tính bán kính đường tròn tâm O.

Bài 3:

- Cho tam giác ABC có A nhọn. Chứng minh rằng: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$.

Gợi ý : Vẽ BH là đường cao của tam giác ABC.

$$BH = AB \sin \angle BAH; \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot AC.$$

- Cho tứ giác ABCD có AC cắt BD tại O và AOB nhọn. Chứng minh rằng:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \angle AOB.$$

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AD}$$

$$\text{b) } \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \leq \frac{1}{AD^2}.$$

Bài 5: Cho hình thang ABCD có hai cạnh bên là AD và BC bằng nhau, đường chéo AC vuông góc với cạnh bên BC. Biết AD = 5a, AC = 12a.

a) Tính $\frac{\sin B + \cos B}{\sin B - \cos B}$

b) Tính chiều cao của hình thang ABCD.

Bài 6: Cho hình thang ABCD. Biết đáy $AB = a$ và $CD = 2a$; cạnh bên $AD = a$, góc $A = 90^\circ$

a) Chứng minh $\tan C = 1$;

b) Tính tỉ số diện tích tam giác DBC và diện tích hình thang ABCD ;

c) Tính tỉ số diện tích tam giác ABC và diện tích tam giác DBC.

Bài 7: Gọi AM, BN, CL là ba đường cao của tam giác ABC.

a) Chứng minh: $\triangle ANL \sim \triangle ABC$;

b) Chứng minh: $AN \cdot BL \cdot CM = AB \cdot BC \cdot CA \cdot \cos A \cos B \cos C$.